SIFAT – SIFAT RUANG VEKTOR Z32

SKRIPSI

DESI YANA

07134048

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

PADANG

2011

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa:

Nama	: Desi Yana
No. Buku Pokok	: 07134048
Jurusan	: Matematika
Bidang	: Matematika Teori
Judul Skripsi	: **Sifat-Sifat Ruang Vektor $\mathbb{Z}_3^2$**

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal 08 Juli 2011 berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing/Penguji

1.

Prof. Dr. I Made Arnawa, M.Si
NIP. 131847974

Penguji

1.

Budi Rudianto, M.Si
NIP. 132169920

2.

Efendi, M.Si
NIP. 197807172002121002

Mengetahui, Ketua Jurusan Matematika
FMIPA Universitas Andalas

Dr. Syafrizal Sy
NIP. 196708071993091001

بِسْمِ ٱللَّٰهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Puji dan syukur yang tiada berhingga ku sampaikan kehadirat Allah SWT
Yang telah memberikanku kemudahan atas segala rezki dan urusanku serta kesempatan untuk membahagiakan orang – orang yang kucintai dan kukasihi

Shalawat beriring salam tak lupa pula ku sampaikan kepada junjungan kita
Nabi Muhammad SAW, yang telah membawa pencerahan kehidupan dan suri tauladan bagi kita baik didunia maupun diakhirat nanti

Dengan segala kerendahan dan ketulusan hati kupersembahkan karya kecilku kepada

Ayah dan Ibu

Terima kasih untuk doa-doanya dan semua pengorbanan kalian yang sudah membimbingku, mendidikku dari kecil hingga sekarang agar ku bisa meraih keberhasilan dan kesuksesan di masa depan.
Semua pengorbanan itu takkan pernah sanggup untuk ku balas semuanya.
Terima kasih Ayah… Ibu…
Aku sangat menyayangi kalian.

Adik – adikku

Oktari : selalu semangat dalam menempuh kuliah nya, cak selalu mendukung ambisi mu tuk bisa sampai kejenjang yg lebih tinggi lagi. Banggakan orang tua mu dengan perstasi mu.
Riki Juanda : apapun kekurangan mu tetap untuk terus berusaha karena nantinya engkau merupakan panutan bagi keluarga.
Riska Anggraeni : keceriaan mu selalu memotivasi ku dalam segala hal. Jadilah adik cilik ku yang lincah dan terus belajar hingga nanti bila kau besar, engkau bisa menjadi orang yang mempunyai masa depan yang baik.

My Lovely

Terima kasih atas semua perhatian dan semangat yang kau berikan

Dari kehidupanmu aku banyak belajar tentang arti kehidupan ini dan bisa lebih kuat dalam menghadapi setiap masalah dengan tetap terus bersabar dan bersyukur.

Semoga semua harapan dapat terwujud

Semoga engkau bahagia, karena itu adalah kebahagianku untuk orang yang kucintai

Sahabat seperjuangan Basic Science

Telah banyak cerita dalam kebersamaan kita, bersama-sama menggapai cita-cita

Dari awal kita semua bertemu hingga akhir nantinya kita semua kan berpisah

Semoga kalian semua akan menjadi orang yang sukses begitu juga dengan diriku

Kenangan dan pelajaran yang berharga kutemukan dalam kehidupan saat kita semua bersama

Terima kasih karena kebersamaan kita semua akan menjadi cerita yang takkan pernah hilang dari ingatanku

Teman-temanku di Curup, yang selalu menyemangatiku serta buat teman-teman seangkatan 05 SMA N 2 Curup moga kalian bisa sukses.

Untuk Hensi, Yanita, Bela, Siska, Dadang, Medon, Edi, Heksa, kk Anton, maksi banget ya atas segala supportnya. Tanpa kalian tak ada keindahan dalam sebuah persahabatan.

Terima kasih atas kebersamaan dalam jalinan persahabatan, Semangat...

Terakhir untuk semua orang yang pernah singgah dan hadir disepanjang perjalanan hidupku

Memberiku perhatian, dorongan, motivasi dan pelajaran hidup

Ku ucapkan terima kasih

Desi Yana

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur kehadirat Allah yang Maha Kuasa, atas segala rahmat nikmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan baik. Penulisan skripsi penelitian ini berjudul " **Sifat-Sifat Ruang Vektor** $\mathbb{Z}_3^2$" merupakan salah satu persyaratan untuk menyelesaikan program studi matematika pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang.

Dalam menyelesaikan tulisan ini, penulis banyak mendapatkan bantuan, bimbingan, arahan, dan petunjuk dari berbagai pihak. Oleh sebab itu pada kesempatan ini, penulis dengan hati yang tulus penuh rasa syukur penghargaan dan ucapan terima kasih yang sedalam-dalamnya yang diberikan kepada:

1. Ayahanda M. Daud beserta Ibunda Rosada yang tak henti-hentinya memberikan dukungan moral dalam menyelesaikan tulisan ini.
2. Bapak Prof. Dr. I Made Arnawa, M. Si sebagai pembimbing, yang telah membimbing, memberi masukan dan arahan kepada penulis.
3. Bapak Dr. Safrizal Sy selaku ketua Jurusan Matematika Universitas Andalas, Padang.
4. Bapak Budi Rudianto, M.Si dan Bapak Efendi, M.Si selaku penguji yang telah memberikan saran dan kritikan kepada penulis.
5. Bapak dan Ibu karyawan Tata Usaha di jurusan Matematika.
6. Teman-teman Basic Science atas dukungan dan semangatnya, bersama-sama dalam menyelesaikan tulisan ini.
7. Semua rekan-rekan matematika angkatan 2007 yang telah banyak membantu dan memberi semangat.

8. Teman-teman di Curup, Bengkulu yang telah memberi dukungan dan semangat selama kuliah.

Akhirnya penulis menyadari bahwa penulisan skripsi penelitian ini masih memiliki kekurangan, oleh karena itu saran, masukan dan kritik dari pembaca sangat penulis harapkan demi pengembangan yang lebih baik.

Padang,   Juli 2011

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Ruang vektor (*V*, +, .) merupakan suatu himpunan *V* yang unsur– unsurnya dinamakan vektor dan dilambangkan dengan huruf cetak tebal seperti **u**, **v**, **w**, dan **x**. $\mathbb{Z}_3^2$ merupakan salah satu ruang vektor atas lapangan $\mathbb{Z}_3$. Sifat – sifat dari ruang vektor $\mathbb{Z}_3^2$ yang berlaku pada setiap unsurnya tidak memiliki sifat–sifat yang sama.

Kata kunci : *Ruang Vektor, Group.*

BAB I

PENDAHULUAN

1. 1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu ilmu yang memiliki struktur dan sistematika keilmuan yang sangat kuat, sehingga tidak berlebihan bila banyak yang mengatakan bahwa matematika itu rajanya ilmu karena dasar dari matematika telah banyak memberikan sumbangan dalam perkembangan ilmu dan teknologi. Salah satu cabang dari ilmu matematika yaitu Aljabar.

Ruang vektor (*V*, +, .) merupakan suatu himpunan *V* yang unsur – unsurnya dinamakan vektor dan dilambangkan dengan huruf cetak tebal seperti **u**, **v**, **w**, dan **x**. Terdapat dua cara untuk menggabungkan unsur – unsur tersebut yaitu penjumlahan vektor (+) dan perkalian skalar (.).

$\mathbb{Z}_3^2$ merupakan salah satu ruang vektor atas lapangan $\mathbb{Z}_3$. Pada tulisan ini akan dijabarkan sifat – sifat dari $\mathbb{Z}_3^2$ terhadap ruang vektor yang berlaku yang terkadang pada setiap unsurnya tidak memiliki sifat–sifat yang sama.

Adapun yang akan dijabarkan selain ruang vektor yaitu subruang, basis dan juga dimensi dari $\mathbb{Z}_3^2$.

1. 2 Rumusan Masalah

Berdasarkan pada uraian latar belakang bahwa $\mathbb{Z}_3^2$ merupakan salah satu ruang vektor atas lapangan $\mathbb{Z}_3$, sehingga timbul pertanyaan apa saja sifat–sifat dari ruang vektor $\mathbb{Z}_3^2$ tersebut.

1. 3 Batasan Masalah

Pada pembahasan ini penulis membatasi hanya pada lapangan, ruang vektor, basis dan juga dimensi.

1. 4 Manfaat

Tulisan ini diharapkan bermanfaat dalam membantu menentukan sifat–sifat dari ruang vektor $\mathbb{Z}_3^2$.

1. 5 Tujuan

Pada tulisan ini akan ditunjukan sifat–sifat dari ruang vektor $\mathbb{Z}_3^2$ yang berlaku berdasarkan teorema–teorema dan definisi yang ada.

1. 6 Sistematika Penulisan

BAB I PENDAHULUAN

Berisikan latar belakang, rumusan masalah, pembatasan masalah, manfaat, tujuan serta sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Berisikan definisi–definisi, teorema–teorema, lemma serta contoh–contoh mengenai gelanggang/ring, lapangan, ruang vektor, subruang, kombinasi linear, bebas linear, bergantung linear, membangun, basis, dan dimensi.

BAB III PEMBAHASAN

Berisikan teorema–teorema serta bukti mengenai sifat–sifat ruang vektor $\mathbb{Z}_3^2$.

BAB IV KESIMPULAN

Berisikan kesimpulan mengenai sifat–sifat dari ruang vektor $\mathbb{Z}_3^2$.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bagian ini akan dijelaskan definisi–definisi, teorema dan lemma yang berkaitan dengan group, lapangan, ring, ruang vektor, subruang, basis, bebas linear, membangun, dan dimensi yang akan dipakai pada pembahasan BAB III.

2. 1 Group

Definisi 2. 1. 1(Jacob, 1990)

Himpunan tak kosong G dikatakan membentuk group terhadap operasi * jika G terhadap operasi * memenuhi :

1. Setiap a, b $\in$ G berlaku a*b $\in$ G (G bersifat tertutup terhadap operasi *)
2. Setiap a, b, c $\in$ G berlaku (a*b)*c = a*(b*c) $\in$ G (G bersifat asosiatif terhadap operasi *).
3. Terdapat unsur di G yang ditulis sebagai e sehingga a*e = e*a = a untuk setiap a $\in$ G (adanya unsur identitas terhadap operasi * di G).
4. Setiap a $\in$ G terdapat suatu unsur b di G sehingga a*b = b*a = e (setiap unsur di G mempunyai invers, b disebut invers dari a dan ditulis sebagai a^{-1}).

Contoh 2. 1. 1

Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan group terhadap operasi penjumlahan biasa. Terhadap operasi penjumlahan biasa, himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ mempunyai sifat–sifat sebagai berikut :

1. Bersifat tertutup, karena jumlah dua bilangan bulat senantiasa bilangan bulat.

2. Bersifat asosiatif, karena setiap a, b, c di $\mathbb{Z}$ senantiasa berlaku :

   $a + (b + c) = (a + b) + c$

3. Terdapat unsur identitas di $\mathbb{Z}$, karena ada bilangan bulat 0 di $\mathbb{Z}$ sehingga untuk setiap a di $\mathbb{Z}$ berlaku $a + 0 = 0 + a = a$.

4. Setiap unsur di $\mathbb{Z}$ mempunyai invers, karena setiap bilangan bulat a di $\mathbb{Z}$ ada bilangan bulat –a di $\mathbb{Z}$ sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

5. Bersifat komutatif, karena setiap a, b di $\mathbb{Z}$ senatiasa berlaku :

   $a + b = b + a$.

Dengan demikian $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan group.

2. 2 Ring/Gelanggang

Definisi 2. 2. 1(Arnawa, 2008)

Himpunan tak kosong $\mathbb{R}$ dikatakan membentuk gelanggang jika di $\mathbb{R}$ dapat didefinisikan dua operasi biner yang ditulis sebagai + (operasi jumlah) dan $\cdot$ (operasi kali) sedemikian sehingga setiap a, b, c ϵ $\mathbb{R}$ berlaku :

1. $a + b$ $\mathbb{R}$.
2. $a + b = b + a$ $\mathbb{R}$.
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ $\mathbb{R}$.
4. Terdapat suatu unsur di $\mathbb{R}$ yang ditulis sebagai 0, sedemikian sehingga $a + 0 = 0 + a = a$ (0 disebut unsur identitas terhadap operasi +).
5. Terdapat unsur –a di $\mathbb{R}$ sedemikian sehingga $a + (-a) = 0$.
6. $a \cdot b$ $\mathbb{R}$.
7. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
8. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dan $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

2. 3 Lapangan

Definisi 2. 3. 1(Roman, 1992)

Misalkan $\mathbb{R}$ gelanggang komutatif. Jika $\mathbb{R}$ - {0} membentuk group terhadap operasi perkalian maka $\mathbb{R}$ disebut lapangan.

Contoh 2. 3. 1

Misalkan $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan bilangan rill. Dapat ditunjukan bahwa $\mathbb{R}$ suatu gelanggang komutatif dan $\mathbb{R}$ - {0} membentuk group terhadap operasi perkalian biasa. Dengan demikian $\mathbb{R}$ suatu lapangan.

2. 4 Ruang Vektor

Definisi 2. 4. 1(Hoofman, 1971)

Suatu himpunan *V* dikatakan ruang vektor (ruang linear) apabila terdiri dari

1. Lapangan ***F*** (disebut skalar).
2. Himpunan objek – objek *V*.
3. Operasi + (disebut operasi penjumlahan vektor) yang mengaitkan setiap dua vektor **v** dan **w** di *V* dengan suatu vektor **v** + **w** di *V* yang disebut dengan jumlah dari vektor **v** dan **w** yang memenuhi :
    a. Untuk setiap vektor **v** dan **w** di *V* berlaku **v** + **w** = **w** + **v** (sifat komutatif terhadap operasi jumlah).
    b. Untuk setiap **v**, **w**, dan **u** di *V* berlaku:
    v + (**w** + **u**) = (**v** + **w**) + **u** (sifat asosiatif terhadap operasi jumlah).
    c. Terdapat secara tunggal vektor **0** di *V* yang disebut vektor nol, sehingga untuk setiap vektor **v** di *V* berlaku **v** + **0** = **0** + **v** = **v**.
    d. Untuk setiap vektor **v** di *V*, terdapat secara tunggal vektor **–v** di *V* sehingga berlaku **v** + (**-v**) = **0**.

4. Operasi **.** (disebut operasi perkalian skalar) yang mengaitkan setiap skalar c di ***F*** dan vektor **v** di *V* dengan c . **v** di *V* yang disebut sebagai perkalian skalar c dengan vektor **v**, yang memenuhi :

   a. Untuk setiap vektor **v** di *V* berlaku 1**v** = **v**.

   b. Untuk setiap skalar c_1 dan c_2 di ***F*** serta vektor **v** di *V* berlaku

      $c_1.(c_2.\mathbf{v}) = (c_1.c_2).\mathbf{v}$

   c. Untuk setiap skalar c di ***F*** serta vektor **v** dan **w** di *V* berlaku

      $c\,.\,(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = c\,.\,\mathbf{v} + c\,.\,\mathbf{w}$

   d. Untuk setiap vektor **v** di *V* serta skalar c_1 dan c_2 di ***F*** berlaku

      $(c_1 + c_2)\,.\,\mathbf{v} = c_1\,.\,\mathbf{v} + c_2\,.\,\mathbf{v}$

Untuk selanjutnya c . **v** ditulis c**v**.

Contoh 2. 4. 1

Misalkan ***F*** lapangan dan *V* himpunan semua n – tupel $\boldsymbol{\alpha} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ dengan $x_i \in F$. Jika $\boldsymbol{\beta} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ dengan $y_i \in F$, operasi jumlah dari $\boldsymbol{\alpha}$ dan $\boldsymbol{\beta}$ didefinisikan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

Dari operasi perkalian skalar *c* dan $\boldsymbol{\alpha}$ didefinisikan sebagai berikut :

$$c\boldsymbol{\alpha} = c(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n)$$

Dengan operasi diatas, *V* merupakan ruang vektor atas lapangan ***F***.

Akan ditunjukan bahwa $\boldsymbol{\alpha}$ dan $\boldsymbol{\beta}$ terhadap operasi penjumlahan berlaku :

1. $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)\\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)\\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \ldots, y_n + x_n)\\ &= (y_1, y_2, \ldots, y_n) + (x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ &= \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}\end{aligned}$$

2. $\boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}) &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + [(y_1, y_2, \ldots, y_n) + (z_1, z_2, \ldots, z_n)]\\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_n + z_n)\\ &= [x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \ldots, x_n + (y_n + z_n)]\\ &= [(x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \ldots, (x_n + y_n) + z_n]\\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) + (z_1, z_2, \ldots, z_n)\\ &= [(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)] + (z_1, z_2, \ldots, z_n)\\ &= (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma}\end{aligned}$$

3. Terdapat sebuah vektor **0** di $\boldsymbol{V}$ sehingga $\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}$, untuk setiap $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0} &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (0, 0, \ldots, 0)\\ &= (x_1 + 0, x_2 + 0, \ldots, x_n + 0)\\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ &= \boldsymbol{\alpha}\end{aligned}$$

4. Untuk setiap $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$ terdapat sebuah $-\mathbf{a} \in \boldsymbol{V}$ sehingga $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

Ambil $\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{V}$ maka $-\boldsymbol{\alpha} = -1\ \boldsymbol{\alpha}$

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{\alpha} &= -1\ \boldsymbol{\alpha}\\ &= -1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\end{aligned}$$

$= (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$

Akibatnya,

$\boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\alpha}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$

$= (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), \ldots, x_n + (-x_n))$

$= (0, 0, \ldots, 0)$

$= \mathbf{0}$

Jadi, untuk setiap $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$ terdapat sebuah $-\boldsymbol{\alpha} \in V$ sehingga $\boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$.

Akan ditunjukan pada operasi perkalian skalar, dimana setiap skalar $c \in \boldsymbol{F}$ dan vektor $\boldsymbol{\alpha} \in V$ berlaku $c\,\boldsymbol{\alpha} \in V$, disebut perkalian c dan $\boldsymbol{\alpha}$. Dalam hal ini berlaku :

1. $1\,\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$

   Perhatikan bahwa :

   $1\,\boldsymbol{\alpha} = 1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

   $= (1x_1, 1x_2, \ldots, 1x_n)$

   $= (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

   $= \boldsymbol{\alpha}$

2. $(c_1c_2)\,\boldsymbol{\alpha} = c_1(c_2\,\boldsymbol{\alpha})$

   $(c_1c_2)\,\boldsymbol{\alpha} = (c_1c_2)(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

   $= [(c_1c_2)x_1, (c_1c_2)x_2, \ldots, (c_1c_2)x_n]$

   $= [c_1(c_2x_1), c_1(c_2x_2), \ldots, c_1(c_2x_n)]$

   $= [c_1(c_2(x_1, x_2, \ldots, x_n))]$

   $= c_1(c_2\,\boldsymbol{\alpha})$

3. $c(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = c\,\boldsymbol{\alpha} + c\,\boldsymbol{\beta}$

   $c(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = c[(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)]$

$= c[x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n]$

$= [c(x_1 + y_1), c(x_2 + y_2), \ldots, c(x_n + y_n)]$

$= (cx_1 + cy_1, cx_2 + cy_2, \ldots, cx_n + cy_n)$

$= (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n) + (cy_1, cy_2, \ldots, cy_n)$

$= c(x_1, x_2, \ldots, x_n) + c(y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$= c\,\boldsymbol{\alpha} + c\,\boldsymbol{\beta}$

4. $(c_1 + c_2)\,\boldsymbol{\alpha} = c_1\,\boldsymbol{\alpha} + c_2\,\boldsymbol{\alpha}$

$(c_1 + c_2)\,\boldsymbol{\alpha} = (c_1 + c_2)(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$= (c_1x_1, c_1x_2, \ldots, c_1x_n) + (c_2x_1, c_2x_2, \ldots, c_2x_n)$

$= c_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + c_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$= c_1\,\boldsymbol{\alpha} + c_2\,\boldsymbol{\alpha}$

Definisi 2. 4. 2(Jacob, 1990)

Misalkan V ruang vektor atas lapangan $\boldsymbol{F}$, vektor $\mathbf{w}$ di V dikatakan kombinasi linear dari vektor – vektor $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ di V, apabila terdapat skalar – skalar $c_1, c_2, \ldots, c_n$ di $\boldsymbol{F}$ sedemikian sehingga :

$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \ldots + c_n\mathbf{v_n}$

Himpunan semua kombinasi linear dari vektor – vektor $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ disebut **Span** dari $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ yang ditulis sebagai $\mathbf{Span}(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n})$.

<u>**Contoh 2. 4. 2**</u>

Diberikan vektor – vektor sebagai berikut :

$\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ dan $\mathbf{v} = (6, 4, 2)$ di $\mathbb{R}^3$. Tunjukan bahwa $\mathbf{w} = (9, 2, 7)$ adalah kombinasi linear dari $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$.

Penyelesaian :

Pandang persamaan

$\mathbf{w} = k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v}$ ....(1)

maka :

$(9, 2, 7) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$

Sehingga diperoleh :

(i) $k_1 + 6k_2 = 9$

(ii) $2k_1 + 4k_2 = 2$

(iii) $-k_1 + 2k_2 = 7$

Dengan memecahkan persoalan ini menggunakan SPL maka diperoleh $k_1 = -3$ dan $k_2 = 2$ sehingga :

$\mathbf{w} = -3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$

Definisi 2. 4. 3(Jacob, 1990)

Misalkan V ruang vektor atas lapangan F, $W \subseteq V$ dan $W \neq \emptyset$. W disebut subruang dari V, jika W membentuk ruang vektor atas lapangan F terhadap operasi penjumlahan dan perkalian pada V.

Teorema 2. 4. 1(Hoofman, 1971)

Misalkan V ruang vektor atas lapangan F, $W \subseteq V$ dan $W \neq \emptyset$. W subruang dari V jika dan hanya jika setiap $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$ dan $c \in F$ berlaku $c\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W$.

Bukti :

Misalkan $\boldsymbol{V}$ ruang vektor atas lapangan $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{W} \subseteq \boldsymbol{V}$ dan $\boldsymbol{W} \neq \emptyset$.

($\rightarrow$) Misalkan $\boldsymbol{W}$ subruang dari $\boldsymbol{V}$

Akan ditunjukan bahwa untuk setiap $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \boldsymbol{W}$ dan $c \in \boldsymbol{F}$ berlaku $c\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \boldsymbol{W}$.

Ambil $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \boldsymbol{W}$ dan $c \in \boldsymbol{F}$.

Maka, $c\mathbf{v} \in \boldsymbol{W}$ ($\boldsymbol{W}$ tertutup terhadap perkalian skalar).

$c\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \boldsymbol{W}$ ($\boldsymbol{W}$ tertutup terhadap penjumlahan vektor).

Karena $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \boldsymbol{W}$ dan $c \in \boldsymbol{F}$ diambil sebarang maka untuk setiap $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \boldsymbol{W}$ dan $\mathbf{c} \in \boldsymbol{F}$ berlaku $c\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \boldsymbol{W}$.

($\leftarrow$) Misalkan untuk setiap $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \boldsymbol{W}$ dan $c \in \boldsymbol{F}$ berlaku $c\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \boldsymbol{W}$.

Akan ditunjukan bahwa $\boldsymbol{W}$ subruang dari $\boldsymbol{V}$, yaitu cukup dengan menunjukan :

a. Untuk setiap $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \boldsymbol{W}$ maka $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \boldsymbol{W}$.
b. $\mathbf{0} \in \boldsymbol{W}$.
c. Untuk setiap $\mathbf{v} \in \boldsymbol{W}$ dan $c \in \boldsymbol{F}$ maka $c\mathbf{v} \in \boldsymbol{W}$.
d. Untuk setiap $\mathbf{v} \in \boldsymbol{W}$ maka $-\mathbf{v} \in \boldsymbol{W}$.

a. Ambil $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \boldsymbol{W}$ dan $c \in \boldsymbol{F}$ dengan $c = 1$.

Maka, $\mathbf{v} + \mathbf{w} = 1\mathbf{v} + \mathbf{w}$

$= c\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \boldsymbol{W}$ (Premis).

Jadi, $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W$ untuk setiap $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$.

b. Ambil $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$ dengan $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ dan $c \in F$ dengan $c = -1$.

Maka, $\mathbf{0} = -1\mathbf{u} + \mathbf{u}$

$= c\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W$ (Premis)

Jadi, $\mathbf{0} \in W$.

c. Ambil $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$ dengan $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ dan $c \in F$.

Maka, $c\mathbf{v} = c\mathbf{v} + \mathbf{0}$

$= c\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W$ (Premis).

Jadi $c\mathbf{v} \in W$ untuk setiap $\mathbf{v} \in W$ dan $c \in F$.

d. Ambil $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$ dengan $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ dan $c \in F$ dengan $c = -1$.

Maka, $-\mathbf{v} = -\mathbf{v} + \mathbf{0}$

$= -1\mathbf{v} + \mathbf{w}$

$= c\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W$ (Premis).

Jadi, $-\mathbf{v} \in W$ untuk setiap $\mathbf{v} \in W$.

2. 5 Bebas Linear

Definisi 2. 5. 1(Jacob, 1990)

Misalkan $\mathbf{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ adalah himpunan vektor. Jika persamaan vektor $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ hanya mempunyai satu pemecahan yaitu $k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots, k_n = 0$ maka $\mathbf{S}$ dikatakan bebas linear.

<u>Contoh 2. 5. 1</u>

Tentukan apakah vektor – vektor

$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$ $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0)$ $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$

Membentuk himpunan bebas linear.

Penyelesaian :

Pandang persamaan $k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + k_3\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$ ....(2)

$k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1) = \mathbf{0}$

Diperoleh :

(i) $k_1 = 0$

(ii) $k_2 = 0$

(iii) $k_3 = 0$

Karena persamaan (2) hanya dipenuhi dengan $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$ maka $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, dan $\mathbf{v_3}$ bebas linear.

2. 6 Bergantung Linear

Definisi 2. 6. 1(Jacob, 1990)

Misalkan $\mathbf{S} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ adalah himpunan vektor. Jika persamaan vektor $k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + \ldots + k_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0}$ mempunyai pemecahan selain $k_1 = 0$, $k_2 = 0, \ldots, k_n = 0$, maka **S** dikatakan bergantung linear.

2. 7 Membangun

Definisi 2. 7. 1(Anton, 2004)

Jika $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ adalah vektor – vektor pada ruang vektor V dan jika masing – masing vektor pada V dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ maka dinyatakan vektor – vektor ini membangun V.

2. 8 Basis

Definisi 2. 8. 1(Jacob, 1990)

Misalkan V ruang vektor atas lapangan F dan $\mathbf{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\} \subseteq V$. **B** disebut basis dari V jika :

1. **B** bebas linear.

2. ***B*** membangun ***V*** (**Span(B)** = ***V***).

B disebut basis baku dari ***V*** jika $\mathbf{v_1}$ = (1, 0, …, 0), $\mathbf{v_2}$ = (0, 1, …, 0), …, $\mathbf{v_n}$ = (0, 0, …, 1).

<u>Contoh 2. 8. 1</u>

Misalkan **A** = $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ adalah vektor – vektor di R^2. Apakah **A** merupakan basis untuk R^2.

Penyelesaian :

1. Akan ditunjukan **A** bebas linear

   Pandang kombinasi linear $k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} = \mathbf{0}$

   Maka $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k_1 - k_2\\k_1 + k_2\end{pmatrix}$

   Sehingga diperoleh :

   (i) $k_1 - k_2 = 0$

   (ii) $k_1 + k_2 = 0$

   Dengan mengeliminasi persamaan (i) dan (ii) maka diperoleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$. Jadi kombinasi linear $k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} = \mathbf{0}$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$. Dengan kata lain **A** bebas linear.

2. Akan ditujukkan **A** membangun R^2.

   Ambil $\mathbf{w} \in R^2$ maka $\mathbf{w} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

   Perhatikan bahwa :

$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2}$

$\binom{a}{b} = k_1\binom{1}{1} + k_2\binom{-1}{1}$

$\binom{a}{b} = \binom{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$

Diperoleh :

(i) $k_1 - k_2 = a$

(ii) $k_1 + k_2 = b$

Dengan menggunakan SPL diperoleh $k_1 = \frac{a+b}{2}$ dan $k_2 = \frac{a-b}{2}$

Jadi vektor – vektor tersebut membangun di R^2.

Dari 1 dan 2 dapat disimpulakan bahwa **A** merupakan basis dari R^2.

Lemma 2. 8. 1(Hoofman, 1971)

Misalkan V ruang vektor atas lapangan F, $\mathbf{B} \subseteq V$, B himpunan bebas linear, dan $\mathbf{w} \in V$ dengan $\mathbf{w} \notin$ Span(B). Maka $\mathbf{B} \cup \{\mathbf{w}\}$ bebas linear.

Bukti :

Misalkan V ruang vektor atas lapangan F, $\mathbf{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ dengan vektor – vektor $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ di V bebas linear.

Ambil $\mathbf{w} \in V$ dan $\mathbf{w} \notin$ **Span(B)**. Akan ditunjukan bahwa $\mathbf{B} \cup \{\mathbf{w}\}$ bebas linear.

Pandang persamaan :

$\mathbf{0} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \ldots + c_n\mathbf{v_n} + \mathbf{bw}$ ……………..………………….(3)

Untuk suatu $c_1, c_2, \ldots, c_n, b \subseteq \boldsymbol{F}$

Akan ditunjukan bahwa persamaan (3) hanya dipenuhi oleh $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = b = \mathbf{0}$.

Andaikan $b \neq \mathbf{0}$ maka,

$$\mathbf{w} = \left(\frac{-c_1}{b}\right)\mathbf{v_1} + \left(\frac{-c_2}{b}\right)\mathbf{v_2} + \ldots + \left(\frac{-c_n}{b}\right)\mathbf{v_n}$$

Ini berarti $\mathbf{w} \in \mathbf{Span(B)}$. Jadi haruslah $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Sehingga persamaan (3) menjadi $\mathbf{0m} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \ldots + c_n\mathbf{v_n}$. Karena $\mathbf{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ bebas linear maka $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = b = \mathbf{0}$. Ini berarti $\mathbf{B} \cup \{\mathbf{w}\}$ bebas linear.

2. 9 Dimensi

Definisi 2. 9. 1(Anton, 2004)

Dimensi sebuah ruang vektor V yang berdimensi berhingga didefinisikan sebagai banyaknya vektor pada basis untuk V. tambahan lagi, kita mendefinisikan ruang vektor nol mempunyai dimensi nol.

<u>**Contoh 2. 9. 1**</u>

Tentukan dimensi untuk ruang pemecahan dari sistem homogen berikut :

$2x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad + x_5 = 0$

$-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0$

$\qquad x_3 + x_4 + x_5 = 0$

matriks yang diperbesar untuk sistem tersebut adalah :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks ini menjadi bentuk eselon baris tereduksi maka didaptkan :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan yang bersesuaian adalah

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \qquad\quad x_5 &= 0 \\ x_3 + \quad x_5 &= 0 \\ x_4 \quad &= 0 \end{aligned}$$

dengan memecahkannya untuk peubah – peubah utama maka akan menghasilkan :

$x_1 = -x_2 - x_5$

$x_3 = -x_5$

$x_4 = 0$

Misalkan $x_2 = t$ dan $x_5 = s$

Maka himpunan penyelesaiannya adalah :

$x_1 = -t - s$

$x_3 = -s$

$x_4 = 0$

Sehingga vektor – vektor pemecahan tersebut dapat dituliskan sebagai :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t-s \\ t \\ -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Yang memperlihatkan bahwa vektor – vektor

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Merentang ruang pemecahan tersebut. Karena vektor – vektor tersebut juga bebas linear, maka $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ adalah sebuah basis dan ruang pemecahan tersebut adalah ruang berdimensi dua.

BAB III
PEMBAHASAN

Pada Bab ini akan dijabarkan tentang sifat – sifat dari ruang vektor $\mathbb{Z}_3^2$.

Definisi 3. 1(Arnawa, 2008)

$\mathbb{R}$ dikatakan lapangan jika $\mathbb{R}$ merupakan gelanggang komutatif dan $\mathbb{R}$ - $\{0\}$ membentuk group terhadap operasi perkalian.

Teorema 3. 1

$\mathbb{Z}_3$ merupakan lapangan terhadap operasi $+_3$ dan $\cdot_3$.

<u>Bukti :</u>

$\mathbb{Z}_3$ dikatakan lapangan jika:

1. $\mathbb{Z}_3$ group komutatif terhadap operasi $+_3$.
2. $\mathbb{Z}_3$ terhadap operasi $\cdot_3$ bersifat tutup dan asosiatif.
3. $\mathbb{Z}_3$ terhadap operasi $+_3$ dan $\cdot_3$ bersifat distributif.
4. $\mathbb{Z}_3 - \{0\}$ membentuk group terhadap operasi perkalian.

$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

Penjumlahan modulo 3

$+3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

1. Akan ditunjukan bahwa $\mathbb{Z}_3$ membentuk group komutatif terhadap operasi $+_3$ yaitu :

   a. Akan ditunjukan bahwa untuk setiap a, b $\in \mathbb{Z}_3$ berlaku a $+_3$ b $\in \mathbb{Z}_3$.

      Dari tabel penjumlahan modulo 3 dapat dilihat bahwa untuk setiap a, b $\in \mathbb{Z}_3$ berlaku a $+_3$ b $\in \mathbb{Z}_3$.

   b. Akan ditunjukan untuk setiap a, b, c $\in \mathbb{Z}_3$ berlaku :

      $a +_3 (b +_3 c) = (a +_3 b) +_3 c$

      Ambil a = 0, b = 1, dan c = 2 $\in \mathbb{Z}_3$.

      Perhatikan bahwa :

      a) $0 +_3 (1 +_3 2) = 0 +_3 0$

         $= 0$

      b) $(0 +_3 1) +_3 2 = 1 +_3 2$

         $= 0$

Ambil $a = 2$, $b = 1$, dan $c = 2 \in \mathbb{Z}_3$.

Perhatikan bahwa :

a) $2 +_3 (1 +_3 2) = 2 +_3 0$

$= 2$

b) $(2 +_3 1) +_3 2 = 0 +_3 2$

$= 2$

Ambil $a = 1$, $b = 2$, dan $c = 1 \in \mathbb{Z}_3$.

Perhatikan bahwa :

a) $1 +_3 (2 +_3 1) = 1 +_3 0$

$= 1$

b) $(1 +_3 2) +_3 1 = 0 +_3 1$

$= 1$

Jadi untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$ berlaku $a +_3 (b +_3 c) = (a +_3 b) +_3 c$.

c. Akan ditunjukan untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_3$ terdapat $e \in \mathbb{Z}_3$ sehingga $a +_3 e = a$.

Dari tabel penjumlahan modulo 3 dapat dilihat bahwa ada $e = 0$ sehingga $a +_3 0 = 0 +_3 a = a$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_3$.

d. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_3$ ada $b \in \mathbb{Z}_3$ sehingga $a +_3 b = b +_3 a = e$ (setiap unsur di $\mathbb{Z}_3$ punya invers).

Perhatikan bahwa :

a) Invers dari 0 adalah 0

b) Invers dari 1 adalah 1

c) Invers dari 2 adalah 2

Jadi dari (a), (b), (c), dan (d) dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}_3$ membentuk group komutatif terhadap operasi $+_3$.

2. Akan ditunjukan bahwa $\mathbb{Z}_3$ terhadap operasi $\cdot_3$ bersifat tertutup dan asosiatif.

   Perkalian modulo 3

$\cdot_3$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

   a. Akan ditunjukan bahwa untuk setiap a, b $\in \mathbb{Z}_3$ berlaku a $\cdot_3$ b $\in \mathbb{Z}_3$.

      1) Ambil a = 0 dan b = 0 $\in \mathbb{Z}_3$

         Perhatikan bahwa :

         $a \cdot_3 b = 0 \cdot_3 0 = 0 \in \mathbb{Z}_3$

      2) Ambil a = 0 dan b = 1 $\in \mathbb{Z}_3$

         Perhatikan bahwa :

         $a \cdot_3 b = 0 \cdot_3 1 = 0 \in \mathbb{Z}_3$

      3) Ambil a = 0 dan b = 2 $\in \mathbb{Z}_3$

         Perhatikan bahwa :

         $a \cdot_3 b = 0 \cdot_3 2 = 0 \in \mathbb{Z}_3$

      4) Ambil a = 1 dan b = 1 $\in \mathbb{Z}_3$

         Perhatikan bahwa :

         $a \cdot_3 b = 1 \cdot_3 1 = 1 \in \mathbb{Z}_3$

      5) Ambil a = 1 dan b =2 $\in \mathbb{Z}_3$

Perhatikan bahwa :

$a \cdot_3 b = 1 \cdot_3 2 = 2 \in \mathbb{Z}_3$

6) Ambil $a = 2$ dan $b = 2 \in \mathbb{Z}_3$

Perhatikan bahwa :

$a \cdot_3 b = 2 \cdot_3 2 = 1 \in \mathbb{Z}_3$

Jadi untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_3$ berlaku $a \cdot_3 b \in \mathbb{Z}_3$.

b. Akan ditunjukan bahwa untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$ berlaku :

$(a \cdot_3 b) \cdot_3 c = a \cdot_3 (b \cdot_3 c) \in \mathbb{Z}_3$

1) Ambil $a = 1, b = 1, c = 2 \in \mathbb{Z}_3$

Perhatikan bahwa :

i. $(1 \cdot_3 1) \cdot_3 2 = 2 \in \mathbb{Z}_3$

ii. $1 \cdot_3 (1 \cdot_3 2) = 2 \in \mathbb{Z}_3$

2) Ambil $a = 2, b = 2, c = 2 \in \mathbb{Z}_3$

Perhatikan bahwa :

i. $(2 \cdot_3 2) \cdot_3 2 = 2 \in \mathbb{Z}_3$

ii. $2 \cdot_3 (2 \cdot_3 2) = 2 \in \mathbb{Z}_3$

Jadi untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$ berlaku $(a \cdot_3 b) \cdot_3 c = a \cdot_3 (b \cdot_3 c) \in \mathbb{Z}_3$.

Jadi dari (a) dan (b) dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}_3$ terhadap operasi $\cdot_3$ bersifat tertutup dan asosiatif.

3. Akan ditunjukan bahwa $\mathbb{Z}_3$ distributif terhadap operasi $+_3$ dan $\cdot_3$ yaitu akan ditunjukan bahwa untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$ berlaku :

$a \cdot_3 (b +_3 c) = a \cdot_3 b +_3 a \cdot_3 c \in \mathbb{Z}_3$

Ambil $a = 1, b = 2, c = 0 \in \mathbb{Z}_3$

Perhatikan bahwa :

a. $1 \cdot_3 (2 +_3 0) = 1 \cdot_3 2 = 2 \in \mathbb{Z}_3$

b. $1 \cdot_3 2 +_3 1 \cdot_3 0 = 2 +_3 0 = 2 \in \mathbb{Z}_3$

4. Akan ditunjukan bahwa $\mathbb{Z}_3 - \{0\}$ membentuk group terhadap operasi perkalian.

$\cdot_3$	1	2
1	1	2
2	2	1

a. Akan ditunjukan bahwa untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_3$ berlaku $a \cdot_3 b \in \mathbb{Z}_3$

   Dari tabel dapat dilihat bahwa untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_3$ berlaku $a \cdot_3 b \in \mathbb{Z}_3$.

b. Akan ditunjukan untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$ berlaku :

   $a \cdot_3 (b \cdot_3 c) = (a \cdot_3 b) \cdot_3 c \in \mathbb{Z}_3$

   Ambil $a = 2, b = 1 , c = 2 \in \mathbb{Z}_3$

   Perhatikan bahwa :

   1) $2 \cdot_3 (1 \cdot_3 2) = 2 \cdot_3 2 = 1$

   2) $(2 \cdot_3 1) \cdot_3 2 = 2 \cdot_3 2 = 1$

   Ambil $a = 1, b = 2 , c = 1 \in \mathbb{Z}_3$

   Perhatikan bahwa :

   1) $1 \cdot_3 (2 \cdot_3 1) = 1 \cdot_3 2 = 2$

   2) $(1 \cdot_3 2) \cdot_3 1 = 2 \cdot_3 1 = 2$

Jadi untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$ berlaku $a \cdot_3 (b \cdot_3 c) = (a \cdot_3 b) \cdot_3 c \in \mathbb{Z}_3$.

c. Akan ditunjukan untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_3$ terdapat $e \in \mathbb{Z}_3$ sehingga $a \cdot_3 e = a$.

Dari tabel dapat dilihat bahwa ada $e = 1 \in \mathbb{Z}_3$ sehingga

$a \cdot_3 1 = 1 \cdot_3 a = a \in \mathbb{Z}_3$

d. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_3$ ada $b \in \mathbb{Z}_3$ sehingga $a +_3 b = b +_3 a = e$ (setiap unsur di $\mathbb{Z}_3$ mempunyai invers).

Perhatikan bahwa :

1) Invers dari 1 adalah 1

2) Invers dari 2 adalah 2

Karena (a), (b), (c), dan (d) maka $\mathbb{Z}_3 - \{0\}$ membentuk group terhadap operasi $\cdot_3$.

Dari (1), (2), dan (3) dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}_3$ merupakan lapangan.

Teorema 3. 2

$\mathbb{Z}_3^2$ merupakan ruang vektor atas lapangan $\mathbb{Z}_3$.

<u>Bukti :</u>

$\mathbb{Z}_3^2$ dikatakan ruang vektor apabila memenuhi aksioma berikut :

1. Untuk semua $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{Z}_3^2$ berlaku :

   a. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{Z}_3^2$.

   b. $\vec{\mathbf{0}} + \mathbf{v} = \mathbf{v} \in \mathbb{Z}_3^2$

   c. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \in \mathbb{Z}_3^2$

   d. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \in \mathbb{Z}_3^2$

2. Untuk semua $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{Z}_3^2$ dan $r, s \in \mathbb{Z}_3$ berlaku :

a. $\mathbf{rv} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

b. $1\mathbf{v} = \mathbf{v} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

c. $0\mathbf{v} = \mathbf{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

d. $\mathrm{r}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathrm{r}\mathbf{u} + \mathbf{rv} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

e. $(\mathrm{r} + \mathrm{s})\mathbf{v} = \mathbf{rv} + \mathbf{sv} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

f. $(\mathrm{rs})\mathbf{v} = \mathrm{r}(\mathrm{s}\mathbf{v}) \in \mathbb{Z}_3{}^2$

$+_3$	$\binom{0}{0}$	$\binom{0}{1}$	$\binom{0}{2}$	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{1}{2}$	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$
$\binom{0}{0}$	$\binom{0}{0}$	$\binom{0}{1}$	$\binom{0}{1}$	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{1}{2}$	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$
$\binom{0}{1}$	$\binom{0}{1}$	$\binom{0}{2}$	$\binom{0}{0}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{1}{2}$	$\binom{1}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$	$\binom{2}{0}$
$\binom{0}{2}$	$\binom{0}{2}$	$\binom{0}{0}$	$\binom{0}{1}$	$\binom{1}{2}$	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{2}{2}$	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$
$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{1}{2}$	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$	$\binom{0}{0}$	$\binom{0}{1}$	$\binom{0}{2}$
$\binom{1}{1}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{1}{2}$	$\binom{1}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$	$\binom{2}{0}$	$\binom{0}{1}$	$\binom{0}{2}$	$\binom{0}{0}$
$\binom{1}{2}$	$\binom{1}{2}$	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{2}{2}$	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{0}{2}$	$\binom{0}{0}$	$\binom{0}{1}$
$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$	$\binom{0}{0}$	$\binom{0}{1}$	$\binom{0}{2}$	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{1}{2}$
$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$	$\binom{2}{0}$	$\binom{0}{1}$	$\binom{0}{2}$	$\binom{0}{0}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{1}{2}$	$\binom{1}{0}$
$\binom{2}{2}$	$\binom{2}{2}$	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{0}{2}$	$\binom{0}{0}$	$\binom{0}{1}$	$\binom{1}{2}$	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$

1. Akan ditunjukan untuk setiap **u**, **v**, **w** $\in \mathbb{Z}_3^{\,2}$ berlaku :

   a. $\mathbf{u} +_3 \mathbf{v} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

   Ambil unsur dari $\mathbb{Z}_3^{\,2}$:

   1) $\mathbf{u} = \binom{2}{2}$ dan $\mathbf{v} = \binom{0}{0}$

      $\mathbf{u} +_3 \mathbf{v} = \binom{2}{2} +_3 \binom{0}{0} = \binom{2}{2} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

   2) $\mathbf{u} = \binom{0}{1}$ dan $\mathbf{v} = \binom{1}{2}$

      $\mathbf{u} +_3 \mathbf{v} = \binom{0}{1} +_3 \binom{1}{2} = \binom{1}{0} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

   3) $\mathbf{u} = \binom{2}{1}$ dan $\mathbf{v} = \binom{0}{1}$

      $\mathbf{u} +_3 \mathbf{v} = \binom{2}{1} +_3 \binom{0}{1} = \binom{2}{2} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

   4) $\mathbf{u} = \binom{1}{1}$ dan $\mathbf{v} = \binom{1}{0}$

      $\mathbf{u} +_3 \mathbf{v} = \binom{1}{1} +_3 \binom{1}{0} = \binom{2}{1} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

   Dari tabel juga dapat dilihat bahwa untuk setiap **u**, **v** $\in \mathbb{Z}_3^{\,2}$ berlaku $\mathbf{u} +_3 \mathbf{v} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$.

   b. $\binom{0}{0} +_3 \mathbf{v} = \mathbf{v} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

   1) $\binom{0}{0} +_3 \binom{0}{0} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

   2) $\binom{0}{0} +_3 \binom{0}{1} = \binom{0}{1} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

   3) $\binom{0}{0} +_3 \binom{0}{2} = \binom{0}{2} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

   4) $\binom{0}{0} +_3 \binom{1}{0} = \binom{1}{0} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

5) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

6) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

7) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

8) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

9) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

c. $\mathbf{u} +_3 \mathbf{v} = \mathbf{v} +_3 \mathbf{u} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

Ambil $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

1) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\mathbf{u} +_3 \mathbf{v} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \mathbf{v} +_3 \mathbf{u}$

2) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

$\mathbf{u} +_3 \mathbf{v} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \mathbf{v} +_3 \mathbf{u}$

3) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$\mathbf{u} +_3 \mathbf{v} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \mathbf{v} +3\ \mathbf{u}$

4) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\mathbf{u} +_3 \mathbf{v} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \mathbf{v} +_3 \mathbf{u}$

5) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\mathbf{u} +_3 \mathbf{v} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \mathbf{v} +_3 \mathbf{u}$

d. $\mathbf{u} +_3 (\mathbf{v} +_3 \mathbf{w}) = (\mathbf{u} +_3 \mathbf{v}) +_3 \mathbf{w} \in \mathbb{Z}_3^2$

1) ambil $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{Z}_3^2$

$\mathbf{u} = \binom{1}{1}$, $\mathbf{v} = \binom{2}{1}$, dan $\mathbf{w} = \binom{0}{1}$

a) $\binom{1}{1} +_3 \left(\binom{2}{1} +_3 \binom{0}{1}\right) = \binom{1}{1} +_3 \binom{2}{2} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3^2$

b) $\left(\binom{1}{1} +_3 \binom{2}{1}\right) +_3 \binom{0}{1} = \binom{0}{2} +_3 \binom{0}{1} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3^2$

2) ambil $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{Z}_3^2$

$\mathbf{u} = \binom{1}{2}$, $\mathbf{v} = \binom{0}{2}$, dan $\mathbf{w} = \binom{0}{0}$

a) $\binom{1}{2} +_3 \left(\binom{0}{2} +_3 \binom{0}{0}\right) = \binom{1}{2} +_3 \binom{0}{2} = \binom{1}{1} \in \mathbb{Z}_3^2$

b) $\left(\binom{1}{2} +_3 \binom{0}{2}\right) +_3 \binom{0}{0} = \binom{1}{1} +_3 \binom{0}{0} = \binom{1}{1} \in \mathbb{Z}_3^2$

3) ambil $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{Z}_3^2$

$\mathbf{u} = \binom{2}{2}$, $\mathbf{v} = \binom{2}{0}$, dan $\mathbf{w} = \binom{1}{2}$

a) $\binom{2}{2} +_3 \left(\binom{2}{0} +_3 \binom{1}{2}\right) = \binom{2}{2} +_3 \binom{0}{2} = \binom{2}{1} \in \mathbb{Z}_3^2$

b) $\left(\binom{2}{2} +_3 \binom{2}{0}\right) +_3 \binom{1}{2} = \binom{1}{2} +_3 \binom{1}{2} = \binom{2}{1} \in \mathbb{Z}_3^2$

2. Akan ditunjukan untuk semua u, v $\in \mathbb{Z}_3^2$ dan r, s $\in \mathbb{Z}_3$ berlaku :

a. $\mathbf{rv} \in \mathbb{Z}_3^2$

Ambil r = 0

1) $\mathbf{rv} = 0\binom{0}{0} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3^2$

2) $\mathbf{rv} = 0\binom{0}{1} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3^2$

3) $\mathbf{rv} = 0\binom{0}{2} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

4) $\mathbf{rv} = 0\binom{1}{0} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

5) $\mathbf{rv} = 0\binom{1}{1} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

6) $\mathbf{rv} = 0\binom{1}{2} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

7) $\mathbf{rv} = 0\binom{2}{0} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

8) $\mathbf{rv} = 0\binom{2}{1} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

9) $\mathbf{rv} = 0\binom{2}{2} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

Ambil r = 1

1) $\mathbf{rv} = 1\binom{0}{0} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

2) $\mathbf{rv} = 1\binom{0}{1} = \binom{0}{1} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

3) $\mathbf{rv} = 1\binom{0}{2} = \binom{0}{2} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

4) $\mathbf{rv} = 1\binom{1}{0} = \binom{1}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

5) $\mathbf{rv} =1\binom{1}{1} = \binom{1}{1} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

6) $\mathbf{rv} = 1\binom{1}{2} = \binom{1}{2} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

7) $\mathbf{rv} = 1\binom{2}{0} = \binom{2}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

8) $\mathbf{rv} = 1\binom{2}{1} = \binom{2}{1} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

9) $\mathbf{rv} = 1\binom{2}{2} = \binom{2}{1} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

Ambil r = 2

1) $\mathbf{rv} = 2\binom{0}{0} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

2) $\mathbf{rv} = 2\binom{0}{1} = \binom{0}{2} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

3) $\mathbf{rv} = 2\binom{0}{2} = \binom{0}{1} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

4) $\mathbf{rv} = 2\binom{1}{0} = \binom{2}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

5) $\mathbf{rv} = 2\binom{1}{1} = \binom{2}{2} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

6) $\mathbf{rv} = 2\binom{1}{2} = \binom{2}{1} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

7) $\mathbf{rv} = 2\binom{2}{0} = \binom{1}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

8) $\mathbf{rv} = 2\binom{2}{1} = \binom{1}{2} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

9) $\mathbf{rv} = 2\binom{2}{2} = \binom{1}{1} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

b. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

1) $1\mathbf{v} = 1\binom{0}{0} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

2) $1\mathbf{v} = 1\binom{0}{1} = \binom{0}{1} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

3) $1\mathbf{v} = 1\binom{0}{2} = \binom{0}{2} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

4) $1\mathbf{v} = 1\binom{1}{0} = \binom{1}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

5) $1\mathbf{v} = 1\binom{1}{1} = \binom{1}{1} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

6) $1\mathbf{v} = 1\binom{1}{2} = \binom{1}{2} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

7) $1\mathbf{v} = 1\binom{2}{0} = \binom{2}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

8) $1\mathbf{v} = 1\binom{2}{1} = \binom{2}{1} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

9) $1\mathbf{v} = 1\binom{2}{2} = \binom{2}{2} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

c. $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$

1) $0\mathbf{v} = 0\binom{0}{0} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

2) $0\mathbf{v} = 0\binom{0}{1} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

3) $0\mathbf{v} = 0\binom{0}{2} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

4) $0\mathbf{v} = 0\binom{1}{0} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

5) $0\mathbf{v} = 0\binom{1}{1} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

6) $0\mathbf{v} = 0\binom{1}{2} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

7) $0\mathbf{v} = 0\binom{2}{0} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

8) $0\mathbf{v} = 0\binom{2}{1} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

9) $0\mathbf{v} = 0\binom{2}{2} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

d. $r(\mathbf{u} +_3 \mathbf{v}) = r\mathbf{u} +_3 r\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

Ambil $r \in \mathbb{Z}_3$ dan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

1) untuk $r = 0$

a) $0\left\{\binom{0}{0} +_3 \binom{0}{1}\right\} = 0\binom{0}{0} +_3 0\binom{0}{1} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

b) $0\left\{\binom{0}{1} +_3 \binom{0}{2}\right\} = 0\binom{0}{1} +_3 0\binom{0}{1} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

c) $0\left\{\binom{1}{1} +_3 \binom{1}{2}\right\} = 0\binom{1}{1} +_3 0\binom{1}{2} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

2) Untuk r = 1

a) $1\left\{\binom{0}{0} +_3 \binom{0}{1}\right\} = 1\binom{0}{0} +_3 1\binom{0}{1} = \binom{0}{1} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

b) $1\left\{\binom{0}{0} +_3 \binom{0}{2}\right\} = 1\binom{0}{0} +_3 1\binom{0}{2} = \binom{0}{2} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

c) $1\left\{\binom{1}{0} +_3 \binom{1}{1}\right\} = 1\binom{1}{0} +_3 1\binom{1}{1} = \binom{2}{1} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

d) $1\left\{\binom{1}{1} +_3 \binom{1}{2}\right\} = 1\binom{1}{1} +_3 1\binom{1}{2} = \binom{2}{1} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

e) $1\left\{\binom{2}{0} +_3 \binom{2}{1}\right\} = 1\binom{2}{0} +_3 1\binom{2}{1} = \binom{1}{1} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

f) $1\left\{\binom{2}{1} +_3 \binom{2}{1}\right\} = 1\binom{2}{1} +_3 1\binom{2}{1} = \binom{1}{2} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

e. $(r +_3 s)\mathbf{v} = r\mathbf{v} +3\ s\mathbf{v}$

Ambil r, s $\in \mathbb{Z}_3$ dan $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

1) Untuk r = 0 dan s = 1

a) $(0 +_3 1)\binom{0}{0} = 0\binom{0}{0} +_3 1\binom{0}{0} = \binom{0}{0} +_3 \binom{0}{0} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

b) $(0 +_3 1)\binom{0}{1} = 0\binom{0}{1} +_3 1\binom{0}{1} = \binom{0}{0} +_3 \binom{0}{1} = \binom{0}{1} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

c) $(0 +_3 1)\binom{0}{2} = 0\binom{0}{2} +_3 1\binom{0}{2} = \binom{0}{0} +_3 \binom{0}{2} = \binom{0}{2} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

d) $(0 +_3 1)\binom{1}{0} = 0\binom{1}{0} +_3 1\binom{1}{0} = \binom{0}{0} +_3 \binom{1}{0} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

e) $(0 +_3 1)\binom{1}{1} = 0\binom{1}{1} +_3 1\binom{1}{1} = \binom{0}{0} +_3 \binom{1}{1} = \binom{1}{1} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

f) $(0 +_3 1)\binom{1}{2} = 0\binom{1}{2} +_3 1\binom{1}{2} = \binom{0}{0} +_3 \binom{1}{2} = \binom{1}{2} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

g) $(0 +_3 1)\binom{2}{0} = 0\binom{2}{0} +_3 1\binom{2}{0} = \binom{0}{0} +_3 \binom{2}{0} = \binom{2}{0} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

h) $(0 +_3 1)\binom{2}{1} = 0\binom{2}{1} +_3 1\binom{2}{1} = \binom{0}{0} +_3 \binom{2}{1} = \binom{2}{1} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

i) $(0 +_3 1)\binom{2}{2} = 0\binom{2}{2} +_3 1\binom{2}{2} = \binom{0}{0} +_3 \binom{2}{2} = \binom{2}{2} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}$

2) Untuk r = 1 dan s = 2

a) $(1 +_3 2)\binom{0}{0} = 1\binom{0}{0} +_3 2\binom{0}{0} = \binom{0}{0} +_3 \binom{0}{0} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

b) $(1 +_3 2)\binom{0}{1} = 1\binom{0}{1} +_3 2\binom{0}{1} = \binom{0}{1} +_3 \binom{0}{2} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

c) $(1 +_3 2)\binom{0}{2} = 1\binom{0}{2} +_3 2\binom{0}{2} = \binom{0}{2} +_3 \binom{0}{1} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

d) $(1 +_3 2)\binom{1}{0} = 1\binom{1}{0} +_3 2\binom{1}{0} = \binom{1}{0} +_3 \binom{1}{0} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

e) $(1 +_3 2)\binom{1}{1} = 1\binom{1}{1} +_3 2\binom{1}{1} = \binom{1}{1} +_3 \binom{2}{2} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

f) $(1 +_3 2)\binom{1}{2} = 1\binom{1}{2} +_3 2\binom{1}{2} = \binom{1}{2} +_3 \binom{2}{1} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

g) $(1 +_3 2)\binom{2}{0} = 1\binom{2}{0} +_3 2\binom{2}{0} = \binom{2}{0} +_3 \binom{1}{0} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

h) $(1 +_3 2)\binom{2}{1} = 1\binom{2}{1} +_3 2\binom{2}{1} = \binom{2}{1} +_3 \binom{1}{2} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

i) $(1 +_3 2)\binom{2}{2} = 1\binom{2}{2} +_3 2\binom{2}{2} = \binom{2}{2} +_3 \binom{1}{1} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

f. (rs)**v** = r(s**v**)

Ambil r, s ∈ $\mathbb{Z}_3$ dan **v** ∈ $\mathbb{Z}_3{}^2$

1) Untuk r = 0 dan s = 1

a) $(0.1)\binom{0}{0} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

$0\left\{1\binom{0}{0}\right\} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

b) $(0.1)\binom{0}{1} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

$0\left\{1\binom{0}{1}\right\} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

c) $(0.1)\binom{0}{2} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

$0\left\{1\binom{0}{2}\right\} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

d) $(0.1)\binom{1}{0} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

$0\left\{1\binom{1}{0}\right\} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

e) $(0.1)\binom{1}{1} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

$0\left\{1\binom{1}{1}\right\} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

f) $(0.1)\binom{1}{2} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

$0\left\{1\binom{1}{2}\right\} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

g) $(0.1)\binom{2}{0} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

$0\left\{1\binom{2}{0}\right\} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

h) $(0.1)\binom{2}{1} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

$0\left\{1\binom{2}{1}\right\} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

i) $(0.1)\binom{2}{2} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

$0\left\{1\binom{2}{2}\right\} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

2) Untuk r = 1 dan s = 2

a) $(1.2)\binom{0}{0} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

$1\left\{2\binom{0}{0}\right\} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

b) $(1.2)\binom{0}{1} = \binom{0}{2} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

$1\left\{2\binom{0}{1}\right\} = \binom{0}{2} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

c) $(1.2)\binom{0}{2} = \binom{0}{1} \in \mathbb{Z}_3{}^2$

$$1\left\{2\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}_3{}^2$$

d) $$(1.2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}_3{}^2$$

$$1\left\{2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}_3{}^2$$

e) $$(1.2)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}_3{}^2$$

$$1\left\{2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}_3{}^2$$

f) $$(1.2)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}_3{}^2$$

$$1\left\{2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}_3{}^2$$

g) $$(1.2)\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}_3{}^2$$

$$1\left\{2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}_3{}^2$$

h) $$(1.2)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}_3{}^2$$

$$1\left\{2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}_3{}^2$$

i) $$(1.2)\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}_3{}^2$$

$$1\left\{2\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}_3{}^2$$

Karena aksioma – aksioma (1) dan (2) terpenuhi maka dapat dikatakan bahwa $\mathbb{Z}_3{}^2$ merupakan ruang vektor atas lapangan $\mathbb{Z}_3$.

Teorema 3. 3

$V = \left\{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{0}{2}\right\}$, $W = \left\{\binom{0}{0}, \binom{1}{0}, \binom{2}{0}\right\}$, $X = \left\{\binom{0}{0}\right\}$, dan $Z = \left\{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{0}{2}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1}, \binom{1}{2}, \binom{2}{0}, \binom{2}{1}, \binom{2}{2}\right\}$ merupakan subruang dari ruang vektor $\mathbb{Z}_3^2$.

<u>**Bukti :**</u>

$V = \left\{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{0}{2}\right\}$, $W = \left\{\binom{0}{0}, \binom{1}{0}, \binom{2}{0}\right\}$, $X = \left\{\binom{0}{0}\right\}$, dan $Z = \left\{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{0}{2}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1}, \binom{1}{2}, \binom{2}{0}, \binom{2}{1}, \binom{2}{2}\right\}$ merupakan subruang dari ruang vektor $\mathbb{Z}_3^2$.

1. Akan ditunjukan bahwa $V = \left\{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{0}{2}\right\}$ subruang dari $\mathbb{Z}_3^2$ yaitu :

   a) $\left\{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{0}{2}\right\} \subset \mathbb{Z}_3^2$.

   b) $\left\{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{0}{2}\right\} \neq \emptyset$.

   c) Untuk setiap $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \left\{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{0}{2}\right\}$, $c \in \mathbb{Z}_3$ berlaku :

   $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} \in \left\{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{0}{2}\right\}$

   1) Akan ditunjukan bahwa $\left\{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{0}{2}\right\} \subset \mathbb{Z}_3^2$.

      $\mathbb{Z}_3^2 = \left\{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{0}{2}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1}, \binom{1}{2}, \binom{2}{0}, \binom{2}{1}, \binom{2}{2}\right\}$

      Maka dapat disimpulkan bahwa $V = \left\{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{0}{2}\right\} \subset \mathbb{Z}_3^2$.

   2) Akan ditunjukan bahwa $\left\{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{0}{2}\right\} \neq \emptyset$.

Jelas sekali bahwa $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\}$ merupakan unsur – unsur ruang vektor yang tak nol sehingga dapat disimpulkan bahwa $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\} \neq \emptyset$.

3) Akan diperiksa apakah setiap $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\}$, $c \in \mathbb{Z}_3$ berlaku $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\}$

a) Untuk c = 0

1) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 0\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 +_3 0\\0 +_3 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^2$.

2) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 0\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 +_3 0\\0 +_3 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^2$.

3) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 0\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 +_3 0\\0 +_3 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^2$.

4) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 +_3 0\\0 +_3 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^2$.

b) Untuk c = 1

1) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 1\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 +_3 0\\0 +_3 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^2$.

2) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 1\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 +_3 0\\0 +_3 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^2$.

3) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 +_3 0\\1 +_3 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^2$.

c) Untuk c = 2

1) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 2\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 +_3 0\\0 +_3 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^2$.

2) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 2\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 +_3 0\\0 +_3 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^2$.

3) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 +_3 0\\2 +_3 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^2$.

Dari (1), (2), dan (3) maka dapat disimpulkan bahwa $\left\{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{0}{2}\right\}$ merupakan subruang dari $\mathbb{Z}_3{}^2$.

2. Akan ditunjukan bahwa $\boldsymbol{W} = \left\{\binom{0}{0}, \binom{1}{0}, \binom{2}{0}\right\}$ subruang dari $\mathbb{Z}_3{}^2$ yaitu :

   a) $\left\{\binom{0}{0}, \binom{1}{0}, \binom{2}{0}\right\} \subset \mathbb{Z}_3{}^2$.

   b) $\left\{\binom{0}{0}, \binom{1}{0}, \binom{2}{0}\right\} \neq \emptyset$.

   c) Untuk setiap $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \left\{\binom{0}{0}, \binom{1}{0}, \binom{2}{0}\right\}$, $c \in \mathbb{Z}_3$ berlaku :

   $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} \in \left\{\binom{0}{0}, \binom{1}{0}, \binom{2}{0}\right\}$

   1) Akan ditunjukan bahwa $\left\{\binom{0}{0}, \binom{1}{0}, \binom{2}{0}\right\} \subset \mathbb{Z}_3{}^2$.

      $\mathbb{Z}_3{}^2 = \left\{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{0}{2}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1}, \binom{1}{2}, \binom{2}{0}, \binom{2}{1}, \binom{2}{2}\right\}$

      Maka dapat disimpulkan bahwa $\boldsymbol{W} = \left\{\binom{0}{0}, \binom{1}{0}, \binom{2}{0}\right\} \subset \mathbb{Z}_3{}^2$.

   2) Akan ditunjukan bahwa $\left\{\binom{0}{0}, \binom{1}{0}, \binom{2}{0}\right\} \neq \emptyset$.

      Jelas sekali bahwa $\left\{\binom{0}{0}, \binom{1}{0}, \binom{2}{0}\right\}$ merupakan unsur – unsur ruang vektor yang tak nol sehingga dapat disimpulkan bahwa $\left\{\binom{0}{0}, \binom{1}{0}, \binom{2}{0}\right\} \neq \emptyset$.

   3) Akan diperiksa apakah setiap $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta} \in \left\{\binom{0}{0}, \binom{1}{0}, \binom{2}{0}\right\}$, $c \in \mathbb{Z}_3$ berlaku $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} \in \left\{\binom{0}{0}, \binom{1}{0}, \binom{2}{0}\right\}$

      a) Untuk c = 0

         1) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 0\binom{0}{0} +_3 \binom{0}{0} = \binom{0}{0} +_3 \binom{0}{0} = \binom{0 +_3 0}{0 +_3 0} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2$.

2) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 0\binom{0}{0} +_3 \binom{1}{0} = \binom{0}{0} +_3 \binom{1}{0} = \binom{0 +_3 1}{0 +_3 0} = \binom{1}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2.$

3) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 0\binom{0}{0} +_3 \binom{2}{0} = \binom{0}{0} +_3 \binom{2}{0} = \binom{0 +_3 2}{0 +_3 0} = \binom{2}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2.$

4) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 0\binom{1}{0} +_3 \binom{2}{0} = \binom{0}{0} +_3 \binom{2}{0} = \binom{0 +_3 2}{0 +_3 0} = \binom{2}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2.$

b) Untuk c = 1

1) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 1\binom{0}{0} +_3 \binom{1}{0} = \binom{0}{0} +_3 \binom{1}{0} = \binom{0 +_3 1}{0 +_3 0} = \binom{1}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2.$

2) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 1\binom{0}{0} +_3 \binom{2}{0} = \binom{0}{0} +_3 \binom{2}{0} = \binom{0 +_3 2}{0 +_3 0} = \binom{2}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2.$

3) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 1\binom{1}{0} +_3 \binom{2}{0} = \binom{1}{0} +_3 \binom{2}{0} = \binom{1 +_3 2}{0 +_3 0} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2.$

c) Untuk c = 2

1) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 2\binom{0}{0} +_3 \binom{1}{0} = \binom{0}{0} +_3 \binom{1}{0} = \binom{0 +_3 1}{0 +_3 0} = \binom{1}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2.$

2) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 2\binom{0}{0} +_3 \binom{2}{0} = \binom{0}{0} +_3 \binom{2}{0} = \binom{0 +_3 2}{0 +_3 0} = \binom{2}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2.$

3) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 2\binom{1}{0} +_3 \binom{2}{0} = \binom{2}{0} +_3 \binom{2}{0} = \binom{2 +_3 2}{0 +_3 0} = \binom{1}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2.$

Dari (1), (2), dan (3) maka dapat disimpulkan bahwa $\left\{\binom{0}{0}, \binom{1}{0}, \binom{2}{0}\right\}$ merupakan subruang dari $\mathbb{Z}_3{}^2$.

3. Akan ditunjukan bahwa $\boldsymbol{X} = \left\{\binom{0}{0}\right\}$ subruang dari $\mathbb{Z}_3{}^2$ yaitu :

a) $\left\{\binom{0}{0}\right\} \subset \mathbb{Z}_3{}^2.$

b) $\left\{\binom{0}{0}\right\} \neq \emptyset.$

c) Untuk setiap $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \left\{\binom{0}{0}\right\}$, $c \in \mathbb{Z}_3$ berlaku $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} \in \left\{\binom{0}{0}\right\}$

1) Akan ditunjukan bahwa $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{Z}_3{}^2$.

$\mathbb{Z}_3{}^2 = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}$

Maka dapat disimpulkan bahwa $\boldsymbol{X} = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{Z}_3{}^2$.

2) Akan ditunjukan bahwa $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} \neq \emptyset$.

Jelas sekali bahwa $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$ merupakan unsur – unsur ruang vektor yang tak nol sehingga dapat disimpulkan bahwa $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} \neq \emptyset$.

3) Akan diperiksa apakah setiap $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$, c $\in \mathbb{Z}_3$ berlaku $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$

a) Untuk c = 0

1) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 0\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 +_3 0\\0 +_3 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3{}^2$.

b) Untuk c = 1

1) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 1\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 +_3 0\\0 +_3 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3{}^2$.

c) Untuk c = 2

1) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 2\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} +_3 \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 +_3 0\\0 +_3 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3{}^2$.

Dari (1), (2), dan (3) maka dapat disimpulkan bahwa $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$ merupakan subruang dari $\mathbb{Z}_3{}^2$.

4. Akan ditunjukan bahwa $\boldsymbol{Z} = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}$ subruang dari $\mathbb{Z}_3{}^2$ yaitu :

a) $\left\{\binom{0}{0},\binom{0}{1},\binom{0}{2},\binom{1}{0},\binom{1}{1},\binom{1}{2},\binom{2}{0},\binom{2}{1},\binom{2}{2}\right\} \subset \mathbb{Z}_3^{\,2}.$

b) $\left\{\binom{0}{0},\binom{0}{1},\binom{0}{2},\binom{1}{0},\binom{1}{1},\binom{1}{2},\binom{2}{0},\binom{2}{1},\binom{2}{2}\right\} \neq \emptyset.$

c) Untuk setiap $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \left\{\binom{0}{0},\binom{0}{1},\binom{0}{2},\binom{1}{0},\binom{1}{1},\binom{1}{2},\binom{2}{0},\binom{2}{1},\binom{2}{2}\right\}$, $c \in \mathbb{Z}_3$

berlaku :

$c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} \in \left\{\binom{0}{0},\binom{0}{1},\binom{0}{2},\binom{1}{0},\binom{1}{1},\binom{1}{2},\binom{2}{0},\binom{2}{1},\binom{2}{2}\right\}$

1) Akan ditunjukan $\left\{\binom{0}{0},\binom{0}{1},\binom{0}{2},\binom{1}{0},\binom{1}{1},\binom{1}{2},\binom{2}{0},\binom{2}{1},\binom{2}{2}\right\} \subset \mathbb{Z}_3^{\,2}.$

$\mathbb{Z}_3^{\,2} = \left\{\binom{0}{0},\binom{0}{1},\binom{0}{2},\binom{1}{0},\binom{1}{1},\binom{1}{2},\binom{2}{0},\binom{2}{1},\binom{2}{2}\right\}$

Maka dapat disimpulkan bahwa

$\boldsymbol{Z} = \left\{\binom{0}{0},\binom{0}{1},\binom{0}{2},\binom{1}{0},\binom{1}{1},\binom{1}{2},\binom{2}{0},\binom{2}{1},\binom{2}{2}\right\} \subset \mathbb{Z}_3^{\,2}.$

2) Akan ditunjukan $\left\{\binom{0}{0},\binom{0}{1},\binom{0}{2},\binom{1}{0},\binom{1}{1},\binom{1}{2},\binom{2}{0},\binom{2}{1},\binom{2}{2}\right\} \neq \emptyset.$

Jelas sekali bahwa $\left\{\binom{0}{0},\binom{0}{1},\binom{0}{2},\binom{1}{0},\binom{1}{1},\binom{1}{2},\binom{2}{0},\binom{2}{1},\binom{2}{2}\right\}$ merupakan unsur – unsur ruang vektor yang tak nol sehingga dapat disimpulkan $\left\{\binom{0}{0},\binom{0}{1},\binom{0}{2},\binom{1}{0},\binom{1}{1},\binom{1}{2},\binom{2}{0},\binom{2}{1},\binom{2}{2}\right\} \neq \emptyset.$

3) Akan diperiksa apakah setiap

$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \left\{\binom{0}{0},\binom{0}{1},\binom{0}{2},\binom{1}{0},\binom{1}{1},\binom{1}{2},\binom{2}{0},\binom{2}{1},\binom{2}{2}\right\}$, $c \in \mathbb{Z}_3$ berlaku

$c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} \in \left\{\binom{0}{0},\binom{0}{1},\binom{0}{2},\binom{1}{0},\binom{1}{1},\binom{1}{2},\binom{2}{0},\binom{2}{1},\binom{2}{2}\right\}$

a) Untuk c = 0

1) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 0\binom{0}{0} +_3 \binom{0}{1} = \binom{0}{0} +_3 \binom{0}{1} = \binom{0 +_3 0}{0 +_3 1} = \binom{0}{1} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}.$

2) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 0\binom{0}{1} +_3 \binom{1}{2} = \binom{0}{0} +_3 \binom{1}{2} = \binom{0 +_3 1}{0 +_3 2} = \binom{1}{2} \in \mathbb{Z}_3^{\,2}.$

3) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 0\binom{1}{1} +_3 \binom{2}{0} = \binom{0}{0} +_3 \binom{2}{0} = \binom{0 +_3 2}{0 +_3 0} = \binom{2}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2.$

4) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 0\binom{2}{1} +_3 \binom{2}{2} = \binom{0}{0} +_3 \binom{2}{2} = \binom{0 +_3 2}{0 +_3 2} = \binom{2}{2} \in \mathbb{Z}_3{}^2.$

5) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 0\binom{2}{2} +_3 \binom{1}{0} = \binom{0}{0} +_3 \binom{1}{0} = \binom{0 +_3 1}{0 +_3 0} = \binom{1}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2.$

b) Untuk c = 1

1) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 1\binom{1}{2} +_3 \binom{1}{0} = \binom{1}{2} +_3 \binom{1}{0} = \binom{1 +_3 1}{2 +_3 0} = \binom{2}{2} \in \mathbb{Z}_3{}^2.$

2) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 1\binom{1}{0} +_3 \binom{2}{0} = \binom{1}{0} +_3 \binom{2}{0} = \binom{1 +_3 2}{0 +_3 0} = \binom{0}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2.$

3) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 1\binom{0}{2} +_3 \binom{2}{1} = \binom{0}{2} +_3 \binom{2}{1} = \binom{0 +_3 2}{2 +_3 1} = \binom{2}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2.$

4) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 1\binom{2}{2} +_3 \binom{2}{1} = \binom{2}{2} +_3 \binom{2}{1} = \binom{2 +_3 2}{2 +_3 1} = \binom{1}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2.$

5) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 1\binom{0}{0} +_3 \binom{1}{1} = \binom{0}{0} +_3 \binom{1}{1} = \binom{0 +_3 1}{0 +_3 1} = \binom{1}{1} \in \mathbb{Z}_3{}^2.$

c) Untuk c = 2

1) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 2\binom{0}{0} +_3 \binom{1}{0} = \binom{0}{0} +_3 \binom{1}{0} = \binom{0 +_3 1}{0 +_3 0} = \binom{1}{0} \in \mathbb{Z}_3{}^2.$

2) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 2\binom{2}{1} +_3 \binom{2}{0} = \binom{1}{2} +_3 \binom{2}{0} = \binom{1 +_3 2}{2 +_3 0} = \binom{0}{2} \in \mathbb{Z}_3{}^2.$

3) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 2\binom{1}{0} +_3 \binom{1}{1} = \binom{2}{0} +_3 \binom{1}{1} = \binom{2 +_3 1}{0 +_3 1} = \binom{0}{1} \in \mathbb{Z}_3{}^2.$

4) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 2\binom{0}{2} +_3 \binom{2}{1} = \binom{0}{1} +_3 \binom{2}{1} = \binom{0 +_3 2}{1 +_3 1} = \binom{2}{2} \in \mathbb{Z}_3{}^2.$

5) $c\boldsymbol{\alpha} +_3 \boldsymbol{\beta} = 2\binom{1}{2} +_3 \binom{0}{1} = \binom{2}{1} +_3 \binom{0}{1} = \binom{2 +_3 0}{1 +_3 1} = \binom{2}{2} \in \mathbb{Z}_3{}^2.$

Dari (1), (2), dan (3) maka dapat disimpulkan bahwa $\left\{\binom{0}{0},\binom{0}{1},\binom{0}{2},\binom{1}{0},\binom{1}{1},\binom{1}{2},\binom{2}{0},\binom{2}{1},\binom{2}{2}\right\}$ merupakan subruang dari $\mathbb{Z}_3{}^2$.

Teorema 3. 4

Himpunan bagian dari ruang vektor $\mathbb{Z}_3{}^2$ yang memuat vektor nol bukan merupakan basis.

<u>**Contoh 3. 4. 1**</u>

$\mathbb{Z}_3{}^2 = \left\{\binom{0}{0},\binom{0}{1},\binom{0}{2},\binom{1}{0},\binom{1}{1},\binom{1}{2},\binom{2}{0},\binom{2}{1},\binom{2}{2}\right\}$

Ambil himpunan dari $\mathbb{Z}_3{}^2$ yang memuat vektor nol misalkan $V = \left\{\binom{0}{0},\binom{0}{1}\right\}$.

Akan dibuktikan bahwa $V = \left\{\binom{0}{0},\binom{0}{1}\right\}$ adalah bebas linear.

Pandang persamaan :

$k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} = \mathbf{0}$ ....(4)

$k_1\binom{0}{0} + k_2\binom{0}{1} = \binom{0}{0}$

$\binom{0}{0} + \binom{0}{k_2} = \binom{0}{0}$

$\binom{0+0}{0+k_2} = \binom{0}{0}$

$\binom{0}{k_2} = \binom{0}{0}$

Diperoleh $k_2 = 0$

Sedangkan k_1 merupakan variabel bebas, misalkan s.

Maka persamaan (4) dipenuhi dengan $k_1 = s$ dan $k_2 = 0$. Pernyataan ini kontradiksi bahwa $V = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ adalah bebas linear. Jadi, pengandaian $V = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ bebas linear salah. Haruslah $V = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ tidak bebas linear. Karena $V = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ tidak bebas linear/bergantung linear maka $V = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ bukan merupakan basis. Jadi, dapat disimpulkan bahwa himpunan dari ruang vektor $\mathbb{Z}_3{}^2$ yang mengandung vektor nol pasti tidak bebas linear dan juga bukan merupakan basis.

Teorema 3. 5

Dimensi dari ruang vektor $\mathbb{Z}_3{}^2$ adalah 2.

<u>**Bukti :**</u>

Untuk memperlihatkan dimensi dari ruang vektor $\mathbb{Z}_3{}^2$ cukup dengan memperlihatkan basis dari ruang vektor $\mathbb{Z}_3{}^2$. Ruang vektor dikatakan basis apabila

a. Unsur – unsur dari $\mathbb{Z}_3{}^2$ bebas linear.
b. Unsur – unsur dari $\mathbb{Z}_3{}^2$ membangun di $\mathbb{Z}_3$.

1. $B_1 = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$

   Akan ditunjukan B_1 merupakan basis dari $\mathbb{Z}_3{}^2$

   a. Pandang persamaan $k_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0\\k_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}k_2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 + k_2 \\ k_1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_2 \\ k_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diperoleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$

Karena persamaan $k_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka persamaan $k_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bebas linear.

b. Akan ditunjukan $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ membangun di $\mathbb{Z}_3^2$. Berdasarkan definisi 2. 7(Anton, 2004) maka kombinasi linear dibawah ini merupakan vektor – vektor yang membangun di $\mathbb{Z}_3^2$.

1) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $B_2 = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$

Akan ditunjukan B_2 merupakan basis dari $\mathbb{Z}_3{}^2$

a. Pandang persamaan $k_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0\\k_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}k_2\\k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 + k_2\\k_1 + k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}k_2\\k_1 + k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Diperoleh $k_2 = 0$. Subtitusikan nilai $k_2 = 0$ ke persamaan $k_1 + k_2 = 0$, maka diperoleh nilai $k_1 = 0$.

Karena persamaan $k_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka persamaan $k_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ bebas linear.

b. Akan ditunjukan $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ membangun di $\mathbb{Z}_3{}^2$. Berdasarkan definisi 2. 7(Anton, 2004) maka kombinasi linear dibawah ini merupakan vektor – vektor yang membangun di $\mathbb{Z}_3{}^2$.

1) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

7) $\binom{2}{0} = 1\binom{0}{1} + 2\binom{1}{1}$

8) $\binom{2}{1} = 2\binom{0}{1} + 2\binom{1}{1}$

9) $\binom{2}{2} = 0\binom{0}{1} + 2\binom{1}{1}$

3. $B_3 = \left\{\binom{0}{1}, \binom{1}{2}\right\}$

Akan ditunjukan B_3 merupakan basis dari $\mathbb{Z}_3^{\,2}$

a. Pandang persamaan $k_1\binom{0}{1} + k_2\binom{1}{2} = \binom{0}{0}$

$$\binom{0}{k_1} + \binom{k_2}{2k_2} = \binom{0}{0}$$

$$\binom{0 + k_2}{k_1 + 2k_2} = \binom{0}{0}$$

$$\binom{k_2}{k_1 + 2k_2} = \binom{0}{0}$$

Diperoleh $k_2 = 0$. Subtitusikan nilai $k_2 = 0$ ke persamaan $k_1 + 2k_2 = 0$, maka diperoleh nilai $k_1 = 0$.

Karena persamaan $k_1\binom{0}{1} + k_2\binom{1}{2} = \binom{0}{0}$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka persamaan $k_1\binom{0}{1} + k_2\binom{1}{2} = \binom{0}{0}$ bebas linear.

b. Akan ditunjukan $\left\{\binom{0}{1}, \binom{1}{2}\right\}$ membangun di $\mathbb{Z}_3^{\,2}$. Berdasarkan definisi 2. 7(Anton, 2004) maka kombinasi linear dibawah ini merupakan vektor – vektor yang membangun di $\mathbb{Z}_3^{\,2}$.

1) $\binom{0}{0} = 0\binom{0}{1} + 0\binom{1}{2}$

2) $\binom{0}{1} = 1\binom{0}{1} + 0\binom{1}{2}$

3) $\binom{0}{2} = 2\binom{0}{1} + 0\binom{1}{2}$

4) $\binom{1}{0} = 1\binom{0}{1} + 1\binom{1}{2}$

5) $\binom{1}{1} = 2\binom{0}{1} + 1\binom{1}{2}$

6) $\binom{1}{2} = 0\binom{0}{1} + 1\binom{1}{2}$

7) $\binom{2}{0} = 2\binom{0}{1} + 2\binom{1}{2}$

8) $\binom{2}{1} = 0\binom{0}{1} + 2\binom{1}{2}$

9) $\binom{2}{2} = 1\binom{0}{1} + 2\binom{1}{2}$

4. $B_4 = \left\{\binom{1}{0}, \binom{1}{1}\right\}$

Akan ditunjukan B_4 merupakan basis dari $\mathbb{Z}_3{}^2$

a. Pandang persamaan $k_1\binom{1}{0} + k_2\binom{1}{1} = \binom{0}{0}$

$$\binom{k_1}{0} + \binom{k_2}{k_2} = \binom{0}{0}$$

$$\binom{k_1 + k_2}{0 + k_2} = \binom{0}{0}$$

$$\binom{k_1 + k_2}{k_2} = \binom{0}{0}$$

Diperoleh $k_2 = 0$. Subtitusikan nilai $k_2 = 0$ ke persamaan $k_1 + k_2 = 0$, maka diperoleh nilai $k_1 = 0$.

Karena persamaan $k_1\binom{1}{0} + k_2\binom{1}{1} = \binom{0}{0}$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka persamaan $k_1\binom{1}{0} + k_2\binom{1}{1} = \binom{0}{0}$ bebas linear.

b. Akan ditunjukan $\left\{\binom{1}{0}, \binom{1}{1}\right\}$ membangun di $\mathbb{Z}_3{}^2$. Berdasarkan definisi 2. 7(Anton, 2004) maka kombinasi linear dibawah ini merupakan vektor – vektor yang membangun di $\mathbb{Z}_3{}^2$.

1) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

5. $B_5 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$

Akan ditunjukan B_5 merupakan basis dari $\mathbb{Z}_3{}^2$

a. Pandang persamaan $k_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}k_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2k_2\\k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}k_1 + 2k_2\\0 + k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}k_1 + 2k_2\\k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Diperoleh $k_2 = 0$. Subtitusikan nilai $k_2 = 0$ ke persamaan $k_1 + 2k_2 = 0$, maka diperoleh nilai $k_1 = 0$.

Karena persamaan $k_1\binom{1}{0} + k_2\binom{2}{1} = \binom{0}{0}$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka persamaan $k_1\binom{1}{0} + k_2\binom{2}{1} = \binom{0}{0}$ bebas linear.

b. Akan ditunjukan $\left\{\binom{1}{0}, \binom{2}{1}\right\}$ membangun di $\mathbb{Z}_3^2$. Berdasarkan definisi 2. 7(Anton, 2004) maka kombinasi linear dibawah ini merupakan vektor – vektor yang membangun di $\mathbb{Z}_3^2$.

1) $\binom{0}{0} = 0\binom{1}{0} + 0\binom{2}{1}$

2) $\binom{0}{1} = 1\binom{1}{0} + 1\binom{2}{1}$

3) $\binom{0}{2} = 2\binom{1}{0} + 2\binom{2}{1}$

4) $\binom{1}{0} = 1\binom{1}{0} + 0\binom{2}{1}$

5) $\binom{1}{1} = 2\binom{1}{0} + 1\binom{2}{1}$

6) $\binom{1}{2} = 0\binom{1}{0} + 2\binom{2}{1}$

7) $\binom{2}{0} = 2\binom{1}{0} + 0\binom{2}{1}$

8) $\binom{2}{1} = 0\binom{1}{0} + 1\binom{2}{1}$

9) $\binom{2}{2} = 1\binom{1}{0} + 2\binom{2}{1}$

6. $B_6 = \left\{\binom{1}{1}, \binom{0}{2}\right\}$

Akan ditunjukan B_6 merupakan basis dari $\mathbb{Z}_3^2$

a. Pandang persamaan $k_1\binom{1}{1} + k_2\binom{0}{2} = \binom{0}{0}$

$$\binom{k_1}{k_1} + \binom{0}{2k_2} = \binom{0}{0}$$

$$\begin{pmatrix} k_1 + 0 \\ k_1 + 2k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_1 + 2k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diperoleh $k_1 = 0$. Subtitusikan nilai $k_1 = 0$ ke persamaan $k_1 + 2k_2 = 0$, maka diperoleh nilai $k_2 = 0$.

Karena persamaan $k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka persamaan $k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bebas linear.

b. Akan ditunjukan $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ membangun di $\mathbb{Z}_3^{\,2}$. Berdasarkan definisi 2. 7(Anton, 2004) maka kombinasi linear dibawah ini merupakan vektor – vektor yang membangun di $\mathbb{Z}_3^{\,2}$.

1) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

7. $B_7 = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$

Akan ditunjukan B_7 merupakan basis dari $\mathbb{Z}_3^2$

a. Pandang persamaan $k_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}k_2\\2k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}k_1 + k_2\\k_1 + 2k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

(i) $k_1 + k_2 = 0$

(ii) $k_1 + 2k_2 = 0$

Dengan menggunakan SPL diperoleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$. Karena persamaan $k_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka persamaan $k_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ bebas linear.

b. Akan ditunjukan $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ membangun di $\mathbb{Z}_3^2$. Berdasarkan definisi 2. 7(Anton, 2004) maka kombinasi linear dibawah ini merupakan vektor – vektor yang membangun di $\mathbb{Z}_3^2$.

1) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

7) $\binom{2}{0} = 1\binom{1}{1} + 1\binom{1}{2}$

8) $\binom{2}{1} = 0\binom{1}{1} + 2\binom{1}{2}$

9) $\binom{2}{2} = 2\binom{1}{1} + 0\binom{1}{2}$

8. $B_8 = \left\{\binom{1}{1}, \binom{2}{0}\right\}$

Akan ditunjukan B_8 merupakan basis dari $\mathbb{Z}_3^2$

a. Pandang persamaan $k_1\binom{1}{1} + k_2\binom{2}{0} = \binom{0}{0}$

$$\binom{k_1}{k_1} + \binom{2k_2}{0} = \binom{0}{0}$$

$$\binom{k_1 + 2k_2}{k_1 + 0} = \binom{0}{0}$$

$$\binom{k_1 + 2k_2}{k_1} = \binom{0}{0}$$

Diperoleh $k_1 = 0$. Subtitusikan nilai $k_1 = 0$ ke persamaan $k_1 + 2k_2 = 0$, maka diperoleh nilai $k_2 = 0$.

Karena persamaan $k_1\binom{1}{1} + k_2\binom{2}{0} = \binom{0}{0}$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka persamaan $k_1\binom{1}{1} + k_2\binom{2}{0} = \binom{0}{0}$ bebas linear.

b. Akan ditunjukan $\left\{\binom{1}{1}, \binom{2}{0}\right\}$ membangun di $\mathbb{Z}_3^2$. Berdasarkan definisi 2. 7(Anton, 2004) maka kombinasi linear dibawah ini merupakan vektor – vektor yang membangun di $\mathbb{Z}_3^2$.

1) $\binom{0}{0} = 0\binom{1}{1} + 0\binom{2}{0}$

2) $\binom{0}{1} = 1\binom{1}{1} + 1\binom{2}{0}$

3) $\binom{0}{2} = 2\binom{1}{1} + 2\binom{2}{0}$

4) $\binom{1}{0} = 0\binom{1}{1} + 2\binom{2}{0}$

5) $\binom{1}{1} = 1\binom{1}{1} + 0\binom{2}{0}$

6) $\binom{1}{2} = 2\binom{1}{1} + 1\binom{2}{0}$

7) $\binom{2}{0} = 2\binom{1}{1} + 0\binom{2}{0}$

8) $\binom{2}{1} = 1\binom{1}{1} + 2\binom{2}{0}$

9) $\binom{2}{2} = 2\binom{1}{1} + 0\binom{2}{0}$

9. $B_9 = \left\{\binom{1}{1}, \binom{2}{1}\right\}$

Akan ditunjukan B_9 merupakan basis dari $\mathbb{Z}_3^{\,2}$

a. Pandang persamaan $k_1\binom{1}{1} + k_2\binom{2}{1} = \binom{0}{0}$

$$\binom{k_1}{k_1} + \binom{2k_2}{k_2} = \binom{0}{0}$$

$$\binom{k_1 + 2k_2}{k_1 + k_2} = \binom{0}{0}$$

(i) $k_1 + 2k_2 = 0$

(ii) $k_1 + k_2 = 0$

Dengan menggunakan SPL diperoleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$. Karena persamaan $k_1\binom{1}{1} + k_2\binom{2}{1} = \binom{0}{0}$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka persamaan $k_1\binom{1}{1} + k_2\binom{2}{1} = \binom{0}{0}$ bebas linear.

b. Akan ditunjukan $\left\{\binom{1}{1}, \binom{2}{1}\right\}$ membangun di $\mathbb{Z}_3^{\,2}$. Berdasarkan definisi 2. 7(Anton, 2004) maka kombinasi linear dibawah ini merupakan vektor – vektor yang membangun di $\mathbb{Z}_3^{\,2}$.

1) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

10. $B_{10} = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$

Akan ditunjukan B_{10} merupakan basis dari $\mathbb{Z}_3{}^2$

a. Pandang persamaan $k_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0\\k_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2k_2\\k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 + 2k_2\\k_1 + k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2k_2\\k_1 + k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Diperoleh $2k_2 = 0$, maka $k_2 = 0$. Subtitusikan nilai $k_2 = 0$ ke persamaan $k_1 + k_2 = 0$, maka diperoleh nilai $k_1 = 0$.

Karena persamaan $k_1\binom{0}{1} + k_2\binom{2}{1} = \binom{0}{0}$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka persamaan $k_1\binom{0}{1} + k_2\binom{2}{1} = \binom{0}{0}$ bebas linear.

b. Akan ditunjukan $\left\{\binom{0}{1}, \binom{2}{1}\right\}$ membangun di $\mathbb{Z}_3{}^2$. Berdasarkan definisi 2. 7(Anton, 2004) maka kombinasi linear dibawah ini merupakan vektor – vektor yang membangun di $\mathbb{Z}_3{}^2$.

1) $\binom{0}{0} = 0\binom{0}{1} + 0\binom{2}{1}$

2) $\binom{0}{1} = 1\binom{0}{1} + 0\binom{2}{1}$

3) $\binom{0}{2} = 2\binom{0}{1} + 0\binom{2}{1}$

4) $\binom{1}{0} = 1\binom{0}{1} + 2\binom{2}{1}$

5) $\binom{1}{1} = 2\binom{0}{1} + 2\binom{2}{1}$

6) $\binom{1}{2} = 0\binom{0}{1} + 2\binom{2}{1}$

7) $\binom{2}{0} = 2\binom{0}{1} + 1\binom{2}{1}$

8) $\binom{2}{1} = 0\binom{0}{1} + 1\binom{2}{1}$

9) $\binom{2}{2} = 1\binom{0}{1} + 1\binom{2}{1}$

11. $B_{11} = \left\{\binom{0}{1}, \binom{2}{2}\right\}$

Akan ditunjukan B_{11} merupakan basis dari $\mathbb{Z}_3{}^2$

a. Pandang persamaan $k_1\binom{0}{1} + k_2\binom{2}{2} = \binom{0}{0}$

$$\binom{0}{k_1} + \binom{2k_2}{2k_2} = \binom{0}{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 + 2k_2 \\ k_1 + 2k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2k_2 \\ k_1 + 2k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diperoleh $2k_2 = 0$, maka $k_2 = 0$. Subtitusikan nilai $k_2 = 0$ ke persamaan $k_1 + 2k_2 = 0$, maka diperoleh nilai $k_1 = 0$.

Karena persamaan $k_1\binom{0}{1} + k_2\binom{2}{2} = \binom{0}{0}$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka persamaan $k_1\binom{0}{1} + k_2\binom{2}{2} = \binom{0}{0}$ bebas linear.

b. Akan ditunjukan $\left\{\binom{0}{1}, \binom{2}{2}\right\}$ membangun di $\mathbb{Z}_3^2$. Berdasarkan definisi 2. 7(Anton, 2004) maka kombinasi linear dibawah ini merupakan vektor – vektor yang membangun di $\mathbb{Z}_3^2$.

1) $\binom{0}{0} = 0\binom{0}{1} + 0\binom{2}{2}$

2) $\binom{0}{1} = 1\binom{0}{1} + 0\binom{2}{2}$

3) $\binom{0}{2} = 2\binom{0}{1} + 0\binom{2}{2}$

4) $\binom{1}{0} = 2\binom{0}{1} + 2\binom{2}{2}$

5) $\binom{1}{1} = 0\binom{0}{1} + 2\binom{2}{2}$

6) $\binom{1}{2} = 1\binom{0}{1} + 2\binom{2}{2}$

7) $\binom{2}{0} = 1\binom{0}{1} + 1\binom{2}{2}$

8) $\binom{2}{1} = 2\binom{0}{1} + 1\binom{2}{2}$

9) $\binom{2}{2} = 0\binom{0}{1} + 1\binom{2}{2}$

12. $B_{12} = \left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$

Akan ditunjukan B_{12} merupakan basis dari $\mathbb{Z}_3^{\,2}$

a. Pandang persamaan $k_1\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0\\2k_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}k_2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 + k_2\\2k_1 + 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}k_2\\2k_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Diperoleh $2k_1 = 0$, maka $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$.

Karena persamaan $k_1\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka persamaan $k_1\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ bebas linear.

b. Akan ditunjukan $\left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ membangun di $\mathbb{Z}_3^{\,2}$. Berdasarkan definisi 2. 7(Anton, 2004) maka kombinasi linear dibawah ini merupakan vektor – vektor yang membangun di $\mathbb{Z}_3^{\,2}$.

1) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

7) $\binom{2}{0} = 0\binom{0}{2} + 2\binom{1}{0}$

8) $\binom{2}{1} = 2\binom{0}{2} + 2\binom{1}{0}$

9) $\binom{2}{2} = 1\binom{0}{2} + 2\binom{1}{0}$

13. $B_{13} = \left\{\binom{0}{2}, \binom{1}{2}\right\}$

Akan ditunjukan B_{13} merupakan basis dari $\mathbb{Z}_3^{\,2}$

a. Pandang persamaan $k_1\binom{0}{2} + k_2\binom{1}{2} = \binom{0}{0}$

$$\binom{0}{2k_1} + \binom{k_2}{2k_2} = \binom{0}{0}$$

$$\binom{0 + k_2}{2k_1 + 2k_2} = \binom{0}{0}$$

$$\binom{k_2}{2k_1 + 2k_2} = \binom{0}{0}$$

Diperoleh $k_2 = 0$. Subtitusikan nilai $k_2 = 0$ ke persamaan $2k_1 + 2k_2 = 0$, maka diperoleh nilai $k_1 = 0$.

Karena persamaan $k_1\binom{0}{2} + k_2\binom{1}{2} = \binom{0}{0}$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka persamaan $k_1\binom{0}{2} + k_2\binom{1}{2} = \binom{0}{0}$ bebas linear.

b. Akan ditunjukan $\left\{\binom{0}{2}, \binom{1}{2}\right\}$ membangun di $\mathbb{Z}_3^{\,2}$. Berdasarkan definisi 2. 7(Anton, 2004) maka kombinasi linear dibawah ini merupakan vektor – vektor yang membangun di $\mathbb{Z}_3^{\,2}$.

1) $\binom{0}{0} = 0\binom{0}{2} + 0\binom{1}{2}$

2) $\binom{0}{1} = 2\binom{0}{2} + 0\binom{1}{2}$

3) $\binom{0}{2} = 1\binom{0}{2} + 0\binom{1}{2}$

4) $\binom{1}{0} = 2\binom{0}{2} + 1\binom{1}{2}$

5) $\binom{1}{1} = 1\binom{0}{2} + 1\binom{1}{2}$

6) $\binom{1}{2} = 0\binom{0}{2} + 1\binom{1}{2}$

7) $\binom{2}{0} = 2\binom{0}{2} + 2\binom{1}{2}$

8) $\binom{2}{1} = 0\binom{0}{2} + 2\binom{1}{2}$

9) $\binom{2}{2} = 2\binom{0}{2} + 2\binom{1}{2}$

14. $B_{14} = \left\{\binom{0}{2}, \binom{2}{0}\right\}$

Akan ditunjukan B_{14} merupakan basis dari $\mathbb{Z}_3^2$

a. Pandang persamaan $k_1\binom{0}{2} + k_2\binom{2}{0} = \binom{0}{0}$

$$\binom{0}{2k_1} + \binom{2k_2}{0} = \binom{0}{0}$$

$$\binom{0 + 2k_2}{2k_1 + 0} = \binom{0}{0}$$

$$\binom{2k_2}{2k_1} = \binom{0}{0}$$

Diperoleh $2k_1 = 0$, maka $k_1 = 0$. $2k_2 = 0$, maka $k_2 = 0$.

Karena persamaan $k_1\binom{0}{2} + k_2\binom{2}{0} = \binom{0}{0}$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka persamaan $k_1\binom{0}{2} + k_2\binom{2}{0} = \binom{0}{0}$ bebas linear.

b. Akan ditunjukan $\left\{\binom{0}{2}, \binom{2}{0}\right\}$ membangun di $\mathbb{Z}_3^2$. Berdasarkan definisi 2. 7(Anton, 2004) maka kombinasi linear dibawah ini merupakan vektor – vektor yang membangun di $\mathbb{Z}_3^2$.

1) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

15. $B_{15} = \left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$

Akan ditunjukan B_{15} merupakan basis dari $\mathbb{Z}_3{}^2$

a. Pandang persamaan $k_1\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0\\2k_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2k_2\\k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 + 2k_2\\2k_1 + k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2k_2\\2k_1 + k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Diperoleh $2k_2 = 0$, maka $k_2 = 0$. Subtitusikan nilai $k_2 = 0$ ke persamaan $2k_1 + k_2 = 0$, maka diperoleh nilai $k_1 = 0$.

Karena persamaan $k_1\binom{0}{2} + k_2\binom{2}{1} = \binom{0}{0}$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka persamaan $k_1\binom{0}{2} + k_2\binom{2}{1} = \binom{0}{0}$ bebas linear.

b. Akan ditunjukan $\left\{\binom{0}{2}, \binom{2}{1}\right\}$ membangun di $\mathbb{Z}_3^{\,2}$. Berdasarkan definisi 2. 7(Anton, 2004) maka kombinasi linear dibawah ini merupakan vektor – vektor yang membangun di $\mathbb{Z}_3^{\,2}$.

1) $\binom{0}{0} = 0\binom{0}{2} + 0\binom{2}{1}$

2) $\binom{0}{1} = 2\binom{0}{2} + 0\binom{2}{1}$

3) $\binom{0}{2} = 1\binom{0}{2} + 0\binom{2}{1}$

4) $\binom{1}{0} = 2\binom{0}{2} + 2\binom{2}{1}$

5) $\binom{1}{1} = 1\binom{0}{2} + 2\binom{2}{1}$

6) $\binom{1}{2} = 0\binom{0}{2} + 2\binom{2}{1}$

7) $\binom{2}{0} = 1\binom{0}{2} + 1\binom{2}{1}$

8) $\binom{2}{1} = 0\binom{0}{2} + 1\binom{2}{1}$

9) $\binom{2}{2} = 2\binom{0}{2} + 1\binom{2}{1}$

16. $B_{16} = \left\{\binom{0}{2}, \binom{2}{2}\right\}$

Akan ditunjukan B_{16} merupakan basis dari $\mathbb{Z}_3^{\,2}$

a. Pandang persamaan $k_1\binom{0}{2} + k_2\binom{2}{2} = \binom{0}{0}$

$$\binom{0}{2k_1} + \binom{2k_2}{2k_2} = \binom{0}{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 + 2k_2 \\ 2k_1 + 2k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2k_2 \\ 2k_1 + 2k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diperoleh $2k_2 = 0$, maka $k_2 = 0$. Subtitusikan nilai $k_2 = 0$ ke persamaan $2k_1 + 2k_2 = 0$, maka diperoleh nilai $k_1 = 0$.

Karena persamaan $k_1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka persamaan $k_1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bebas linear.

b. Akan ditunjukan $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ membangun di $\mathbb{Z}_3^2$. Berdasarkan definisi 2. 7(Anton, 2004) maka kombinasi linear dibawah ini merupakan vektor – vektor yang membangun di $\mathbb{Z}_3^2$.

1) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

17. $B_{17} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$

Akan ditunjukan B_{17} merupakan basis dari $\mathbb{Z}_3^{\,2}$

a. Pandang persamaan $k_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}k_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}k_2\\2k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}k_1 + k_2\\0 + 2k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}k_1 + k_2\\2k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Diperoleh $2k_2 = 0$, maka $k_2 = 0$. Subtitusikan nilai $k_2 = 0$ ke persamaan $k_1 + k_2 = 0$, maka diperoleh nilai $k_1 = 0$.

Karena persamaan $k_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka persamaan $k_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ bebas linear.

b. Akan ditunjukan $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ membangun di $\mathbb{Z}_3^{\,2}$. Berdasarkan definisi 2. 7(Anton, 2004) maka kombinasi linear dibawah ini merupakan vektor – vektor yang membangun di $\mathbb{Z}_3^{\,2}$.

1) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

18. $B_{18} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}$

Akan ditunjukan B_{18} merupakan basis dari $\mathbb{Z}_3^2$

a. Pandang persamaan $k_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}k_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2k_2\\2k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}k_1 + 2k_2\\0 + 2k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}k_1 + 2k_2\\2k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Diperoleh $2k_2 = 0$, maka $k_2 = 0$. Subtitusikan nilai $k_2 = 0$ ke persamaan $k_1 + 2k_2 = 0$, maka diperoleh nilai $k_1 = 0$.

Karena persamaan $k_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka persamaan $k_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ bebas linear.

b. Akan ditunjukan $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}$ membangun di $\mathbb{Z}_3^2$. Berdasarkan definisi 2. 7(Anton, 2004) maka kombinasi linear dibawah ini merupakan vektor – vektor yang membangun di $\mathbb{Z}_3^2$.

1) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

4) $\binom{1}{0} = 1\binom{1}{0} + 0\binom{2}{2}$

5) $\binom{1}{1} = 0\binom{1}{0} + 2\binom{2}{2}$

6) $\binom{1}{2} = 2\binom{1}{0} + 1\binom{2}{2}$

7) $\binom{2}{0} = 2\binom{1}{0} + 0\binom{2}{2}$

8) $\binom{2}{1} = 1\binom{1}{0} + 2\binom{2}{2}$

9) $\binom{2}{2} = 0\binom{1}{0} + 1\binom{1}{2}$

19. $B_{19} = \left\{\binom{1}{2}, \binom{2}{0}\right\}$

Akan ditunjukan B_{19} merupakan basis dari $\mathbb{Z}_3^{\,2}$

a. Pandang persamaan $k_1\binom{1}{2} + k_2\binom{2}{0} = \binom{0}{0}$

$$\binom{k_1}{2k_1} + \binom{2k_2}{0} = \binom{0}{0}$$

$$\binom{k_1 + 2k_2}{2k_1 + 0} = \binom{0}{0}$$

$$\binom{k_1 + 2k_2}{2k_1} = \binom{0}{0}$$

Diperoleh $2k_1 = 0$, maka $k_1 = 0$. Subtitusikan nilai $k_1 = 0$ ke persamaan $k_1 + 2k_2 = 0$, maka diperoleh nilai $k_2 = 0$.

Karena persamaan $k_1\binom{1}{2} + k_2\binom{2}{0} = \binom{0}{0}$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka persamaan $k_1\binom{1}{2} + k_2\binom{2}{0} = \binom{0}{0}$ bebas linear.

b. Akan ditunjukan $\left\{\binom{1}{2}, \binom{2}{0}\right\}$ membangun di $\mathbb{Z}_3^{\,2}$. Berdasarkan definisi 2. 7(Anton, 2004) maka kombinasi linear dibawah ini merupakan vektor – vektor yang membangun di $\mathbb{Z}_3^{\,2}$.

1) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

20. $B_{20} = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}$

Akan ditunjukan B_9 merupakan basis dari $\mathbb{Z}_3{}^2$

a. Pandang persamaan $k_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}k_1\\2k_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2k_2\\2k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}k_1 + 2k_2\\2k_1 + 2k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

(i) $k_1 + 2k_2 = 0$

(ii) $2k_1 + 2k_2 = 0$

Dengan menggunakan SPL diperoleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$. Karena persamaan $k_1\binom{1}{2} + k_2\binom{2}{2} = \binom{0}{0}$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka persamaan $k_1\binom{1}{2} + k_2\binom{2}{2} = \binom{0}{0}$ bebas linear.

b. Akan ditunjukan $\left\{\binom{1}{2}, \binom{2}{2}\right\}$ membangun di $\mathbb{Z}_3^2$. Berdasarkan definisi 2. 7(Anton, 2004) maka kombinasi linear dibawah ini merupakan vektor – vektor yang membangun di $\mathbb{Z}_3^2$.

1) $\binom{0}{0} = 0\binom{1}{2} + 0\binom{2}{2}$

2) $\binom{0}{1} = 1\binom{1}{2} + 1\binom{2}{2}$

3) $\binom{0}{2} = 2\binom{1}{2} + 2\binom{2}{2}$

4) $\binom{1}{0} = 2\binom{1}{2} + 1\binom{2}{2}$

5) $\binom{1}{1} = 0\binom{1}{2} + 2\binom{2}{2}$

6) $\binom{1}{2} = 1\binom{1}{2} + 0\binom{2}{2}$

7) $\binom{2}{0} = 1\binom{1}{2} + 2\binom{2}{2}$

8) $\binom{2}{1} = 2\binom{1}{2} + 0\binom{2}{2}$

9) $\binom{2}{2} = 0\binom{1}{2} + 1\binom{2}{2}$

21. $B_{21} = \left\{\binom{2}{0}, \binom{2}{1}\right\}$

Akan ditunjukan B_{21} merupakan basis dari $\mathbb{Z}_3^2$

a. Pandang persamaan $k_1\binom{2}{0} + k_2\binom{2}{1} = \binom{0}{0}$

$$\binom{2k_1}{0} + \binom{2k_2}{k_2} = \binom{0}{0}$$

$$\begin{pmatrix} 2k_1 + 2k_2 \\ 0 + k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2k_1 + 2k_2 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diperoleh $k_2 = 0$. Subtitusikan nilai $k_2 = 0$ ke persamaan $2k_1 + 2k_2 = 0$, maka diperoleh nilai $k_1 = 0$.

Karena persamaan $k_1\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka persamaan $k_1\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bebas linear.

b. Akan ditunjukan $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ membangun di $\mathbb{Z}_3^2$. Berdasarkan definisi 2. 7(Anton, 2004) maka kombinasi linear dibawah ini merupakan vektor – vektor yang membangun di $\mathbb{Z}_3^2$.

1) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

22. $B_{22} = \left\{\binom{2}{0}, \binom{2}{2}\right\}$

Akan ditunjukan B_{22} merupakan basis dari $\mathbb{Z}_3{}^2$

a. Pandang persamaan $k_1\binom{2}{0} + k_2\binom{2}{2} = \binom{0}{0}$

$$\binom{2k_1}{0} + \binom{2k_2}{2k_2} = \binom{0}{0}$$

$$\binom{2k_1 + 2k_2}{0 + 2k_2} = \binom{0}{0}$$

$$\binom{2k_1 + 2k_2}{2k_2} = \binom{0}{0}$$

Diperoleh $2k_2 = 0$, maka $k_2 = 0$. Subtitusikan nilai $k_2 = 0$ ke persamaan $2k_1 + 2k_2 = 0$, maka diperoleh nilai $k_1 = 0$.

Karena persamaan $k_1\binom{2}{0} + k_2\binom{2}{2} = \binom{0}{0}$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka persamaan $k_1\binom{2}{0} + k_2\binom{2}{2} = \binom{0}{0}$ bebas linear.

b. Akan ditunjukan $\left\{\binom{2}{0}, \binom{2}{2}\right\}$ membangun di $\mathbb{Z}_3{}^2$. Berdasarkan definisi 2. 7(Anton, 2004) maka kombinasi linear dibawah ini merupakan vektor – vektor yang membangun di $\mathbb{Z}_3{}^2$.

1) $\binom{0}{0} = 0\binom{2}{0} + 0\binom{2}{2}$

2) $\binom{0}{1} = 1\binom{2}{0} + 2\binom{2}{2}$

3) $\binom{0}{2} = 2\binom{2}{0} + 1\binom{2}{2}$

4) $\binom{1}{0} = 2\binom{2}{0} + 0\binom{2}{2}$

5) $\binom{1}{1} = 0\binom{2}{0} + 2\binom{2}{2}$

6) $\binom{1}{2} = 1\binom{2}{0} + 1\binom{2}{2}$

7) $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

23. $B_{23} = \left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}$

Akan ditunjukan B_9 merupakan basis dari $\mathbb{Z}_3^{\ 2}$

a. Pandang persamaan $k_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2k_1\\k_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2k_2\\2k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2k_1 + 2k_2\\k_1 + 2k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

(i) $2k_1 + 2k_2 = 0$

(ii) $k_1 + 2k_2 = 0$

Dengan menggunakan SPL diperoleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$. Karena persamaan $k_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka persamaan $k_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ bebas linear.

b. Akan ditunjukan $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}$ membangun di $\mathbb{Z}_3^{\ 2}$. Berdasarkan definisi 2. 7(Anton, 2004) maka kombinasi linear dibawah ini merupakan vektor – vektor yang membangun di $\mathbb{Z}_3^{\ 2}$.

1) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

4) $\binom{1}{0} = 1\binom{2}{1} + 1\binom{2}{2}$

5) $\binom{1}{1} = 0\binom{2}{1} + 2\binom{2}{2}$

6) $\binom{1}{2} = 2\binom{2}{1} + 0\binom{2}{2}$

7) $\binom{2}{0} = 2\binom{2}{1} + 2\binom{2}{2}$

8) $\binom{2}{1} = 1\binom{2}{1} + 0\binom{2}{2}$

9) $\binom{2}{2} = 0\binom{2}{1} + 1\binom{2}{2}$

Dari penjabaran diatas terbukti bahwa dimensi dari ruang vektor $\mathbb{Z}_3{}^2$ adalah 2.

BAB IV

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dari pembahasan dari BAB III diperoleh kesimpulan yaitu :

1. $\mathbb{Z}_3$ merupakan lapangan.
2. $\mathbb{Z}_3{}^2$ merupakan ruang vektor atas lapangan $\mathbb{Z}_3$.
3. $\boldsymbol{V} = \left\{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{0}{2}\right\}$, $\boldsymbol{W} = \left\{\binom{0}{0}, \binom{1}{0}, \binom{2}{0}\right\}$, $\boldsymbol{X} = \left\{\binom{0}{0}\right\}$, dan $\boldsymbol{Z} = \left\{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{0}{2}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1}, \binom{1}{2}, \binom{2}{0}, \binom{2}{1}, \binom{2}{2}\right\}$ merupakan subruang dari ruang vektor $\mathbb{Z}_3{}^2$.
4. Himpunan bagian dari $\mathbb{Z}_3$ yang memuat vektor **0** bukan merupakan basis.

   Terdapat dua puluh tiga basis pada ruang vektor $\mathbb{Z}_3{}^2$ yaitu :

   1) $B_1 = \left\{\binom{0}{1}, \binom{1}{0}\right\}$
   2) $B_2 = \left\{\binom{0}{1}, \binom{1}{1}\right\}$
   3) $B_3 = \left\{\binom{0}{1}, \binom{1}{2}\right\}$
   4) $B_4 = \left\{\binom{1}{0}, \binom{1}{1}\right\}$
   5) $B_5 = \left\{\binom{1}{0}, \binom{2}{1}\right\}$
   6) $B_6 = \left\{\binom{1}{1}, \binom{0}{2}\right\}$
   7) $B_7 = \left\{\binom{1}{1}, \binom{1}{2}\right\}$
   8) $B_8 = \left\{\binom{1}{1}, \binom{2}{0}\right\}$
   9) $B_9 = \left\{\binom{1}{1}, \binom{2}{1}\right\}$

10) $B_{10} = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$

11) $B_{11} = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}$

12) $B_{12} = \left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$

13) $B_{13} = \left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$

14) $B_{14} = \left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}$

15) $B_{15} = \left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$

16) $B_{16} = \left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}$

17) $B_{17} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$

18) $B_{18} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}$

19) $B_{19} = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}$

20) $B_{20} = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}$

21) $B_{21} = \left\{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$

22) $B_{22} = \left\{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}$

23) $B_{23} = \left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}$

5. Dengan menggunakan konsep pembuktian dari pada basis dapat dilihat bahwa dimensi dari ruang vektor $\mathbb{Z}_3^2$ adalah 2.