REPRESENTASI FAITHFUL

SKRIPSI

DEDI YULIANTO
06934019

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2011

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa:

Nama	:	Dedi Yulianto
Nomor Buku Pokok	:	06 934 019
Jurusan	:	Matematika
Bidang	:	Aljabar
Judul Skripsi	:	**Representasi *Faithful***

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal **24 November 2011** berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing,

1.

Prof. Dr. I Made Arnawa
NIP.19630218 198903 1 004

2.

Nova Noliza Bakar, M.Si
NIP.19631104 199203 2 002

Penguji,

1.

Dr. Lyra Yulianti
NIP.19750706 199903 2 003

2.

Dr. Admi Nazra
NIP.19730330 199903 1 002

3.

Budi Rudianto, M. Si
NIP.132169920

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand

Dr. Syafrizal Sy
NIP.19670807 199309 1 001

بسم الله الرحمن الرحيم

Karya kecil ini kupersembahkan kepada :

Kedua orang tua Yuli Syafrizal (papa) dan Dasmawati, S.Pd yang tak pernah lelah berdoa dan memberikan segala yang terbaik untuk anak-anaknya. Kasih sayang yang walaupun tak pernah ditunjukan secara langsung, tapi aku dapat merasakannya tanpa kalian sadari. Segala harapan dan cita-cita yang kalian 'bebankan' mw tak mw membuatku *survive* dan berpikiran lebih jauh ke masa depan. Sebagai anak aku belum mampu membalas semua hal yang telah kalian berikan. *But,I always try the best.*

Adik-adikku (devi, n dimas)... saudara 'bacakak', 'maminjamkan barang2, pitih' dan banyak hal yang telah kita lalui bersama sebagai saudara. Mungkin aku bukan kakak terbaik yang mampu memberikan teladan bagi kalian. Dan seandainya aku punya pilihan untuk memilih menjadi saudara siapa, maka aku pun akan memilih bersama kalian (kalo kalian gmn?? Msh mw aku jd kakak tertua?? ;D

Mak Uo, Mak Angah, Condang, Concik, Uni Tam, Uni Eti, Da Men, Da Eri, Da Mril, Uni Marni yang telah membimbing ku selama ini. Ilmu yang kalian berikan sangat lah berharga bagiku.

Bapak Made dan Ibu Nova selaku pembimbing yang sudah rela meluangkan waktunya untuk membimbingku. Disela-sela kesibukan, bapak dan ibu tanpa lelah memberikan sumbangsih ilmu yang tiada terhitung harganya. Untuk semangat yang terus bapak dan ibu alirkan kedalam pikiranku yang banyak membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Ibu Lyra, Pak Budi, dan Pak Admi selaku penguji yang telah bersedia memberikan saran dan kritikan untuk menyempurnakan tugas akhir ini. Ilmu-ilmu yang didapat sangatlah berguna dan bermanfaat.

Teman2 "Nakan Mamak Ben". Hampir 6 tahun kita bersama mengukir cerita di bangku kuliah yang begitu menakjubkan. Walau ada yang baru2 sih, Tapi semuanya sama di hati. Teman-teman senasib dan sepenanggungan di masa pembinaan,menuntut ilmu, berbagi pengalaman dan cerita.

Buat da ben dan uni neng, makasih nasehat-nasehatnya, yang membimbing saya dan teman-teman, dan khususnya buat da ben, 4 sks lain kali d ulang lagi.

Sutu kali di hari nanti, dimana setiap kata menjadi buih pada lautan yang mengejar tepian hati. Dan setiap janji akan terus menggema hingga kalimat ditelan angkasa. Namun, biarkan semua apa adanya. Kadang kita bersatu, kadang bercerai tiada arti. Kita suatu kali penuh ketulusan, suatu waktu penuh kebohongan. Datang menemani dalam setiap rintihan sepi hingga dingin pagi menusuk. Terlalu banyak mimpi tentang masa depan, tentang hari esok kita. Berlayu layaknya pucuk-pucuk ilalang tinggi tertiup angin, luruhkan segala dinding keangkuhan. Nyanyikan senandung bait2 cinta, biar perih tak terhiraukan setiap getir benci. Biar terdengar setiap nafas yang terhembus atau detak jantung sebuah penantian panjang tak tahu ujung. Hingga kita terlelap. Dan kejayaan raja2 pun memudar. Kembali, biarkan semua apa adanya.

Serta teman-teman yang akanku sebutkan namanya satu per satu

Arif, Heru, Icit, Ikha, Uci, Suci, Eka, Oce, Iing, Anggun, Angga, Ade, Jeki, Tia, Rido, Ika, Nilam, Isna, Mira, Nia, Ira, Dewi, Rahma, Fani, Ares, Tari, Firlan, Irfan, Didi, Puput, Riri, Mega, dan lain-lain.

Terutama sekali untuk Rido (Kawan malala, galak-galak, malanggang di kampus, walau sering nyusahin kayak jam 12 malam jemput dia k anduring, padahal hari hujan lebat. .Tapi tak ada penyesalan buat itu), Icit (Kawan curhat, sahabat paliang aku percaya, sahabat yang selalu santai, selalu cerita masalah-masalahnya, dan sahabat yang paling baik baik baik ^_^, eitz bukan berarti kalian tidak, hanya buat icit sedikit terharu, hahahahaa :D), Arif (Kawan sama ma olah cewek, dewa cinta bagi ku, speed 100 km/jam di finish selalu d tikung, ntah apa salahnya dia, hmmph bagiku dia baik, insya Allah dapat yang baik), Heru (Kawan ku pencinta bola, nih anak sangat gila ma bola, sahabat yang pembawaannya santai dan cool ini, banyak disukai cewek, 06,07, dan berakhir di Dila, cinta yang rumit), Ikha (Kawan ku yang baik hati, the panas selalu tersedia buat ku dan teman2, yang sangat semangat), Uci (Kawan ku yang paling baik berikutnya, banyak hal telah dilewati, jimat-jimat ujian kita, hahahahaaha), Tia (Kawanku yang paling baik selanjutnya, telah membelikan kami gelang persahabatan yang selalu kami pake kemanapun), Jeki (Kawan ku yang paling baik selanjutnya, yang hidupnya paling paling paling santai, klo mau tau dari mana ku tahu begitu, tanya deh ma orangnya), Ade (Kawan ku yang paling baik berikutnya, yang kata-katanya pedas tapi banyak manfaatnya, makasih kawan).

Untuk kakak senior 04 terutama verdi andri, hahahaa, nama nya sangat fenomenal, hmmppphh kenapa yah. .

Untuk kakak senior 05, tia, uni opi, riza, senior-senior yang imut dan selalu ceria seperti dunia milik mereka. .

Untuk Teman-teman angkatan 06 (Math Zero Six), kalian teman seperjuangan, masa-masa kuliah takkan terlupakan. Bercanda bersama, telat kuliah bersama, dan ngak buat tugas bersama. Tapi tetap tak terpecah oleh apapun jua.

Untuak adiak bp yang ku sayangi, rahmi, dina, dwi, seno, semangat yah, jangan nyerah, tak ada hal yang tak mungkin. Buat calon adik bp 19 yang akan dating, cepat-cepat gabung ke family 19 yah.

Untuk junior bp 07, 08, 09 dan 11 acha, ane, ipat, anggun, rahmi, widia, pia, rahmi, desma, dina, cipi, yulia, wiwik, lia, meta, jatu, ira, febi, memel, imel, yuni, mei, bibib, ezi, fitri, olive dan lain-lain. Maap klo ngak dituliskan, tapi kalian tetap sesuatu untukku.

Akhir kata, saya ucapkan terima kasih atas semua dukungan, doa dan kebersamaan selama ini.

Promathia Deddy ^_^

KATA PENGANTAR

Assalammu'alaikum Wr. Wb.

Syukur Alhamdulillah penulis aturkan kehadiran Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-NYA, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "*REPRESENTASI FAITHFUL*". Penulisan skripsi ini merupakan salah satu syarat untuk menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Andalas Padang.

Penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada kedua orang tua dan adik-adik yang selalu memberikan semangat dan motivasi kepada penulis. Tidak lupa pula penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penulisan skripsi ini terutama sekali kepada :

1. Bapak Prof. Dr. I Made Arnawa selaku pembimbing I yang telah banyak memberikan bimbingan, pengarahan dan saran kepada penulis sampai selesainya tugas akhir ini.
2. Ibu Nova Noliza Bakar, M.Si selaku pembimbing II yang telah banyak memberikan bimbingan, pengarahan, saran dan waktu serta tenaga kepada penulis sampai selesainya tugas akhir ini.
3. Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Dr. Admi Nazra dan Bapak Budi Rudianto, M.Si selaku penguji yang telah banyak meluangkan waktu, memberikan bimbingan, pengarahan dan saran dalam penulisan skripsi ini.
4. Bapak Zulakmal, M.Si selaku Penasehat Akademik yang telah memberikan motivasi kepada penulis.

5. Ibu Dr. Lyra Yulianti selaku koordinator pendidikan Jurusan Matematika Universitas Andalas.
6. Bapak Dr. Syafrizal Sy selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang.
7. Bapak/Ibu dosen dan karyawan/i Jurusan Matematika FMIPA Unand.
8. Sahabat-sahabatku mahasiswa Matematika angkatan 2006 FMIPA Unand, Arif, Heru, Icit, Ika, Rido, Uci, Oce, Suci, Tari, Ares, Sari, Dewi, dan semua yang tidak dapat disebutkan satu persatu, tetap semangat.
9. Sahabat-sahabat seperjuangan di Ikatan SMA N 6 PADANG, Bram, Dian, Antoni, Alvi, Romi, Raga, Deni, Asih, Anggun, Muli, Resi, Dartok, Teddy, Boni, dan emil. Mudah-mudahan kita bisa reunian lagi.

Terima kasih kepada yang mulia Ayahanda Yuli Syafrizal dan Ibunda tercinta Dasmawati, S.Pd di Padang, Karena kasih sayang, do'a, dorongan dan semangat beliau, penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini tepat pada waktunya. Untuk adikku Devi Yunita Astuti, Amd dan Dimas Gusrizal, terima kasih segala hal yang telah kita lalui bersama.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih banyak kekurangannya. Untuk itu penulis sangat mengharapkan sekali kritik dan saran atas kekurangan tersebut. Akhir kata semoga skripsi ini bermanfaat bagi kita semua. Amin

Padang, Desember 2011

Penulis

ABSTRAK

Misalkan G adalah grup hingga dan $GL_n(\mathbb{C})$ adalah matriks yang berukuran $n \times n$ atas lapangan kompleks, maka homomorfisma $\rho: G \to GL_n(\mathbb{C})$ merupakan representasi dari G. Kernel dari representasi ρ didefinisikan sebagai $K_\rho = \{g \in G \,|\, \rho(g) = I_n\}$. Kernel K_ρ suatu subgrup normal dari G.

Representasi ρ dikatakan *faithful* jika $K_\rho = \{1\}$, yaitu jika 1 unsur identitas dari G adalah satu-satunya unsur g yang memenuhi $\rho(g) = I_n$. Representasi ρ *faithful* jika dan hanya jika Peta(ρ) isomorfik ke G. Semua representasi yang ekivalen dengan representasi *faithful* adalah *faithful*.

Misalkan $\rho : G \to GL_1(\mathbb{C})$ suatu representasi yang didefinisikan sebagai berikut $\rho(g) = (1)$ untuk semua $g \in G$. Representasi ρ yang didefinisikan seperti yang diatas disebut representasi trivial dari G.

Kata kunci : *Grup, Kernel, Peta, representasi grup, kernel representasi representasi faithful, representasi ekivalen, representasi trivial.*

ABSTRACT

Let G is a finite group and $GL_n(\mathbb{C})$ is a matrix of size $n \times n$ over the complex field, then the homomorphism $\rho: G \to GL_n(\mathbb{C})$ is a representation of G. The kernel of the representation ρ is defined as $K_\rho = \{g \in G | \rho(g) = I_n\}$. Kernel K_ρ a normal subgroup of G.

A representation $\rho: G \to GL_n(\mathbb{C})$ is said to be faithful if $K_\rho = \{1\}$ that is, if the identhy element of G is the only element g for which $\rho(g) = I_n$. A representation ρ of a finite group G is faithful if and only if Im ρ is isomorphic to G.

The representation $\rho: G \to GL_n(\mathbb{C})$ which is defined by $\rho(g) = (1)$ for all $g \in G$, is called the trivial representation of G.

Key words: *group, kernel, group representation, the kernel representation, faithful representation, equivalent representations, the trivial representation.*

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori grup dalam aljabar abstrak adalah salah satu teori yang mempelajari tentang aljabar suatu himpunan. Himpunan tak kosong G disebut grup, jika G bersama suatu operasi biner '*' memenuhi sifat tutup, asosiatif, terdapat unsur identitas di G, dan untuk setiap unsur di G mempunyai invers.

Dalam aljabar abstrak dikenal suatu teori yang berkaitan dengan cara menuliskan suatu grup sebagai sekumpulan matriks. Teori ini dikenal dengan nama Teori Representasi. Lebih tepatnya, representasi adalah homomorfisma dari grup hingga G ke grup yang beranggotakan matriks $n \times n$ yang dapat dibalik dengan unsur di $\mathbb{C}$. Teori representasi grup diantaranya representasi yang ekivalen dan kernel dari representasi.

Misalkan $\rho: G \to GL_n(\mathbb{C})$ dan $\sigma : G \to GL_m(\mathbb{C})$ merupakan dua representasi dari G. ρ dikatakan ekivalen dengan σ jika $n = m$ dan terdapat $T \in GL_n(\mathbb{C})$ sedemikian sehingga $\sigma(g) = T^{-1}\rho(g)T$ untuk setiap $g \in G$. Representasi ini disebut representasi yang ekivalen.

Kernel dari representasi $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ yang didefinisikan sebagai $K_\rho = \{g \in G: \rho(g) = I_n\}$ dengan I_n adalah matriks identitas. Dalam teori kernel dari representasi terdapat suatu representasi yang trivial. Misalkan $\rho : G \to GL_1(\mathbb{C})$ suatu representasi dengan $\rho(g) = (1)$ untuk setiap $g \in G$. ρ yang didefinisikan seperti ini disebut representasi trivial dari G. Representasi trivial dari G adalah representasi di mana setiap unsur dari grup G dipetakan ke matriks identitas 1×1.

Misalkan G grup hingga dan $\rho: G \to GL_n(\mathbb{C})$ suatu representasi grup G. Representasi ρ dikatakan *faithful* jika $K_\rho = \{1\}$, yaitu jika 1 unsur identitas dari G adalah satu-satunya unsur g yang memenuhi $\rho(g) = I_n$.

Konsep kernel dari representasi mempunyai banyak peranan dalam representasi *faithful*. Representasi *faithful* juga berkaitan dengan dengan representasi trivial. Hal ini akan dijelaskan lebih rinci pada Bab III.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka perumusan masalah dalam penelitian ini adalah

1. Bagaimana menentukan representasi *faithful* pada grup hingga G.
2. Bagaimana hubungan antara representasi yang ekivalen dengan representasi *faithful*.
3. Bagaimana hubungan antara suatu representasi trivial dari grup G dengan representasi *faithful*.

1.3 Pembatasan Masalah

Teori representasi grup terbagi menjadi sub teori yang tergantung pada grup yang diwakili. Pada tulisan ini hanya akan dibahas representasi *faithful* dari suatu grup hingga pada ruang vektor hingga atas lapangan kompleks.

1.4 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk:

1. Menjelaskan bahwa suatu representasi *faithful* dari sebuah grup hingga G.
2. Menjelaskan bahwa semua representasi yang ekivalen dengan representasi *faithful* adalah representasi *faithful.*
3. Menjelaskan bahwa suatu representasi trivial dari grup G adalah representasi *faithful.*

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut: Bab I Pendahuluan, berisi: latar belakang masalah, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan. Bab II Landasan teori, memuat tentang: beberapa definisi dan teorema matriks dan invers matriks, definisi grup, subgrub dan koset, subgrup normal, grup faktor dan homomorfisma grup, dan representasi grup. Bab III Pembahasan, berisi tentang: definisi representasi *faithful*, teorema, lema serta contoh yang mendukung masalah. Bab IV kesimpulan berisi: kesimpulan dari pembahasan.

BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam bab ini akan dijelaskan tentang definisi relasi, beberapa definisi dalam teori matriks, serta beberapa definisi dalam grup yang akan digunakan dalam pembahasan selanjutnya.

2.1 Relasi

Definisi 2.1.1 [3]

Misalkan A himpunan tak kosong dan $\sim$ suatu relasi pada A. Relasi $\sim$ disebut relasi ekivalen di A jika untuk setiap a, b, c di A berlaku:

1. Jika $a \sim a$. Sifat ini dinamakan sifat refleksif.
2. Jika $a \sim b$ maka $b \sim a$. Sifat ini dinamakan sifat simetri.
3. Jika $a \sim b$ dan $b \sim c$ maka $a \sim c$. Sifat ini dinamakan sifat transitif.

2.2 Matriks dan Invers Matriks

Definisi 2.2.1 [1]

Jika A adalah matriks kuadrat dan jika terdapat matriks B, sehingga $AB = BA = I$, maka A dikatakan dapat dibalik (*invertible*) dan B dinamakan invers (*inverse*) dari A.

Teorema 2.2.2 [1]

Jika A dan B adalah matriks-matriks yang dapat dibalik dan ukurannya sama, maka

1. AB dapat dibalik.
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Untuk bukti lihat di [1] hal 36.

Definisi 2.2.3 [1]

Jika A adalah sebuah matriks kuadrat, maka didefinisikan pangkat-pangkat bilangan bulat taknegatif A menjadi

1. $A^0 = I$,
2. $A^n = A.A \dots A \ (n > 0)$.

Selanjutnya akan dijelaskan tentang bentuk-bentuk bilangan kompleks.

2.3 Bilangan Kompleks

Definisi 2.3.1[6]

Bentuk-bentuk bilangan kompleks adalah:

1. Bentuk kartesius

   $z = x + iy$, dengan $x, y \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$.

2. Bentuk polar

   $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$,

   dengan $r = |z|$ dan $\theta = \arg(z)$.

   Range argumen utama: $0 \le \mathrm{Arg}(z) \le 2\pi$, sehingga $\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi$,

   dengan $k \in \mathbb{Z}$

   Hubungan bentuk polar dengan bentuk penjumlahan adalah:

   $$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ dan } \theta = tan^{-1}\frac{y}{x}.$$

3. Bentuk eksponen

   $z = re^{i\theta}$.

   Menurut rumus *Euler*, $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Misalkan n adalah bilangan bulat positif dan $\mathbb{C}$ adalah himpunan bilangan kompleks. Misalkan w adalah akar pangkat n dari bilangan kompleks z.

Misal $1^{\frac{1}{n}} = w$ dengan $w \in \mathbb{C}$.

Maka $1 = w^n$.

Misal $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Maka berdasarkan rumus *de Moivre*, $w^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

Karena $1 \in \mathbb{C}$ bisa ditulis sebagai $1 = 1(\cos 0 + \sin 0)$,

maka $1(\cos 0 + \sin 0) = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

Sehingga diperoleh:

$$r^n = 1 \text{ atau } r = 1.$$

$$n\theta = 0 + 2k\pi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\theta = \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}.$$

Jadi, $w = 1\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right), k \in \mathbb{Z}$.

Untuk $k = 0$, maka $w = \cos 0 + i\sin 0 = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^0 = 1$.

Untuk $k = 1$, maka $w = \cos\left(\frac{2\pi.1}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi.1}{n}\right) = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^1$.

Untuk $k = 2$, maka $w = \cos\left(\frac{2\pi.2}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi.2}{n}\right) = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^2$.

$\vdots$

Untuk $k = n - 1$, maka $w = \cos\left(\frac{2\pi.(n-1)}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi.(n-1)}{n}\right) = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^{n-1}$.

Jadi,

$$w = 1^{\frac{1}{n}} = \left\{1, \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^1, \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^2, \cdots, \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^{n-1}\right\}.$$

Selanjutnya akan dijelaskan tentang grup, yaitu sifat-sifat grup dan grup siklik.

2.4 Grup

Definisi 2.4.1 [2]

Misalkan G adalah suatu himpunan tak kosong. G dikatakan suatu grup jika pada G dapat didefinisikan suatu operasi biner, ditulis '$*$', sedemikian sehingga:

1. Untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$.
2. Untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$.
3. Terdapat suatu unsur di G yang dilambangkan dengan e, sehingga untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$.
4. Untuk setiap $a \in G$, terdapat suatu unsur b di G sehingga berlaku $a * b = b * a = e$ (setiap unsur di G mempunyai invers). Dengan kata lain $b = a^{-1}$.

Grup G dengan operasi biner '$*$', ditulis $(G,*)$.

Definisi 2.4.2 [5]

Misalkan G suatu grup. Banyaknya unsur di G disebut orde dari G, yang dinotasikan sebagai $|G|$. Jika banyaknya unsur di G adalah hingga, maka G dinamakan grup hingga.

Definisi 2.4.3 [4]

Misalkan G suatu grup. G disebut grup siklik, jika terdapat $a \in G$ sehingga $G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$. Dalam hal ini a disebut generator atau pembangun dari G.

Definisi 2.4.4 [5]

Himpunan dari akar ke-n dari 1 di $\mathbb{C}$ merupakan suatu grup berorde n yang ditulis dengan C_n, C_n disebut grup siklik berorde n.

Misal $a = e^{2\pi i/n}$, maka

$$C_n = \langle a \rangle = \{a^0, a, a^2, \cdots, a^{n-1}\},$$

dan $a^n = 1$.

Lema 2.4.5 [3]

Misalkan G suatu grup dan $a, b, u, w \in G$, maka persamaan $ax = b$ dan $ya = b$ memiliki solusi tunggal untuk x dan y di G, dan berlaku hukum pembatalan kiri dan kanan di G, yaitu

$$au = aw \Rightarrow u = w,$$

$$\text{dan } ua = wa \Rightarrow u = w.$$

Selanjutnya akan dijelaskan tentang subgrup, koset kiri dan koset kanan pada grup.

2.5 Subgrup dan Koset

Definisi 2.5.1 [2]

Misalkan $(G,*)$ suatu grup, $H \subseteq G$ dan $H \neq \emptyset$. H dikatakan subgrup dari grup G jika H membentuk grup terhadap operasi yang didefinisikan pada G.

Lema 2.5.2 [3]

Misalkan G grup. Himpunan bagian tak kosong H dari G adalah subgrup dari G jika dan hanya jika

1. Setiap $a, b \in H$ berlaku $ab \in H$.
2. Setiap $a \in H$ berlaku $a^{-1} \in H$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Misalkan G suatu grup dan H subgrup dari G, maka H membentuk grup terhadap operasi biner yang ada di G. Akibatnya

1. Setiap $a, b \in H$ berlaku $ab \in H$.
2. Setiap $a \in H$ berlaku $a^{-1} \in H$.

($\Leftarrow$) Misalkan G suatu grup, $H \subseteq G, H \neq \emptyset$ yang memenuhi

1. Setiap $a, b \in H$ berlaku $ab \in H$.
2. Setiap $a \in H$ berlaku $a^{-1} \in H$.

Akan ditunjukkan H subgrup dari G (H membentuk grup terhadap operasi yang di definisikan di G), yaitu terhadap operasi di G, H mempunyai sifat:

(1) Bersifat tutup. Ambil $a, b \in H$, karena H memenuhi sifat 1, maka $a, b \in H$.

(2) Bersifat asosiatif. Ambil sebarang $a, b \in H$, karena $H \subseteq G$ maka $a, b, c \in G$, karena G grup, maka berlaku

$$a(bc) = (ab)c.$$

(3) Terdapat unsur identitas di H. Ambil sebarang $a \in H$, karena H memenuhi sifat 2, maka $a^{-1} \in H$. Karena $a, a^{-1} \in H$ dan H memenuhi sifat 1, maka

$$e = a^{-1}a = aa^{-1} \in H.$$

(4) Setiap unsur di H mempunyai invers. Ambil sebarang $a \in H$, karena H memenuhi sifat 2, maka $a^{-1} \in H$.

Dari 1, 2, 3, dan 4, maka H subgrup dari G.

Definisi 2.5.3 [3]

Misalkan H suatu subgrup dari G dan $a \in G$. $Ha = \{ha | h \in H\}$ disebut koset kanan yang memuat a dari H di G dan $aH = \{ah | h \in H\}$ disebut koset kiri yang memuat a dari H di G.

Selanjutnya akan dijelaskan tentang subgrup normal, yaitu tentang definisi dan sifat-sifat subgrup normal.

2.6 Subgrup Normal

Definisi 2.6.1 [2]

Misalkan G suatu grup dan N suatu subgrup dari G. N disebut subgrup normal dari G jika untuk setiap $g \in G$ dan setiap $n \in N$ berlaku $gng^{-1} \in N$.

Lema 2.6.2 [3]

Misalkan G suatu grup dan N subgrup dari G. N disebut subgrup normal dari G jika dan hanya jika $Ng = gN$ untuk setiap $g \in G$.

Untuk bukti lihat di [3] hal 51.

Lema 2.6.3 [3]

Misalkan G suatu grup dan N suatu subgrup dari G. N subgrup normal dari G jika dan hanya jika $NaNb = Nab$, untuk setiap $a, b \in G$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Misalkan N suatu subgrup normal dari grup G. Akan ditunjukkan setiap a, b berlaku

$$NaNb = Nab.$$

Karena N subgrup normal dari G, maka setiap $g \in G$ berlaku

$$Ng = gN.$$

Perhatikan bahwa

$$NaNb = N(aN)b = N(Na)b,$$

$$N^2ab = Nab.$$

Karena $a, b \in G$ diambil sebarang, maka dapat disimpulkan setiap $a, b \in G$ berlaku

$$NaNb = Nab.$$

($\Leftarrow$) Misalkan N subgrup dari grup G dan setiap $a, b \in G$ berlaku $NaNb = Nab$. Akan ditunjukkan bahwa N subgrup normal, yaitu untuk setiap $g \in G$ dan setiap $n \in N$ berlaku

$$gng^{-1} \in N.$$

Karena untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $NaNb = Nab$, maka

$$N = Ne = N(gg^{-1}) = NgNg^{-1}.$$

Ambil sebarang $n \in N$ dan $g \in G$. Perhatikan bahwa

$$gng^{-1} = e(gng^{-1}) \in \{n_1gn_2g^{-1} | n_1n_2 \in N\} = NgNg^{-1} = N.$$

Karena g dan n diambil sebarang, maka dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $n \in N$ dan $g \in G$ berlaku

$$gng^{-1} \in N.$$

Selanjutnya akan dijelaskan tentang grup faktor, pemetaan homomorfisma grup.

2.7 Grup Faktor dan Homomorfisma Grup

Teorema 2.7.1 [3]

Misalkan G suatu grup dan N suatu subgrup normal dari G, dengan G/N juga suatu grup. Grup G/N disebut grup faktor atau grup kuosien.

Bukti:

Misalkan N suatu subgrup normal dari grup G. Tulis $G/N = \{Na | a \in G\}$. Definisikan operasi $NaNb = Nab$, untuk setiap Na dan Nb di G/N. Akan ditunjukkan bahwa G/N suatu grup.

1. Karena $e \in G$ dan $Ne = N$, maka $N \in \{Na | a \in G\} = G/N$.
2. Misalkan $x, y \in G/N$, $x = Na$, $y = Nb$, untuk suatu $a, b \in G$. Perhatikan bahwa

$$xy = NaNb = Nab.$$

Karena $a, b \in G$ dan G grup maka $ab \in G$. Akibatnya

$$xy = Nab \in G/N.$$

3. Misalkan $x, y, z \in G/N$, maka $x = Na$, $y = Nb$, $z = Nc$ untuk suatu $a, b, z \in G$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} x(yz) &= Na(NbNc), \\ &= Na(Nbc) = Na(bc), \\ &= N(ab)c, \\ &= NabNc, \\ &= (NaNb)Nc, \\ &= (xy)z. \end{aligned}$$

4. Ne unsur identitas di G/N. Ambil sebarang $Na \in G/N$. Perhatikan bahwa

$$NeNa = Nea = Na,$$
$$NaNe = Nae = Na.$$

5. Ambil $x \in G/N$, maka $x = Na$ untuk suatu $a \in G$. Perhatikan bahwa

$$NaNa^{-1} = Naa^{-1} = Ne = N,$$
$$Na^{-1}Na = Na^{-1}a = Ne = N.$$

Ini berarti, Na^{-1} adalah invers dari Na.

Karena G/N tidak kosong dan bersifat: tutup, asosiatif, mempunyai unsur identi itas, dan setiap unsurnya mempunyai invers maka G/N merupakan grup.

Lema 2.7.2 [3]

Misalkan G suatu grup hingga dan N subgrup normal dari G, maka

$$|G/N| = |G|/|N|.$$

Bukti:

Misalkan G suatu grup hingga dan N subgrup normal dari G. Akan ditunjukkan $|G/N| = |G|/|N|$. Perhatikan bahwa

$$|G/N| = \text{banyak koset kanan berbeda di } G/N,$$

$$= orde \text{ dari } N \text{ di } G,$$

$$= |G|/|N|.$$

Definisi 2.7.3 [2]

Pemetaan dari grup G ke grup G', yaitu $\varphi : G \rightarrow G'$, disebut homomorfisma grup jika untuk setiap unsur a dan b di G berlaku $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Definisi 2.7.4 [2]

Pemetaan $\varphi: G \rightarrow G'$ dikatakan satu-satu, jika untuk setiap unsur a dan b di G yang dipetakan sama oleh φ, yaitu $\varphi(a) = \varphi(b)$ berlaku $a = b$.

Definisi 2.7.5 [2]

Pemetaan $\varphi: G \rightarrow G'$ dikatakan pada, jika untuk setiap $b \in G'$ terdapat $a \in G$ yang memenuhi $\varphi(a) = b$.

Teorema 2.7.6 [3]

Misalkan G suatu grup dan N suatu subgrup normal dari G. Pemetaan $\varphi : G \rightarrow G/N$ dengan $\varphi(x) = Nx$ adalah suatu pemetaan homomorfisma dari G ke G/N.

Bukti:

Misalkan N suatu subgrup normal dari G. Akan ditunjukkan bahwa pemetaan $\varphi : G \rightarrow G/N$ dengan $\varphi(x) = Nx$ suatu pemetaan homomorfisma dari G ke G/N.

Ambil $a, b \in G$. Perhatikan bahwa

$$\varphi(ab) = Nab.$$

Karena N subgrup normal, maka $Nab = NaNb$, sehingga

$$\varphi(ab) = Nab = NaNb = \varphi(a)\varphi(b).$$

Ini berarti, φ suatu pemetaan homomorfisma.

Ambil $y \in G/N$, maka $y = Na$, untuk suatu $a \in G$. Pilih $1 \in G$, maka $\varphi(a) = Na = y$. Ini berarti, φ pada.

Definisi 2.7.7 [3]

Misalkan G dan G' masing-masing adalah grup dan φ suatu pemetaan homomorfisma dari G ke G'. Himpunan $K_\varphi = \{x \in G | \varphi(x) = e'\}$ dengan e' unsur identitas di G' disebut Kernel dari pemetaan homomorfisma φ.

Definisi 2.7.8 [5]

Misalkan G dan G' masing-masing adalah grup dan φ suatu pemetaan homomorfisma dari G ke G'. Peta(φ)=$\{\varphi(x) | x \in G\}$ disebut Peta dari pemetaan homomorfisma φ. Peta(φ) adalah subgrup dari G'.

Lema 2.7.9 [3]

Misalkan G dan G' adalah grup dan φ suatu pemetaan homomorfisma dari G ke G', maka K_φ suatu subgrup normal dari G.

Bukti:

Misalkan φ suatu pemetaan homomorfisma dari grup G ke grup G'. Akan ditunjukkan bahwa $K_\varphi = \{x \in G | \varphi(x) = e'\}$ dengan unsur identitas di G' suatu subgrup normal dari G, yaitu: (1) K_φ suatu subgrup dari G, (2) $gkg^{-1} \in K_\varphi$ untuk setiap $k \in K_\varphi$ dan $g \in G$.

1. Akan ditunjukkan K_φ suatu subgrup dari G, yaitu $K_\varphi \subseteq G$, $K_\varphi \neq \emptyset$, dan setiap $x, y \in K_\varphi$ berlaku $xy^{-1} \in K_\varphi$.

a. Karena $K_{\varphi} = \{x \in G | \varphi(x) = e'\}$ dengan unsur identitas di G', maka $K_{\varphi} \subseteq G$.

b. Karena $e \in G$ dan $\varphi(e) = e'$ maka $e \in K_{\varphi}$.

c. Ambil sebarang $x, y \in K_{\varphi}$. Karena φ pemetaan homomorfisma, maka

$$\varphi(xy^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y^{-1}),$$
$$= e[\varphi(y)]^{-1} = ee^{-1} = e.$$

Ini berarti, $xy^{-1} \in K_{\varphi}$.

2. Akan ditunjukkan K_{φ} subgrup normal, yaitu setiap $g \in G$ dan $k \in K_{\varphi}$ dan berlaku $gkg^{-1} \in K_{\varphi}$. Ambil $g \in G$ dan $k \in K_{\varphi}$, karena φ suatu pemetaan homomorfisma, maka

$$\varphi(gkg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(kg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(k)\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)e'[\varphi(g)]^{-1},$$
$$= \varphi(g)[\varphi(g)]^{-1} = e'.$$

Ini berarti,

$$gkg^{-1} \in K_{\varphi}.$$

Definisi 2.7.10 [3]

Suatu homomorfisma φ dari G ke G' dikatakan isomorfisma jika φ bersifat satu-satu dan pada.

Definisi 2.7.11 [2]

Dua grup G dan G' dikatakan isomorf jika terdapat isomorfisma grup $\varphi : G \rightarrow G'$. Dua grup G dan G' yang isomorf kita tandai dengan $G \cong G'$.

Akibat 2.7.12 [3]

Misalkan G dan G' suatu grup dan φ suatu pemetaan homomorfisma dari G ke G' dengan kernel K_{φ}. φ pemetaan satu-satu jika dan hanya jika $K_{\varphi} = \{e\}$.

Untuk bukti lihat di [3] hal 59.

Teorema 2.7.13 [3]

Misalkan G dan G' suatu grup dan φ suatu homomorfisma dari G ke G' dengan kernel K_φ maka $G/K_\varphi \cong G'$.

Bukti:

Misalkan φ suatu homomorfisma dari grup G ke grup G' dengan kernel K_φ. Akan ditunjukkan $G/K_\varphi \cong G'$, terdapat pemetaan isomorfisma θ dari G/K_φ ke G'. Karena K_φ kernel dari φ maka K_φ subgrup normal dari G. Akibatnya G/K_φ grup faktor. Didefinisikan pengaitan $\theta: G/K_\varphi \rightarrow G'$.

$$K_\varphi g \longmapsto \varphi(g).$$

Akan ditunjukkan bahwa : θ terdefinisi dengan baik, θ pemetaan homomorfisma, θ pemetaan satu-satu, dan θ pemetaan pada.

1. Ambil sebarang $x, y \in G/K_\varphi$ dengan $x = y$, akan ditunjukkan bahwa $\theta(x) = \theta(y)$. Karena $x, y \in G/K_\varphi$ dan $x = y$, maka $x = K_\varphi g_1 = K_\varphi g_2 = y$ untuk suatu g_1 dan g_2 di G. Akibatnya

   $$g_1 g_2^{-1} \in K_\varphi,$$

   yaitu

   $$g_1 g_2^{-1} = k \text{ untuk suatu } k \in K_\varphi.$$

   Karena φ suatu pemetaan homomorfisma, maka

   $$e' = \varphi(k) = \varphi(g_1 g_2^{-1}) = \varphi(g_1)[\varphi(g_2^{-1})] = \varphi(g_1)[\varphi(g_2)]^{-1}.$$

   Akibatnya

   $$\varphi(g_1) = \varphi(g_2).$$

   Perhatikan bahwa

$$\theta(x) = \theta(K_\varphi g_1) = \varphi(g_1) = \varphi(g_2) = \theta(K_\varphi g_2) = \theta(y).$$

Ini berarti, θ terdefinisi dengan baik (θ suatu pemetaan).

2. Ambil sebarang $x, y \in G/K_\varphi$, maka $x = K_\varphi g_1$ dan $y = K_\varphi g_2$ untuk suatu $g_1, g_2 \in G$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\theta(xy) &= \theta(K_\varphi g_1 K_f g_2) = \theta(K_\varphi g_1 g_2),\\
&= \varphi(g_1 g_2),\\
&= \varphi(g_1)\varphi(g_2),\\
&= \theta(K_\varphi g_1) h(K_\varphi g_2),\\
&= \theta(x) h(y).
\end{aligned}$$

Karena $x, y \in G/K_\varphi$ diambil sebarang, maka dapat disimpulkan bahwa setiap $x, y \in G/K_\varphi$ berlaku $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$. Ini berarti, θ suatu pemetaan homomorfisma.

3. Akan ditunjukkan bahwa θ pemetaan satu-satu, yaitu dengan menunjukkan bahwa kernel dari θ hanya memuat unsur identitas di G/K_φ, yaitu K_φ. Perhatikan bahwa

$$\theta(K_\varphi) = \theta(K_\varphi e) = \varphi(e) = e'\{\,\varphi\ homomorfisma\}.$$

Ini berarti,

$$\{K_{f\varphi}\} \subseteq K_\theta.$$

Ambil sebarang $x \in K_\theta$, maka $x \in G/K_\varphi$ dan $\theta(x) = e'$. Karena $x \in G/K_\varphi$, maka $x = K_\varphi g$ untuk suatu g di G. Perhatikan bahwa

$$e' = \theta(x) = \theta(K_\varphi g) = \varphi(g).$$

Ini berarti, $g \in K_\varphi$. Akibatnya

$$K_{\varphi}g = K_{\varphi}.$$

Karena $x \in K_{\theta}$ diambil sebarang, maka dapat disimpulkan bahwa setiap $x \in K_{\theta}$ berlaku $x = K_{\varphi}$, yaitu $K_{\theta} \subseteq \{K_{\varphi}\}$.

Karena $\{K_{\varphi}\} \subseteq K_{\theta}$ dan $K_{\theta} \subseteq \{K_{\varphi}\}$, maka $K_{\theta} = \{K_{\varphi}\}$.

4. Ambil sebarang $y \in G'$, karena φ pemetaan dari G ke G', maka ada $x \in G$ sehingga $\varphi(x) = y$. Perhatikan bahwa

$$\theta(K_{\varphi}x) = \varphi(x) = y.$$

Pilih $z = K_{\varphi}x \in G/K_{\varphi}$, maka $\theta(z) = y$.

Karena $y \in G'$ diambil sebarang, maka dapat disimpulkan bahwa setiap $y \in G'$ terdapat $z = K_{\varphi}x \in G/K_{\varphi}$ sehingga $\theta(z) = y$. Ini berarti, θ pemetaan pada.

BAB III

REPRESENTASI *FAITHFUL*

Pada bab ini akan dijelaskan tentang representasi *faithful*, representasi yang ekivalen ke representasi *faithful*, dan representasi trivial yang berkaitan dengan *faithful*.

3.1 Representasi Grup

Definisi 3.1.1 [5]

Grup yang beranggotakan matriks $n \times n$ yang dapat diinverskan dengan komponennya di $\mathbb{C}$ dinotasikan sebagai $GL_n(\mathbb{C})$ dinamakan grup linier umum (*general linier*) berderajat n atas $\mathbb{C}$.

Definisi 3.1.2 [5]

Suatu representasi dari G adalah homomorfisma grup

$$\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$$

untuk suatu $n \in \mathbb{N}$ bilangan asli, n dinamakan derajat dari ρ.

Dengan demikian, jika ρ adalah suatu fungsi dari G ke $GL_n(\mathbb{C})$, maka ρ adalah suatu representasi jika dan hanya jika

$$\rho(g)\rho(h) = \rho(gh) \text{ untuk setiap } g, h \in G.$$

Dari sifat homomorfisma grup, jika $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ adalah suatu representasi dan 1 adalah elemen identitas dari G, maka

$$\rho(1) = I_n \text{ dan } \rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1} \text{ untuk setiap } g \in G.$$

3.2 Kernel dari Representasi

Definisi 3.2.1 [5]

Misalkan G suatu grup hingga dan $\rho: G \to GL_n(\mathbb{C})$ suatu representasi grup. Kernel dari representasi ρ didefinisikan sebagai

$$K_\rho = \{g \in G: \rho(g) = I_n\}.$$

Contoh 3.1

Misalkan $G = C_2 = \{1, a\}$ merupakan grup siklik dengan dua unsur di G dan $a^2 = 1$. Definisikan operasi "." di G seperti tabel dibawah ini

.	1	a
1	1	a
a	a	1

dan definisikan pemetaan

$$\rho : G \to GL_2(\mathbb{C})$$

$$a^r \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^r, r \in \{0,1\} \subseteq \mathbb{Z}.$$

Akan dicari kernel dari ρ. Ambil sebarang x, y di $G = C_2$.

Kasus 1: $x = 1, y = 1$. Perhatikan bahwa

$$\rho(x.y) = \rho(1.1) = \rho(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\rho(x).\rho(y) = \rho(1)\rho(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kasus 2: $x = 1, y = a$. Perhatikan bahwa

$$\rho(x.y) = \rho(1.a) = \rho(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\rho(x).\rho(y) = \rho(1).\rho(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kasus 3: $x = a, y = a$. Perhatikan bahwa

$$\rho(x.y) = \rho(a.a) = \rho(a^2) = \rho(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\rho(x).\rho(y) = \rho(a).\rho(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ini berarti, ρ homomorfisma grup dari G ke $GL_2(\mathbb{C})$, maka ρ merupakan representasi dari C_2 berderajat dua. Karena $1, a \in G = C_2$ yang memenuhi $\rho(1) = \rho(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$, maka $K_\rho = \{1, a\}$.

Teorema 3.2.2 [5]

Misalkan G dan $GL_n(\mathbb{C})$ adalah grup dan ρ suatu representasi grup dari G ke $GL_n(\mathbb{C})$, maka K_ρ suatu subgrup normal dari G.

Bukti:

Misalkan ρ suatu representasi dari grup G ke grup $GL_n(\mathbb{C})$. Akan ditunjukkan bahwa $K_\rho = \{g \in G | \rho(g) = I_n\}$ dengan I_n unsur identitas di $GL_n(\mathbb{C})$ suatu subgrup normal dari G, yaitu: (1) K_ρ suatu subgrup dari G, (2) $gkg^{-1} \in K_\rho$ untuk setiap $k \in K_\rho$ dan $g \in G$.

1. Akan ditunjukkan K_ρ suatu subgrup dari G, yaitu $K_\rho \subseteq G$, $K_\rho \neq \emptyset$, dan setiap $x, y \in K_\rho$ berlaku $xy^{-1} \in K_\rho$.

   a. Karena $K_\rho = \{g \in G | \rho(g) = I_n\}$ maka $K_\rho \subseteq G$.

   b. Karena $e \in G$ dan ρ suatu representasi, maka ρ homomorfisma grup. $\rho(e) = I_n$ maka $e \in K_\rho$. Ini berarti $K_\rho \neq \emptyset$.

   c. Ambil sebarang $x, y \in K_\rho$. Karena ρ representasi grup, maka

$$\rho(xy^{-1}) = \rho(x)\rho(y^{-1}),$$
$$= I_n[\rho(y)]^{-1} = I_n I_n^{-1} = I_n.$$

Ini berarti, $xy^{-1} \in K_\rho$.

2. Akan ditunjukkan K_ρ subgrup normal, yaitu untuk setiap $g \in G$ dan $k \in K_\rho$ dan berlaku $gkg^{-1} \in K_\rho$. Ambil $g \in G$ dan $k \in K_\rho$. Karena ρ suatu representasi grup, maka

$$\rho(gkg^{-1}) = \rho(g)\rho(kg^{-1}) = \rho(g)\rho(k)\rho(g^{-1}) = \rho(g)I_n[\rho(g)]^{-1},$$
$$= \rho(g)[\rho(g)]^{-1} = I_n.$$

Ini berarti,

$$gkg^{-1} \in K_\rho.$$

Selanjutnya akan dijelaskan suatu konsep representasi *faithful* dan akan ditunjukkan bahwa suatu representasi yang ekivalen ke representasi *faithful* adalah *faithful*.

3.3 Representasi *Faithful*

Definisi 3.3.1 [5]

Misalkan G grup hingga dan $\rho: G \to GL_n(\mathbb{C})$ suatu representasi grup. Representasi ρ dikatakan *faithful* jika $K_\rho = \{1\}$, yaitu jika 1 unsur identitas dari G adalah satu-satunya unsur g yang memenuhi $\rho(g) = I_n$.

Contoh 3.2

Misalkan $G = C_2 = \{1, a\}$ merupakan grup siklik dengan dua unsur di G dan $a^2 = 1$. Definisikan operasi "." di G seperti tabel dibawah ini

.	1	a
1	1	a
a	a	1

dan definisikan pemetaan

$$\rho : G \to GL_2(\mathbb{C})$$

$$a^r \mapsto \begin{bmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{bmatrix}^r, r \in \{0,1\} \subseteq \mathbb{Z}.$$

Akan dicari kernel dari ρ. Ambil sebarang x, y di $G = C_2$.

Kasus 1: $x = 1, y = 1$. Perhatikan bahwa

$$\rho(x.y) = \rho(1.1) = \rho(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2,$$

$$\rho(x).\rho(y) = \rho(1)\rho(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Kasus 2: $x = 1, y = a$. Perhatikan bahwa

$$\rho(x.y) = \rho(1.a) = \rho(a) = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{bmatrix},$$

$$\rho(x).\rho(y) = \rho(1).\rho(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{bmatrix}.$$

Kasus 3: $x = a, y = a$. Perhatikan bahwa

$$\rho(x.y) = \rho(a.a) = \rho(a^2) = \rho(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2,$$

$$\rho(x).\rho(y) = \rho(a).\rho(a) = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Ini berarti, ρ homomorfisma grup dari G ke $GL_2(\mathbb{C})$, maka ρ merupakan representasi dari C_2 berderajat dua. Karena 1 unsur identitas dari G adalah satu-satunya unsur g yang memenuhi $\rho(g) = I_2$, maka $K_\rho = \{1\}$. Ini berarti, ρ *faithful*

Proposisi 3.3.2 [5]

Misalkan G suatu grup hingga dan ρ suatu representasi dari G. Repesentasi ρ *faithful* jika dan hanya jika Peta(ρ) isomorfik ke G.

Bukti:

($\Rightarrow$) Misalkan G suatu grup hingga dan ρ suatu representasi dari grup G ke grup $GL_n(\mathbb{C})$. Karena ρ *faithful*, maka berdasarkan Definisi 3.3.1 [5] $K_\rho = \{1\}$. Berdasarkan Teorema 3.2.2 [5], maka K_ρ adalah subgrup normal dari G. Akibatnya G/K_ρ grup faktor. Akan ditunjukkan $G \cong$ Peta(ρ) berdasarkan Teorema 2.6.13 [3], yaitu dengan menunjukkan $G/K_\rho \cong$ Peta(ρ) atau dengan kata lain, bahwa terdapat pemetaan isomorfisma ϑ dari G/K_ρ ke Peta(ρ). Didefinisikan pengaitan

$$\vartheta : G/K_\rho \to \text{Peta}(\rho).$$

$$K_\rho g \mapsto \rho(g).$$

Akan ditunjukkan bahwa : ϑ terdefinisi dengan baik, ϑ pemetaan homomorfisma grup, ϑ representasi yang bersifat satu-satu, dan ϑ representasi yang bersifat pada.

1. Ambil sebarang $x, y \in G/K_\rho$ dengan $x = y$. Akan ditunjukkan bahwa $\vartheta(x) = \vartheta(y)$. Karena $x, y \in G/K_\rho$ dan $x = y$, maka $x = K_\rho g_1 = K_\rho g_2 = y$ untuk suatu g_1 dan g_2 di G. Akibatnya

$$g_1 g_2^{-1} \in K_\rho,$$

yaitu

$$g_1 g_2^{-1} = k \text{ untuk suatu } k \in K_\rho.$$

Karena ρ suatu homomorfisma grup, maka

$$I_n = \rho(k) = \rho(g_1 g_2^{-1}) = \rho(g_1)[\rho(g_2^{-1})] = \rho(g_1)[\rho(g_2)]^{-1}.$$

Akibatnya

$$\rho(g_1) = \rho(g_2).$$

Perhatikan bahwa

$$\vartheta(x) = \vartheta(K_p g_1) = \rho(g_1) = \rho(g_2) = \vartheta(K_\rho g_2) = \vartheta(y).$$

Ini berarti, ϑ terdefinisi dengan baik atau dengan kata lain, ϑ adalah suatu pemetaan.

2. Ambil sebarang $x, y \in G/K_\rho$, maka $x = K_\rho g_1$ dan $y = K_\rho g_2$ untuk suatu $g_1, g_2 \in G$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\vartheta(xy) &= \vartheta(K_\rho g_1 K_\rho g_2) = \vartheta(K_\rho g_1 g_2),\\ &= \rho(g_1 g_2),\\ &= \rho(g_1)\rho(g_2),\\ &= \vartheta(K_\rho g_1)\vartheta(K_\rho g_2),\\ &= \vartheta(x)\vartheta(y).\end{aligned}$$

Karena $x, y \in G/K_\rho$ diambil sebarang, maka dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $x, y \in G/K_\rho$ berlaku $\vartheta(xy) = \vartheta(x)\vartheta(y)$. Ini berarti, ϑ suatu homomorfisma grup.

3. Akan ditunjukkan bahwa ϑ representasi yang bersifat satu-satu, yaitu dengan menunjukkan bahwa kernel dari ϑ (K_ρ) hanya memuat unsur identitas di G/K_ρ, yaitu K_ρ. Perhatikan bahwa

$$\vartheta(K_\rho) = \vartheta(K_\rho e) = \rho(e) = I_n\{\, \rho \text{ representasi grup}\}.$$

Ini berarti,

$$\{K_\rho\} \subseteq K_\vartheta.$$

Ambil sebarang $x \in K_\vartheta$, maka $x \in G/K_\rho$ dan $\vartheta(x) = I_n$, yaitu karena ϑ homomorfisma grup dan unsur identitas di Peta(ρ). Karena $x \in G/K_\rho$, maka $x = K_\rho g$ untuk suatu g di G. Perhatikan bahwa

$$I_n = \vartheta(x) = \vartheta(K_\rho g) = \rho(g).$$

Ini berarti, $g \in K_\rho$. Akibatnya

$$K_\rho g = K_\rho.$$

Karena $x \in K_\vartheta$ diambil sebarang, maka dapat disimpulkan bahwa setiap $x \in K_\vartheta$ berlaku $x = K_\rho$, yaitu $K_\vartheta \subseteq \{K_\rho\}$.

Karena $\{K_\rho\} \subseteq K_\vartheta$ dan $K_\vartheta \subseteq \{K_\rho\}$, maka $K_\vartheta = \{K_\rho\}$.

Ini berarti, ϑ adalah representasi yang bersifat satu-satu.

4. Ambil sebarang $y \in \text{Peta}(\rho)$, karena ρ representasi grup dari G ke $GL_n(\mathbb{C})$, maka terdapat $x \in G$ sehingga $\rho(x) = y$. Perhatikan bahwa

$$\vartheta(K_\rho x) = \rho(x) = y.$$

Pilih $z = K_\rho x \in G/K_\rho$, maka $\vartheta(z) = y$.

Karena $y \in \text{Peta}(\rho)$ diambil sebarang, maka dapat disimpulkan bahwa setiap $y \in \text{Peta}(\rho)$ terdapat $z = K_\rho x \in G/K_\rho$ sehingga $\vartheta(z) = y$. Ini berarti, ϑ pemetaan grup pada.

Dari 1, 2, 3, dan 4 ,maka $G/K_\rho \cong \text{Peta}(\rho)$. Karena $G/K_\rho \cong \text{Peta}(\rho)$, maka $|G/K_\rho| = |\text{Peta}(\rho)|$ sehingga $|G|/|K_\rho| = |\text{Peta}(\rho)|$. Karena $|K_\rho| = 1$, maka $|G| = |\text{Peta}(\rho)|$. Karena ρ adalah pemetaan pada dan ordenya sama, maka ρ pemetaan satu-satu. Akibatnya $G \cong \text{Peta}(\rho)$.

($\Leftarrow$) Misalkan G adalah grup hingga dan ρ suatu representasi dari G ke $GL_n(\mathbb{C})$. $G \cong \text{Peta}(\rho)$, maka berlaku $G/K_\rho \cong \text{Peta}(\rho)$. ρ suatu homomrfisma grup dan $K_\rho = \{g \in G | \rho(g) = I_n\}$, yaitu I_n unsur identitas di Peta(ρ). K_ρ adalah subgrup normal dari G. Akan ditunjukkan ρ *faithful* yaitu dengan menunjukkan $|K_\rho| = 1$.

Karena $G \cong \text{Peta}(\rho)$ maka $|G| = |\text{Peta}(\rho)|$. Akibatnya $|K_\rho| = 1$, yaitu $K_\rho = \{1\}$. Ini berarti ρ *faithful.*

Definisi 3.3.3 [5]

Misalkan $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ dan $\sigma : G \to GL_m(\mathbb{C})$ merupakan dua representasi dari G. ρ dikatakan ekivalen dengan σ jika $n = m$ dan terdapat $T \in GL_n(\mathbb{C})$ sedemikian sehingga

$$\sigma(g) = T^{-1}\rho(g)T \text{ untuk setiap } g \in G.$$

Proposisi 3.3.4 [5]

Misalkan G suatu grup hingga. Semua representasi yang ekivalen dengan representasi *faithful* adalah *faithful.*

Bukti:

Misalkan $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ suatu representasi grup dari G ke $GL_n(\mathbb{C})$, $\sigma : G \to GL_m(\mathbb{C})$ suatu representasi grup dari G ke $GL_m(\mathbb{C})$, σ *faithful*, yaitu $K_\sigma = \{1\}$, yaitu jika 1 unsur identitas dari G adalah satu-satunya unsur g yang memenuhi $\sigma(g) = I_n$, ρ ekivalen dengan σ. Akan ditunjukkan ρ *faithful*, yaitu dengan menunjukkan $K_\rho = \{1\}$, yaitu 1 unsur identitas dari G adalah satu-satunya unsur g yang memenuhi $\rho(g) = I_n$.

Karena ρ ekivalen σ, maka terdapat $T \in GL_n(\mathbb{C})$ sehingga $\sigma(g) = T^{-1}\rho(g)T$. Karena σ *faithful* maka $K_\sigma = \{1\}$ dengan $\sigma(g) = I_n$ untuk g adalah unsur identitas di G. Perhatikan bahwa dari Definisi 3.3.3 [5]

$$\begin{aligned} \sigma(g) &= T^{-1}\rho(g)T, \\ I_n &= T^{-1}\rho(g)T, \\ TI_nT^{-1} &= TT^{-1}\rho(g)TT^{-1}, \\ I_n &= I_n\rho(g)I_n, \end{aligned}$$

$$I_n = \rho(g), g \text{ unsur identitas di } G.$$

Andaikan ada $h \in G$ sehingga $\rho(h) = I_n$ dan misalkan $\sigma(h) = A$, yaitu $A \neq I_n$.

Perhatikan bahwa

$$\sigma(h) = T^{-1}\rho(h)T,$$

$$A = T^{-1}I_nT,$$

$$A = I_n.$$

Karena σ *faithful*, maka $\sigma(h) \neq I_n$. Terlihat adanya kontradiksi, maka tidak ada $h \in G$ sehingga $\rho(h) = I_n$. Karena $\rho(g) = I_n$ dan g adalah unsur identitas di G, maka $K_\rho = \{1\}$. Ini berarti, ρ adalah *faithful.*

Selanjutnya akan dijelaskan suatu konsep representasi trivial dan kaitannya dengan representasi *faithful.*

3.4 Representasi Trivial

Definisi 3.4.1 [5]

Misalkan $\rho : G \rightarrow GL_1(\mathbb{C})$ suatu representasi yang didefinisikan sebagai berikut

$$\rho(g) = (1) \text{ untuk semua } g \in G.$$

Representasi ρ yang didefinisikan seperti yang diatas disebut representasi trivial dari G. Representasi trivial dari G adalah representasi dimana setiap unsur dari grup G dipetakan ke matrik identitas 1×1.

Proposisi 3.4.2 [5]

Misalkan G grup hingga dan ρ representasi trivial dari G. Representasi ρ *faithful* jika dan hanya jika $G = \{1\}$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Misalkan G grup hingga dan ρ representasi trivial dari G ke $GL_1(\mathbb{C})$ dan ρ adalah *faithful* yaitu $K_\rho = \{1\}$, yaitu 1 unsur identitas di G adalah satu-

satunya unsur g yang memenuhi $\rho(g) = I_n$. Akan ditunjukkan $G = \{1\}$, yaitu 1 unsur identitas di G adalah satu-satunya unsur g di G.

Karena ρ representasi trivial dari G dengan $\rho(g) = (1)$ untuk semua $g \in G$ maka $K_\rho = G$. Karena ρ *faithful*, maka $K_\rho = \{1\}$. Akibatnya $G = \{1\}$.

($\Leftarrow$) Misalkan $G = \{1\}$, yaitu 1 unsur identitas di G adalah satu-satunya unsur g di G. ρ suatu representasi trivial dari G ke $GL_n(\mathbb{C})$ yaitu $\rho(g) = (1)$ untuk semua $g \in G$. Akan ditunjukkan representasi trivial grup G adalah *faithful*, yaitu $K_\rho = \{1\}$, yaitu jika 1 unsur identitas dari G adalah satu-satunya unsur g yang memenuhi $\rho(g) = I_n$. Karena ρ representasi trivial dari G dengan $\rho(g) = (1)$ untuk semua $g \in G$, maka $K_\rho = G$. Karena $G = \{1\}$, maka $K_\rho = \{1\}$. Ini berarti ρ *faithful*.

BAB IV

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan pada bab sebelumnya, maka diperoleh kesimpulan bahwa kernel dari representasi ρ didefinisikan sebagai $K_\rho = \{g \in G : \rho(g) = I_n\}$ dan K_ρ suatu subgrup normal dari G. $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ suatu representasi grup. Representasi ρ dikatakan *faithful* jika $K_\rho = \{1\}$, yaitu jika 1 unsur identitas dari G adalah satu-satunya unsur g yang memenuhi $\rho(g) = I_n$. Representasi ρ *faithful* jika dan hanya jika Peta(ρ) isomorfik ke G. Semua representasi yang ekivalen dengan representasi *faithful* adalah *faithful*. $\rho : G \to GL_1(\mathbb{C})$ suatu representasi yang didefinisikan sebagai $\rho(g) = (1)$ untuk semua $g \in G$ disebut representasi trivial dari G. Representasi ρ trivial dari grup G *faithful* jika dan hanya jika $G = \{1\}$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Howard, Chris Rorres. 2004. *Terjemahan Aljabar Linier Elementer*. Penerbit Erlangga, Jakarta.

[2] Arifin, Achmad. 2000. *Aljabar*. Penerbit ITB, Bandung.

[3] Herstein, I.N. 2000. *Topics in Algebra*. Second Edition. Replika Press, New Delhi.

[4] Jacob, Bill. 1990. *Linear Algebra*. W.H. Freeman and Company, New York.

[5] James, Gordon, Martin Liebeck. 2001. *Representations and Characters of Groups*. Cambridge University Press.

[6] Ward, J.B, Ruel V.Churchill.1990. *Complex Variabeles and Applications*. Sixth Edition. McGraw-Hill, Inc, New York.

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis bernama Dedi Yulianto, dilahirkan di Padang pada tanggal 08 Januari 1988 dari pasangan Yuli Syafrizal dan Dasmawati, S.Pd. Penulis adalah anak pertama dari tiga bersaudara. Penulis menamatkan pendidikan Sekolah Dasar di SDN 36 Alang Lawas pada tahun 2000, SMP Negeri 4 Padang pada tahun 2003, dan SMA Negeri 6 Padang pada tahun 2006. Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur Reguler Mandiri (Seleksi Penerimaan Mahasiswa Baru). Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) pada tahun 2009 di Jorong Taratak Batuang Kenagarian Padang Laweh, Kabupaten Sijunjung dalam rangka menyelesaikan salah satu mata kuliah wajib jurusan dan fakultas.