# PELABELAN TOTAL SISI-AJAIB SUPER PADA GRAF PnUPn+1 UNTUK n GANJIL (n>3)

**SKRIPSI**

**NILAM YANI**
**06134002**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN**
**ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS ANDALAS**
**PADANG 2012**

**TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI**

Dengan ini dinyatakan bahwa:

| | | |
|---|---|---|
| Nama | : | Nilam Yani |
| Nomor Buku Pokok | : | 06 134 002 |
| Jurusan | : | Matematika |
| Bidang | : | Kombinatorik |
| Judul Skripsi | : | **Pelabelan Total Sisi-Ajaib Super pada Graf $P_n \cup P_{n+1}$ untuk $n$ Ganjil ($n \geq 3$)** |

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal **17 Januari 2012** berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing/Penguji,

1.

Dr. Syafrizal Sy
NIP: 19670807 199309 1 001

Penguji,

1.

Narwen, M. Si
NIP: 19670410 199702 1 001

2.

Zulakmal, M. Si
NIP: 19671108 199802 1 001

3.

Ir. Hazmira Yozza, M. Si
NIP:19690308 199403 2 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand

Dr. Syafrizal Sy
NIP: 19670807 199309 1 001


Allah...

Dalam tiap detik masalah yang datang padaku, Engkau selalu ada dan menemaniku untuk tetap kuat dalam menghadapi apapun.
Engkau selalu tidak pernah membuatku merasa sendiri.
Setia selalu dalam hari-hari ku.

"...dan ALLAH beserta kamu (menolongmu) dan DIA tdk akan mengurangkan (pahala) amalanmu".(Q.S Muhammad:35)

Mamak...

Tetes air matamu yang Kau sembunyikan, dapat terlihat dan kurasakan disini
Di kala aku rindu, aku sedih, aku kecewa, aku senang, aku marah, dan aku sakit.
Wajahmu yang selalu terbayang dalam tiap langkahku, selalu menjadi obat rasa rinduku
Aku sungguh merindukanmu, dan ingin segera memelukmu

Bapak...

Cintamu mengalir dalam jiwaku, hatiku selalu bergetar bila ingat dirimu
Senyummu yg selalu mengisi tampan wajahmu selalu teringat olehku
Mungkinkah suatu saat aku dapat mencium keningmu lagi disana (surga)
Sungguh tak tertahan airmata jika aku meningatmu
Candamu, sungguh amat aku rindukan
Saat ini aku seperti orang pincang yg tak memiliki satu kaki
Karena aku bgtu kehilanganmu
Semua cita$^2$ yg kita impikan bersama harus aku lalui sendiri tanpamu
Tak kuat hatiku untuk menahan air mataku.....aku sangat merindukanmu
Sangat merindukanmu.....

And specially for my sister....cik ndup
Hatimu tak sebesar tubuhmu (lebih besar lagi hatimu)
I love you so much

And tak lupa nilam aturkan terimakasih buat Pembimbingku Dr. Syafrizal, Sy. Makasih pak udah banyak memberi nilam ilmu dan motivasi serta dukungan yg teramat dalam menyelesaikan skripsi nilam. Dan juga buat para dosen pengujiku, Bu' Yozza, Pa' Narwen dan Pak Zul yg sdah member kritik dan saran serta membantu nilam dalam menyelsaikan seminar dan sidanh sarjana. Tak lupa pula seluruh Dosen dan Karyawan jurusan Math yg membantu nilam baik selama kuliah, seminar, dan pada episode FINAL (sidang sarjana).

For my soheb Nurul Mustika Siregar, S.si

Sohebku di medan perang (kuliah), medan kuliner (makan), and medan pertempuran (isak tangis, suka dan duka). Kalau kita pulang nanti, aku yakin kau kangen samaku 😁

Aku kan ngangenin😊

Tak lupa juga buat Dwi aninditya Siregar, S.si (adiknya Nurul Mustika S, anak umak dan bapaknya, kakaknya adek$^2$ nya😁)

Udah mulai ngelantur nie,,,,, 😁

Pokok ke semua$^2$ kru angkatan '06, '07, '08, etc yg berpartisipasi dalam memberi dukungan dan motivasi serta semangat buat nilam. Dan teruntuk guru mentoringku (Fadhilah Syamsi serta Surya Trisna) terimakasih banyak ya say... 😁

Dan buat sahabatku Imelda Fauziah, semangat ya plen...

Jangan malas2, jika gk ngerti denga TA nya tanya ya sama BELIAU....😁

Udah akh...

Terakhir TANKS A LOT FOR ALL

*"Bukanlah suatu aib jika kamu gagal dalam suatu usaha, yang merupakan aib adalah jika kamu tidak bangkit dari kegagalan itu (Ali bin Abu Thalib)".*

بسم الله الرحمن الرحيم

## KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah, Tuhan Pencipta alam semesta yang telah memberikan rahmat, hidayah, dan kekuatan-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Pelabelan Total Sisi-Ajaib Super pada Graf $P_n \cup P_{n+1}$ untuk $n$ Ganjil ($n \geq 3$)**", sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S. Si) di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Andalas.

Terima kasih yang sedalam-dalamnya penulis ucapkan kepada semua pihak yang telah membantu penulisan skripsi ini, terutama kepada:

1. Bapak **Dr. Syafrizal, Sy** selaku pembimbing yang dengan sabar telah meluangkan banyak waktu untuk memberikan bimbingan, petunjuk, masukan, dan motivasi selama penyusunan skripsi ini.
2. Bapak **Narwen, M. Si,** Bapak **Zulakmal, M. Si,** dan Ibu **Ir. Hazmira Yozza, M. Si** selaku penguji yang telah memberikan kritik dan saran pada seminar skripsi dan ujian sarjana.
3. Seluruh staf pengajar Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas yang telah memberikan bekal ilmu yang sangat bermanfaat.
4. Keluarga tercinta yang senantiasa memberikan dukungan dan semangat selama ini.

5. Teman-teman mahasiswa di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas, khususnya angkatan 2006, yang telah banyak menyumbangkan tenaga, inspirasi, dan motivasi selama penulis mengikuti studi.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat-Nya kepada mereka sebagai balasan atas semua kebaikan yang telah diberikan.

Penulis menyadari bahwa tulisan ini masih mempunyai banyak kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran sangat diharapkan demi penyempurnaannya. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat dalam perkembangan ilmu matematika, khususnya di Universitas Andalas.

Padang, Januari 2012

**Nilam Yani**

# ABSTRAK

Misal diberikan graf $G = (V, E)$ dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Pelabelan total sisi-ajaib pada $G$ adalah suatu pemetaan bijektif

$$f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, |V(G)| + |E(G)|\}$$

yang mempunyai sifat bahwa untuk setiap sisi $xy$ di $G$ berlaku

$$f(x) + f(xy) + f(y) = k,$$

untuk suatu konstanta $k$. Bilangan $k$ disebut konstanta ajaib pada pelabelan graf $G$. Pelabelan total sisi-ajaib $f$ pada graf $G$ disebut pelabelan total sisi-ajaib super bila $f(V(G)) \rightarrow \{1,2,\ldots,|V(G)|\}$. Dalam tugas akhir ini, akan ditunjukkan pelabelan total sisi-ajaib super pada graf $P_n \cup P_{n+1}$ untuk $n$ ganjil $(n \geq 3)$ dengan $k = 5n + 4$.

**Kata kunci**: *gabungan graf lintasan, konstanta ajaib, pelabelan total sisi-ajaib, pelabelan total sisi-ajaib super.*

# DAFTAR ISI

## DAFTAR GAMBAR

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Pelabelan graf adalah pemberian label bilangan bulat tak negatif $(\mathbb{Z}^+)$ pada titik atau sisi atau keduanya dengan memenuhi aturan-aturan tertentu, **[4]**. Dengan demikian, akan terdapat tiga jenis pelabelan graf, yaitu pelabelan graf pada titik, pelabelan graf pada sisi, dan pelabelan titik dan sisi (pelabelan total).

Dalam perkembangannya, pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya terutama pada sektor komunikasi dan transportasi, navigasi geografis, radar, penyimpanan data komputer, dan desain *integrated circuit* pada komponen elektronik.

Misal terdapat graf $G = (V, E)$ dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Pelabelan total sisi-ajaib pada $G$ adalah suatu pemetaan bijektif $f : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \ldots, |V(G)| + |E(G)|\}$ yang mempunyai sifat bahwa untuk setiap sisi $xy$ di $G$ berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$, untuk suatu konstanta $k$. Konstanta $k$ disebut angka ajaib (*konstanta ajaib*) graf $G$. Suatu graf $G$ dikatakan *total sisi-ajaib* jika pelabelan total sisi-ajaib dapat dikenakan padanya. Pelabelan ini untuk pertama kalinya diperkenalkan oleh Kotzig dan Rosa **[5]**, dengan istilah *magic valuations.* **[9]**

Pada **[8]** mengatakan bahwa dalam **[3]**, R. M. Figueroa-Centeno, R. Ichishima dan F. A. Muntaner-Batle menunjukkan bahwa $P_3 \cup nP_2$ adalah total sisi-ajaib super untuk setiap $n \geq 1$, dan $P_2 \cup P_n$ untuk setiap $n \geq 3$. Bila $f(V(G)) \to \{1,2, \ldots, |V(G)|\}$ maka $f$ disebut sebagai pelabelan total sisi-ajaib super.

Pada tugas akhir ini, penulis melakukan kajian mengenai *Pelabelan Total sisi-ajaib Super*, khususnya pada graf $P_n \cup P_{n+1}$ untuk *n* ganjil $(n \geq 3)$.

## 1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah apakah graf $P_n \cup P_{n+1}$ untuk *n* ganjil $(n \geq 3)$ memiliki pelabelan total sisi-ajaib super.

## 1.3 Pembatasan Masalah

Dalam tulisan ini permasalahan dibatasi untuk menentukan pelabelan total sisi-ajaib super pada graf $P_n \cup P_{n+1}$ untuk *n* ganjil $(n \geq 3)$ dengan konstanta ajaib $k = 5n + 4$.

## 1.4 Tujuan Penulisan

Tulisan ini bertujuan untuk mengkaji pelabelan total sisi-ajaib super pada graf $P_n \cup P_{n+1}$ untuk *n* ganjil $(n \geq 3)$ dengan $k = 5n + 4$.

## 1.5 Sistematika penulisan

Sistematika penulisan dalam tugas akhir ini terbagi menjadi empat bab, yaitu Bab I menjelaskan tentang latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan. Bab II berisi tentang definisi dan teori-teori yang mendukung dan mendasari pembahasan. Bab III akan dibahas mengenai hasil utama dari penulisan tugas akhir ini. Dan pada Bab IV adalah penutup, berisi kesimpulan dari permasalahan yang telah dibahas pada bab sebelumnya dan saran untuk pelaksanaan tugas akhir selanjutnya.

# BAB II

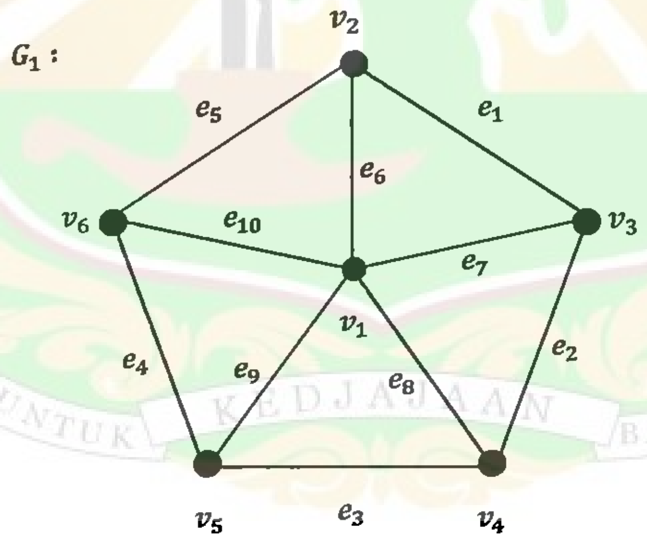
# LANDASAN TEORI

## 2.1 Defnisi dan Terminologi

**Graf** $G$ adalah pasangan himpunan $(V, E)$ dengan $V$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut **titik** dan $E$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $G$ yang disebut **sisi**. Himpunan titik-titik pada graf $G$ dinotasikan dengan $V(G)$ sedangkan himpunan sisi-sisi pada graf $G$ dinotasikan dengan $E(G)$. [2]

Banyak titik yang ada pada graf $G$ disebut **orde** (*order*), dinotasikan dengan $|V(G)| = p$ sedangkan banyak sisi pada graf $G$ disebut **ukuran** (*size*) dari $G$, dan dinotasikan dengan $|E(G)| = q$. [2]

Sebagai contoh perhatikan Gambar 2.1.1 berikut:



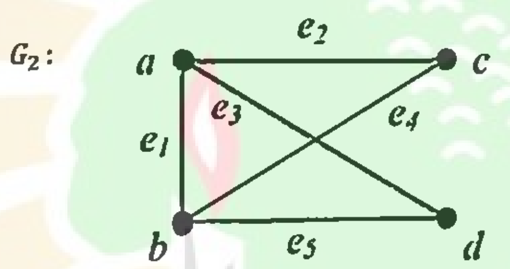

**Gambar 2.1.1** Orde dan Ukuran dari Graf

gambar graf $G_1$ di atas menunjukkan bahwa graf tersebut memiliki titik $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, dan sisi $E(G_1) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$. Jadi, $p(G_1) = 6$ dan $q(G_1) = 10$.

**Derajat** di titik $v$ pada graf $G$ adalah banyaknya sisi pada $G$ yang bersisian dengan $v$ yang dinotasikan dengan $deg_G\ (v)$, atau ditulis $deg(v)$. Titik dikatakan **genap** atau **ganjil** berdasarkan apakah derajatnya genap atau ganjil. Titik berderajat satu disebut **titik ujung**. [2]

Jika $v$ adalah titik pada graf $G$, maka himpunan semua titik di $G$ yang bertetangga dengan $v$ disebut **lingkungan** dari $v$, ditulis $N(v)$. [6]

Graf pada Gambar 2.1.2 mempunyai himpunan titik $V = \{a, b, c, d\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.




**Gambar 2.1.2** Derajat dan Lingkungan Graf

Diperoleh

$$N(a) = \{b, c, d\}$$

$$N(b) = \{a, c, d\}$$

$$N(c) = \{a, b\}$$

$$N(d) = \{a, b\}$$

Jadi,

$$deg(a) = 3$$

$$deg(b) = 3$$

$$deg(c) = 2$$

$$deg(d) = 2.$$

Titik $a$ dan $b$ adalah berderajat ganjil, titik $c$ dan $d$ adalah berderajat genap. Karena tidak ada yang berderajat satu, maka graf $G_2$ tidak mempunyai titik ujung.

**Jalan** $u - v$ dalam graf $G$ adalah barisan berhingga yang berselang-seling antara titik dan sisi $W: u = v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots, e_n, v_n = v$, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan $e_i = v_{i-1}v_i$ untuk $i = 1,2, \ldots, n$ adalah sisi di $G$, $v_1$ disebut **titik awal,** $v_n$ disebut **titik akhir**, titik $v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}$ disebut **titik internal**, dan $n$ menyatakan panjang dari $W$. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut **jalan trivial.** [2]

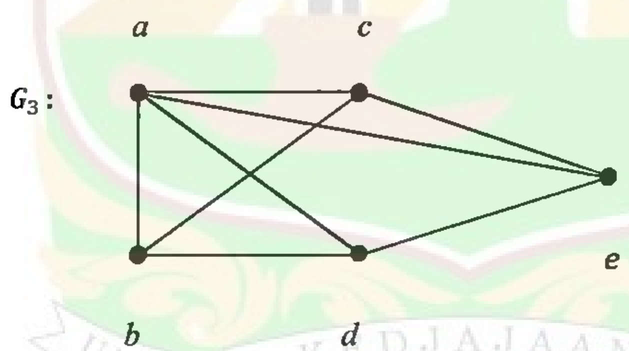
Dalam hal ini, jalan $u - v$ yaitu

$$W: u = v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots, e_n, v_n = v$$

dapat ditulis menjadi

$$W: u = v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n = v.$$

Perhatikan Gambar 2.1.3 berikut :




**Gambar 2.1.3** Jalan dari sebuah Graf

Berdasarkan gambar diatas, diperoleh

$$W_1: a, b, c, a, d, e, c, b$$

dan

$$W_2: b, c, a, d, e, a, b$$

adalah jalan di $G_3$. Jalan $W_1$ mempunyai panjang 8 dan $W_2$ mempunyai panjang 7. Sedangkan,

$$W_3: a, b, c, d, e, a$$

bukan jalan di $G_3$, karena sisi $cd$ tidak ada di $G_3$. Demikian juga

$$W_4: a, b, e, c, a$$

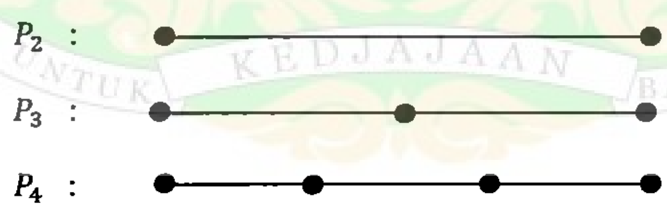
bukan jalan di $G_3$, karena $be$ bukan sisi di $G_3$.

Jika $v_0 \neq v_n$ maka $W$ disebut **jalan terbuka**, dan jika $v_0 = v_n$ maka $W$ disebut **jalan tertutup.** Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut **lintasan.** [2]

Lintasan yang panjangnya $n$ dari titik awal $v_1$ ke titik akhir $v_n$ dalam graf $G$ ialah barisan berselang-seling dari titik-titik dan sisi-sisi yang berbentuk $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_1, v_2), e_2 = (v_2, v_3), \ldots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf $G$. [7]

**Graf lintasan** dengan $n$ titik dinotasikan dengan $P_n$, yaitu graf terhubung sederhana dengan dua titik berderajat satu, yang disebut ujung dari lintasan, dan $n - 2$ titik berderajat dua. Graf lintasan $P_n$ memiliki $n - 1$ sisi.

Gambar 2.1.4 berikut memperlihatkan beberapa contoh graf lintasan,




**Gambar 2.1.4** Beberapa contoh Graf Lintasan

Titik $u$ dan $v$ di graf $G$ dikatakan **terhubung** jika terdapat **lintasan** $u - v$ di $G$. Graf $G$ dikatakan **terhubung** jika sebarang dua titik berbeda di $G$ ada jalan yang menghubungkannya, jika tidak demikian maka $G$ dikatakan **tidak**

**terhubung**. Graf yang hanya terdiri dari satu titik saja (tanpa sisi) dikatakan terhubung, karena titik tunggalnya terhubung dengan dirinya sendiri. [2]

## 2.2 Graf Gabungan

Misal ada dua buah graf $G$ dan $H$ dimana himpunan titik di $G$ dan $H$ dinotasikan $V(G)$ dan $V(H)$, begitu juga dengan himpunan sisinya, dinotasikan dengan $E(G)$ dan $E(H)$. **Gabungan graf** $G$ dan $H$ dinotasikan $(G \cup H)$ dengan himpunan titik $V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G) \cup E(H)$, [1].

## 2.3 Pelabelan pada Graf

**Pelabelan** adalah pemberian label bilangan bulat tak negatif ($\mathbb{Z}^+$) pada titik atau sisi atau keduanya dengan memenuhi aturan-aturan tertentu, [4]. Jika domain dari fungsi adalah titik, maka disebut **pelabelan titik** (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi, maka disebut **pelabelan sisi** (*edge labeling*), dan jika domainnya titik dan sisi maka disebut **pelabelan total** (*total labeling*). [6]

## 2.4 Pelabelan Total Sisi-ajaib

Misalkan $G(V,E)$ adalah suatu graf dengan himpunan titik $V$ dan sisi $E$. Banyaknya titik di $G$ adalah $|V(G)|$, dan banyak sisi di $G$ adalah $|E(G)|$.

**Definisi 2.4.1** [9] *Pelabelan total sisi-ajaib pada graf G dengan himpunan titik V(G) dan himpunan sisi E(G) adalah suatu pemetaan f bijektif seperti di bawah ini*

$$f: V(G) \cup E(G) \longrightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$$

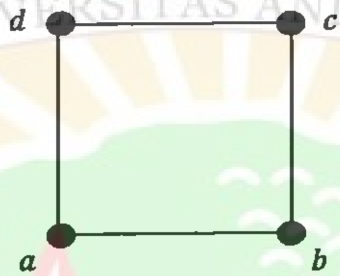
*dengan sifat bahwa untuk setiap sisi xy di G berlaku,*

$$f(x) + f(xy) + f(y) = k,$$

*untuk suatu konstanta tetap k.*

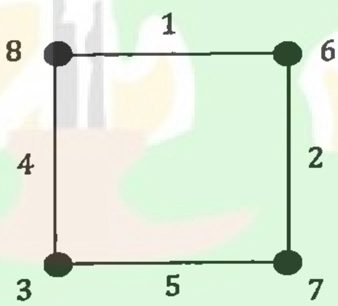
Selanjutnya $k$ disebut *angka ajaib* (konstanta ajaib) untuk graf $G$. Suatu graf $G$ dikatakan *total sisi-ajaib* jika pelabelan total sisi-ajaib dapat dikenakan padanya.[9]

Perhatikan contoh berikut, misalkan graf $C_4$ dengan $V(C_4) = \{a, b, c, d\}$ dan $E(C_4) = \{ab, ad, bc, cd\}$. Jelas bahwa *orde* dari $C_4$ adalah $|V(C_4)| = 4$ dan *ukuran* dari $C_4$ adalah $|E(C_4)| = 4$.




**Gambar 2.4.1** Graf $C_4$

Jika dibuat fungsi $f$ dari $V(C_4) \cup E(C_4)$ ke himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6,7,8\}$ sebagai berikut:




**Gambar 2.4.2** Pelabelan Total Sisi-Ajaib pada $C_4$

diperoleh

$$f(a) + f(ab) + f(b) = 3 + 5 + 7 = 15$$

$$f(b) + f(bc) + f(c) = 7 + 2 + 6 = 15$$

$$f(c) + f(cd) + f(d) = 6 + 1 + 8 = 15$$

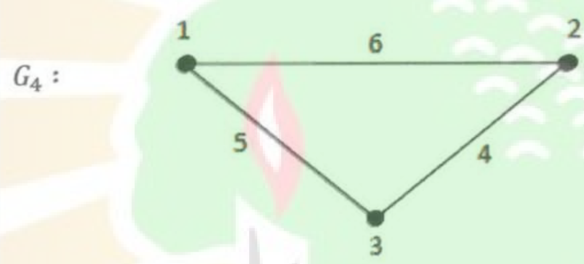
$$f(d) + f(da) + f(a) = 8 + 4 + 3 = 15$$

Maka graf $C_4$ adalah graf total sisi-ajaib dengan konstanta ajaib $k = 15$.

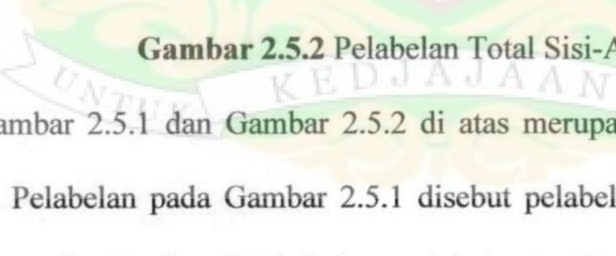
## 2.5 Pelabelan Total Sisi-ajaib Super

**Definisi 2.5.1 [4]** *Pelabelan total sisi-ajaib super adalah pemetaan total sisi-ajaib pada graf* $G\ (V, E)$ *sehingga* $V(G)$ *dipetakan ke himpunan* $\{1, 2, 3, \ldots, |V(G)|\}$

Dengan demikian, pelabelan total sisi-ajaib super adalah suatu bentuk khusus dari pelabelan total sisi-ajaib. Setiap pelabelan total sisi-ajaib super pasti merupakan pelabelan total sisi-ajaib, tetapi tidak sebaliknya. Graf yang dapat dikenai pelabelan total sisi-ajaib super disebut graf total sisi-ajaib super. Perhatikan graf $G_4$ dan $G_5$ berikut :




**Gambar 2.5.1** Pelabelan Total Sisi-Ajaib Super




**Gambar 2.5.2** Pelabelan Total Sisi-Ajaib

Gambar 2.5.1 dan Gambar 2.5.2 di atas merupakan graf pelabelan total sisi-ajaib. Pelabelan pada Gambar 2.5.1 disebut pelabelan total sisi-ajaib super, sedangkan pada Gambar 2.5.2 bukan pelabelan total sisi-ajaib super. Hal ini karena pada Gambar 2.5.1 himpunan titik dipetakan ke himpunan $\{1, 2, 3\}$, sedangkan pada Gambar 2.5.2 tidak memetakan ke himpunan $\{1, 2, 3\}$.

**Lemma 2.5.1 [8].** *Suatu graf $G$ dengan $n$ titik dan $m$ sisi adalah graf sisi-ajaib super jika dan hanya jika terdapat suatu fungsi bijektif*

$$f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, |V(G)| + |E(G)|\}$$

*sedemikian sehingga himpunan $S = \{f(u) + f(v) | uv \in E(G)\}$ terdiri dari $j$ bilangan bulat terurut. Dalam kasus ini, $f$ diperluas menjadi pelabelan total sisi-ajaib super dari $G$ dengan konstanta ajaib $k = |V(G)| + |E(G)| + s$ dimana $s = min(S)$ dan*

$$\begin{aligned} S &= \{f(u) + f(v) | uv \in E(G)\} \\ &= \{k - (|V(G)| + 1), k - (|V(G)| + 2), \ldots, k - (|V(G)| + |E(G)|)\}. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Lemma 2.5.1, untuk membuktikan bahwa suatu pemetaan bijektif merupakan pelabelan total sisi-ajaib super hanya dibutuhkan melabelkan semua titik dengan $1, 2, \ldots, |V(G)|$ dan tunjukkan bahwa himpunan $S = \{f(u) + f(v) | uv \in E(G)\}$ terdiri dari $j$ bilangan bulat terurut.

## 2.6 Pelabelan Dual Super

**Teorema 2.6.1 [8]** *Misalkan graf $G$ adalah pelabelan total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib $k$. Pelabelan $f'$ didefenisikan sebagai berikut :*

$$f'(x) = p + 1 - f(x) \text{ untuk setiap } x \in V(G)$$

*dan*

$$f'(xy) = 2p + q + 1 - f(xy) \text{ untuk setiap } xy \in E(G)$$

*adalah pelabelan total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib $k' = 4p + q + 3 - k$.* Pelabelan $f'$ disebut *pelabelan dual super* dari $f$ di $G$.

**Bukti :**

Misalkan $xy \in E(G)$. Maka

$$f'(x) + f'(xy) + f'(y) = k'$$

$$\big(p + 1 - f(x)\big) + \big(2p + q + 1 - f\,(xy)\big) + (p + 1 - f(y) = k'$$

$$(p + 2p + p) + q + (1 + 1 + 1) - (f(x) - f(xy) - f(y)) = k'$$

$$4p + q + 3 - f(x) + f(xy) + f(y) = k'$$

karena

$$f(x) + f(xy) + f(y) = k$$

hal ini berdasarkan dari defenisi 2.4.1, sehingga

$$4p + q + 3 - k = k'.$$

Jadi, $f'$ adalah *pelabelan dual super* dari $f$ di $G$ dengan konstanta ajaib $k' = 4p + q + 3 - k$. ■

# BAB III

## PELABELAN TOTAL SISI-AJAIB SUPER PADA GRAF $P_n \cup P_{n+1}$ UNTUK $n$ GANJIL $(n \geq 3)$

Pada bab ini dijelaskan hasil utama kajian, yaitu pelabelan total sisi-ajaib super pada graf $P_n \cup P_{n+1}$ untuk $n$ ganjil $(n \geq 3)$. Hasil tersebut disajikan dalam bentuk teorema, akibat, dan ilustrasi sebagai berikut:

definisikan himpunan semua titik dan sisi sebagai berikut :

$$V(P_n \cup P_{n+1}) = \{v_{1,i} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_{2,j} | 1 \leq j \leq n+1\}$$

$$= \{v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,n}\} \cup \{v_{2,1}, v_{2,2}, \dots, v_{2,n+1}\},$$

dan

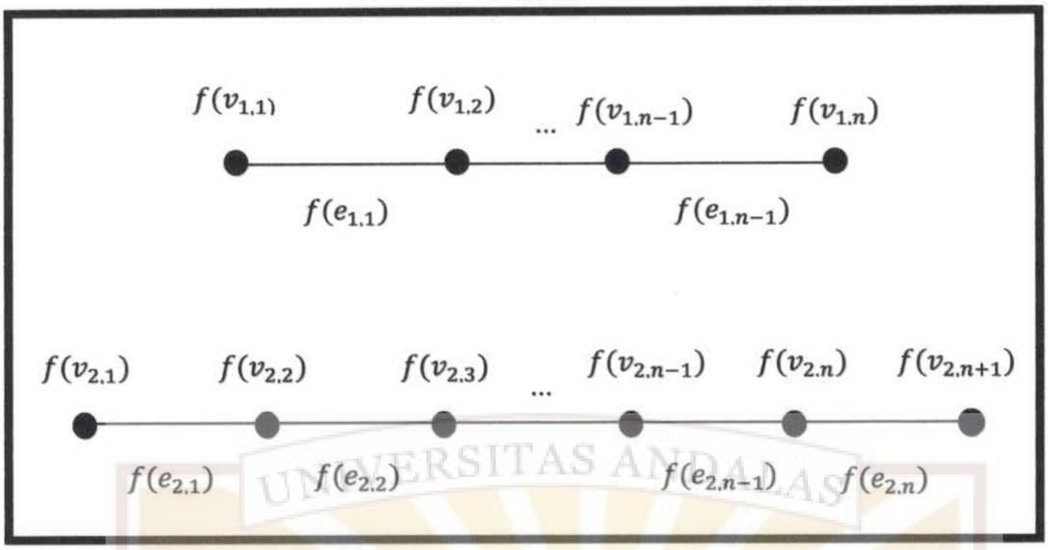
$$E(P_n \cup P_{n+1}) = \{e_{1,i} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{e_{2,j} | 1 \leq j \leq n\}$$

$$= \{e_{1,1}, e_{1,2}, \dots, e_{1,n}\} \cup \{e_{2,1}, e_{2,2}, \dots, e_{2,n-1}, e_{2,n}\}$$

dimana : $e_{1,i} = v_{1,i}\, v_{1,i+1}$, untuk $1 \leq i \leq n-1$, dan

$e_{2,j} = v_{2,j}\, v_{2,j+1}$, untuk $1 \leq j \leq n$.

Gambar 3.1 memperlihatkan cara memberikan label titik dan sisi pada graf $P_n \cup P_{n+1}$




**Gambar 3.1** Pelabelan semua titik dan sisi graf $P_n \cup P_{n+1}$

**Teorema 3.1** *Untuk setiap n ganjil dan $n \geq 3$, graf $P_n \cup P_{n+1}$ memiliki pelabelan total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib $k = 5n + 4$.*

**Bukti:**

Definisikan pelabelan untuk semua titik dari graf $P_n \cup P_{n+1}$ sebagai berikut:

$$f(v_{1,i}) = \begin{cases} \dfrac{i+1}{2} & untuk\ i = 1,3,\dots,n, \\ n+2+\dfrac{i}{2} & untuk\ i = 2,4,\dots,n-1, \end{cases}$$

dan,

$$f(v_{2,j}) = \begin{cases} \dfrac{n+j}{2}+1 & untuk\ \ j = 1,3,\dots,n, \\ n+2 & untuk\ \ j = n+1, \\ \dfrac{3(n+1)+j}{2} & untuk\ \ j = 2,4,\dots,n-1. \end{cases}$$



Selanjutnya, definisikan pelabelan untuk semua sisi sebagai berikut :

$$f(e_{1,i}) = f(v_{1,i}v_{1,i+1}) = 4n + 1 - i \ \ untuk\ 1 \leq i \leq n-1,$$ dan

$$f(e_{2,j}) = f(v_{2,j}v_{2,j+1}) = \begin{cases} 3n+1-j & 1 \leq j \leq n-1 \\ 3n+1 & j = n. \end{cases}$$

Berdasarkan Definisi 2.4.1, diperoleh bahwa untuk $1 \leq i \leq n-1$ berlaku

$$k = f(v_{1,i}) + f(v_{1,i}v_{1,i+1}) + f(v_{1,i+1}),$$

sehingga dapat ditentukan $k$ sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
k &= f(v_{1,i}) + f(v_{1,i}v_{1,i+1}) + f(v_{1,i+1}) \\
&= \left(\frac{i+1}{2}\right) + (4n+1-i) + \left(n+2+\frac{i+2}{2}\right) \\
&= (4n+n) + \left(1+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) - \left(i+\frac{i}{2}+\frac{i}{2}\right) \\
&= 5n+4,
\end{aligned}
$$

diperoleh

$$f(v_{1,i}) + f(v_{1,i}v_{1,i+1}) + f(v_{1,i+1}) = 5n+4 \text{ untuk } 1 \le i \le n-1.$$

Demikian juga untuk $1 \le j \le n$ berlaku

$$k = f(v_{2,j}) + f(v_{2,j}v_{2,j+1}) + f(v_{2,j+1})$$

sehingga dapat ditentukan $k$ sebagai berikut :

(i) $1 \le j \le n-1$

$$
\begin{aligned}
k &= f(v_{2,j}) + f(v_{2,j}v_{2,j+1}) + f(v_{2,j+1}) \\
&= \left(\frac{n+j}{2}+1\right) + (3n+1-j) + \left(\frac{3(n+1)+(j+1)}{2}\right) \\
&= \left(\frac{n}{2}+3n+\frac{3n}{2}\right) + \left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{j}{2}-j+\frac{j}{2}\right) \\
&= \left(\frac{n+1}{2}\right) + 1 + 3n + \left(\frac{3n+3+2}{2}\right) \\
k &= 5n+4,
\end{aligned}
$$

(ii) $j = n$

$$
\begin{aligned}
k &= f(v_{2,j}) + f(v_{2,j}v_{2,j+1}) + f(v_{2,j+1}) \\
&= \left(\frac{n+j}{2}+1\right) + (3n+1) + (n+2) \\
&= \left(\frac{n}{2}+3n+n\right) + \left(\frac{j}{2}\right) + (1+1+2)
\end{aligned}
$$

$$= \left(\frac{n}{2} + 3n + n\right) + \left(\frac{n}{2}\right) + 4$$

$$k = 5n + 4,$$

sehingga dari (i) dan (ii), diperoleh

$$f(v_{2,j}) + f(v_{2,j}v_{2,j+1}) + f(v_{2,j+1}) = 5n + 4 \text{ untuk } 1 \leq j \leq n.$$

Dari hasil yang diperoleh, jelaslah bahwa

$$f(v_{1,i}) + f(v_{1,i}v_{1,i+1}) + f(v_{1,i+1}) = 5n + 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1, \text{ dan}$$

$$f(v_{2,j}) + f(v_{2,j}v_{2,j+1}) + f(v_{2,j+1}) = 5n + 4 \text{ , untuk } 1 \leq j \leq n.$$

Sehingga terbukti bahwa $f$ adalah pelabelan total sisi-ajaib super. ■

Dari Teorema di atas, diperoleh Akibat sebagai berikut:

**Akibat 3.1** *Untuk setiap n ganjil dan n ≥ 3, graf* $P_n \cup P_{n+1}$ *memiliki pelabelan total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib* $k = 5n + 2$.

**Bukti :**

Misalkan diberikan suatu graf $G(V, E)$ dengan banyak titik adalah $p$, banyak sisi adalah $q$, dan konstanta ajaib $k$. Graf $P_n \cup P_{n+1}$, dengan $p = n + (n + 1)$, $q = ((n - 1) + (n - 1) + 1)$, dan $k = 5n + 4$. Berdasarkan Teorema 2.6.1 diperoleh $k' = 4p + q + 3 - k$, sehingga

$$k' = 4p + q + 3 - k$$

$$k' = 4\left(n + (n + 1)\right) + \left((n - 1) + (n - 1) + 1\right) + 3 - (5n + 4)$$

$$= 4(2n + 1) + (2n - 2 + 1) + 3 - 5n - 4$$

$$= 8n + 4 + 2n - 2 + 1 + 3 - 5n - 4$$

$$= 8n + 2n - 5n + 4 + 1 + 3 - 4 - 2$$

$$k' = 5n + 2.$$

Akibatnya, jika $n$ ganjil dan $n \geq 3$, maka graf $P_n \cup P_{n+1}$ memiliki pelabelan total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib $k' = 5n + 2$. ■

Untuk lebih jelasnya, perhatikan ilustrasi-ilustrasi berikut :

**Ilustrasi 1.**

Misalkan $n = 3$. Akan ditunjukkan bahwa graf $P_3 \cup P_4$ mempunyai pelabelan total sisi-ajaib. Selanjutnya akan ditunjukkan konstanta ajaib, dan pelabelan dual super pada graf lintasan $P_3 \cup P_4$ tersebut.

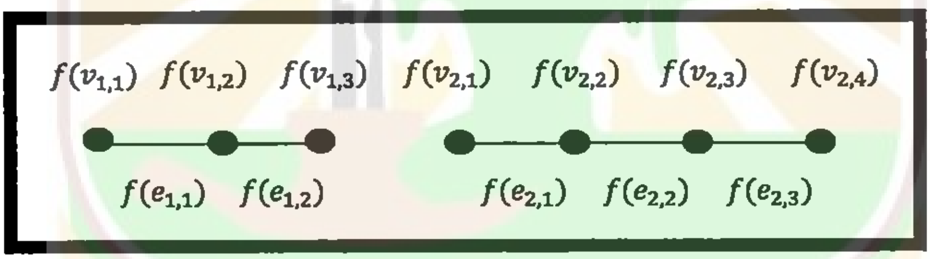
**Jawab :**

Untuk n = 3, dinotasikan

$$V(P_3 \cup P_4) = \{v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}\} \cup \{v_{2,1}, v_{2,2}, v_{2,3}, v_{2,4}\}, \text{ dan}$$

$$E(P_3 \cup P_4) = \{e_{1,1}, e_{1,2}, e_{1,3}\} \cup \{e_{2,1}, e_{2,2}, e_{2,3}, e_{2,4}\}.$$

Lebih jelasnya perhatikan Gambar 3.1.1 berikut:




**Gambar 3.1.1** Pelabelan semua titik dan sisi graf $P_3 \cup P_4$

**1. Pelabelan untuk setiap titik**

Untuk $i = 1, 2, 3$, diperoleh

- Untuk $i = 1$, maka

$$f(v_{1,1}) = \frac{i+1}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

- Untuk $i = 2$, maka

$$f(v_{1,2}) = n + 2 + \frac{i}{2} = 3 + 2 + \frac{2}{2} = 6$$

- Untuk $i = 3$, maka

$$f(v_{1,3}) = \frac{i+1}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$$

Untuk $j = 1, 2, 3, 4$, diperoleh

- Untuk $j = 1$, maka

$$f(v_{2,1}) = \frac{n+j}{2} + 1 = \frac{3+1}{2} + 1 = 3$$

- Untuk $j = 2$, maka

$$f(v_{2,2}) = \frac{3(n+1)+j}{2} = \frac{3(3+1)+2}{2} = 7$$

- Untuk $j = 3$, maka

$$f(v_{2,3}) = \frac{n+j}{2} + 1 = \frac{3+3}{2} + 1 = 4$$

- Untuk $j = 4$, maka

$$f(v_{2,4}) = n + 2 = 3 + 2 = 5.$$

**2. Pelabelan untuk setiap sisi**

Untuk $i = 1, 2$ diperoleh

- Untuk $i = 1$, maka

$$f(e_{1,1}) = f(v_{1,1}v_{1,2}) = 4n + 1 - i = 4(3) + 1 - 1 = 12$$

- Untuk $i = 2$, maka

$$f(e_{1,2}) = f(v_{1,2}v_{1,3}) = 4n + 1 - i = 4(3) + 1 - 2 = 11$$

Untuk $j = 1,2,3$, diperoleh

- Untuk $j = 1$, maka

$$f(e_{2,1}) = f(v_{2,1}v_{2,2}) = 3n + 1 - j = 3(3) + 1 - 1 = 9$$

- Untuk $j = 2$, maka

$$f(e_{2,2}) = f(v_{2,2}v_{2,3}) = 3n + 1 - j = 3(3) + 1 - 2 = 8$$

- Untuk $j = 3$, maka

$$f(e_{2,3}) = f(v_{2,3}v_{2,4}) = 3n + 1 = 3(3) + 1 = 10.$$

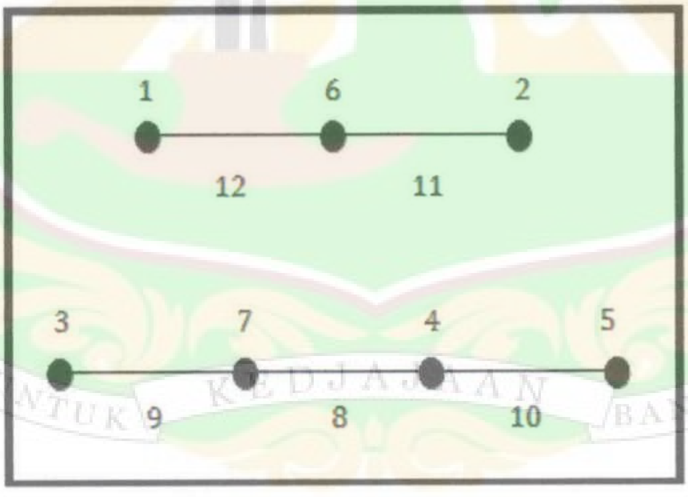
**3. Kostanta Ajaib**

- $f(v_{1,1}) + f(v_{1,1}v_{1,2}) + f(v_{1,2}) = 1 + 12 + 6 = 19$
- $f(v_{1,2}) + f(v_{1,2}v_{1,3}) + f(v_{1,3}) = 6 + 11 + 2 = 19$
- $f(v_{2,1}) + f(v_{2,1}v_{2,2}) + f(v_{2,2}) = 3 + 9 + 7 = 19$
- $f(v_{2,2}) + f(v_{2,2}v_{2,3}) + f(v_{2,3}) = 7 + 8 + 4 = 19$
- $f(v_{2,3}) + f(v_{2,3}v_{2,4}) + f(v_{2,4}) = 4 + 10 + 5 = 19.$

Berdasarkan Teorema 3.1, diperoleh

$$k = 5n + 4 = 5(3) + 4 = 19.$$

Dengan demikian pelabelan total sisi-ajaib super pada graf $P_3 \cup P_4$ dapat diperlihatkan dengan gambar sebagai berikut:




**Gambar 3.1.2** Pelabelan Total Sisi-Ajaib Super pada Graf $P_3 \cup P_4$

Terlihat bahwa pelabelan ini merupakan pelabelan total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib $k = 19$.

**4. Pelabelan Dual Super**

Diperoleh,

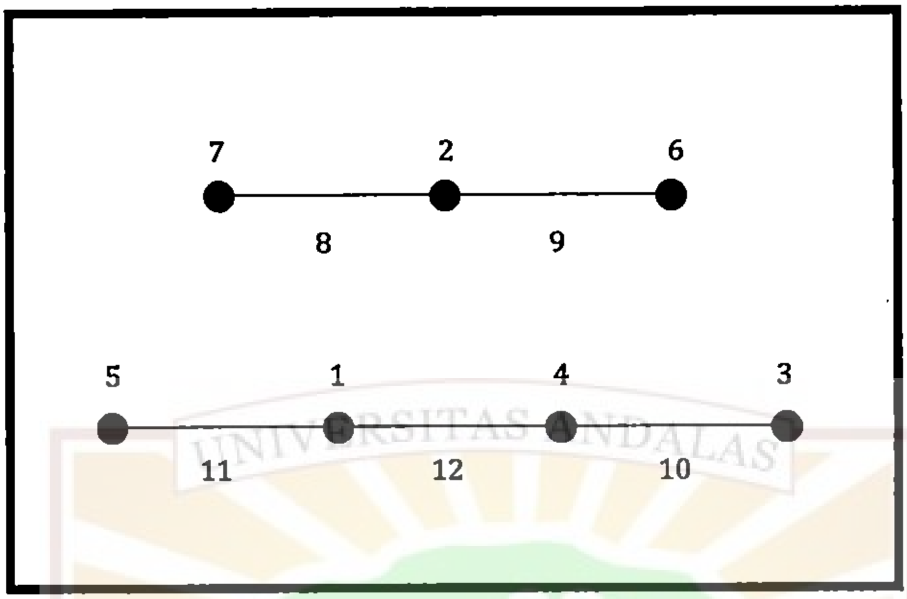
- $f'(v_{1,1}) = p + 1 - f(v_{1,1}) = 7 + 1 - 1 = 7$
- $f'(v_{1,2}) = p + 1 - f(v_{1,2}) = 7 + 1 - 6 = 2$
- $f'(v_{1,3}) = p + 1 - f(v_{1,3}) = 7 + 1 - 2 = 6$
- $f'(v_{2,1}) = p + 1 - f(v_{2,1}) = 7 + 1 - 3 = 5$
- $f'(v_{2,2}) = p + 1 - f(v_{2,2}) = 7 + 1 - 7 = 1$
- $f'(v_{2,3}) = p + 1 - f(v_{2,3}) = 7 + 1 - 4 = 4$
- $f'(v_{2,4}) = p + 1 - f(v_{2,4}) = 7 + 1 - 5 = 3$
- $f'(v_{1,1}v_{1,2}) = 2p + q + 1 - f(v_{1,1}v_{1,2}) = 2(7) + 5 + 1 - 12 = 8$
- $f'(v_{1,2}v_{1,3}) = 2p + q + 1 - f(v_{1,2}v_{1,3}) = 2(7) + 5 + 1 - 11 = 9$
- $f'(v_{2,1}v_{2,2}) = 2p + q + 1 - f(v_{2,1}v_{2,2}) = 2(7) + 5 + 1 - 9 = 11$
- $f'(v_{2,2}v_{2,3}) = 2p + q + 1 - f(v_{2,2}v_{2,3}) = 2(7) + 5 + 1 - 8 = 12$
- $f'(v_{2,3}v_{2,4}) = 2p + q + 1 - f(v_{2,3}v_{2,4}) = 2(7) + 5 + 1 - 10 = 10.$

Jadi, $f'$ adalah pelabelan total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib $k' = 4p + q + 3 - k$, yaitu

$$k' = 4(7) + 5 + 3 - 19 = 17$$

ini sesuai dengan Akibat 3.1, yaitu untuk $n$ ganjil dan n ≥ 3, graf $P_3 \cup P_4$ memiliki pelabelan total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib $k = 5n + 2 = 5(3) + 2 = 17$.

Lebih jelasnya, dapat digambarkan sebagai berikut :




**Gambar 3.1.3** Pelabelan Dual Super pada Graf $P_3 \cup P_4$

**Ilustrasi 2.**

Misalkan $n = 5$. Akan ditunjukkan bahwa graf $P_5 \cup P_6$ mempunyai pelabelan total sisi-ajaib. Selanjutnya akan ditunjukkan konstanta ajaib, dan pelabelan dual super pada graf lintasan $P_5 \cup P_6$ tersebut.

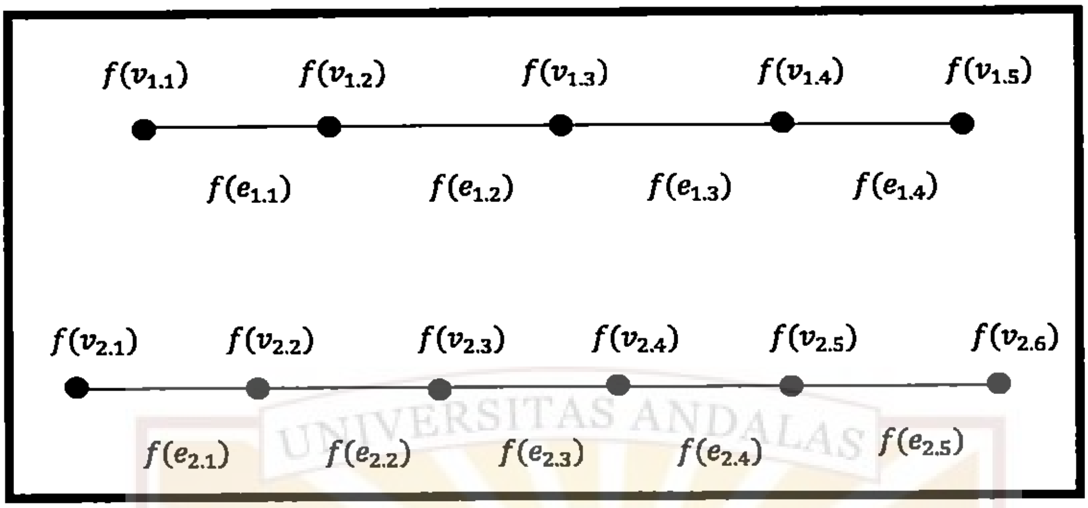
**Jawab :**

Untuk n = 5 , dinotasikan

$V(P_5 \cup P_6) = \{v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}, v_{1,4}, v_{1,5}\} \cup \{v_{2,1}, v_{2,2}, v_{2,3}, v_{2,4}, v_{2,5}, v_{2,6}\}$, dan

$E(P_5 \cup P_6) = \{e_{1,1}, e_{1,2}, e_{1,3}, e_{1,4}, e_{1,5}\} \cup \{e_{2,1}, e_{2,2}, e_{2,3}, e_{2,4}, e_{2,5}, e_{2,6}\}$.

Lebih jelasnya, diperlihatkan pada Gambar 3.1.4 berikut :




**Gambar 3.1.4** Pelabelan semua titik dan sisi pada graf $P_5 \cup P_6$

**1. Pelabelan untuk setiap titik**

Untuk $i = 1, 2, 3,4,5,$ diperoleh

- Untuk $i = 1$, maka

$$f(v_{1,1}) = \frac{i+1}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

- Untuk $i = 2$, maka

$$f(v_{1,2}) = n + 2 + \frac{i}{2} = 5 + 2 + \frac{2}{2} = 8$$

- Untuk $i = 3$, maka

$$f(v_{1,3}) = \frac{i+1}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$$

- Untuk $i = 4$, maka

$$f(v_{1,4}) = n + 2 + \frac{i}{2} = 5 + 2 + \frac{4}{2} = 9$$

- Untuk $i = 5$, maka

$$f(v_{1,5}) = \frac{i+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$$

Untuk $j = 1,2,3,4,5,6$, diperoleh

- Untuk $j = 1$, maka

$$f(v_{2,1}) = \frac{n+j}{2} + 1 = \frac{5+1}{2} + 1 = 4$$

- Untuk $j = 2$, maka

$$f(v_{2,2}) = \frac{3(n+1)+j}{2} = \frac{3(5+1)+2}{2} = 10$$

- Untuk $j = 3$, maka

$$f(v_{2,3}) = \frac{n+j}{2} + 1 = \frac{5+3}{2} + 1 = 5$$

- Untuk $j = 4$, maka

$$f(v_{2,4}) = \frac{3(n+1)+j}{2} = \frac{3(5+1)+4}{2} = 11$$

- Untuk $j = 5$, maka

$$f(v_{2,5}) = \frac{n+j}{2} + 1 = \frac{5+5}{2} + 1 = 6$$

- Untuk $j = 6$, maka

$$f(v_{2,6}) = n + 2 = 5 + 2 = 7.$$

**2. Pelabelan untuk setiap sisi**

Untuk $i = 1,2,3,4$, diperoleh

- Untuk $i = 1$, maka

$$f(e_{1,1}) = f(v_{1,1}v_{1,2}) = 4n + 1 - i = 4(5) + 1 - 1 = 20$$

- Untuk $i = 2$, maka

$$f(e_{1,2}) = f(v_{1,2}v_{1,3}) = 4n + 1 - i = 4(5) + 1 - 2 = 19$$

- Untuk $i = 3$, maka

$$f(e_{1,3}) = f(v_{1,3}v_{1,4}) = 4n + 1 - i = 4(5) + 1 - 3 = 18$$

- Untuk $i = 4$, maka

$$f(e_{1,4}) = f(v_{1,4}v_{1,5}) = 4n + 1 - i = 4(5) + 1 - 4 = 17$$

Untuk $j = 1,2,3,4,5,$ diperoleh

- Untuk $j = 1$, maka

$$f(e_{2,1}) = f(v_{2,1}v_{2,2}) = 3n + 1 - j = 3(5) + 1 - 1 = 15$$

- Untuk $j = 2$, maka

$$f(e_{2,2}) = f(v_{2,2}v_{2,3}) = 3n + 1 - j = 3(5) + 1 - 2 = 14$$

- Untuk $j = 3$, maka

$$f(e_{2,3}) = f(v_{2,3}v_{2,4}) = 3n + 1 - j = 3(5) + 1 - 3 = 13$$

- Untuk $j = 4$, maka

$$f(e_{2,4}) = f(v_{2,4}v_{2,5}) = 3n + 1 - j = 3(5) + 1 - 4 = 12$$

- Untuk $j = 5$, maka

$$f(e_{2,5}) = f(v_{2,5}v_{2,6}) = 3n + 1 = 3(5) + 1 = 16.$$

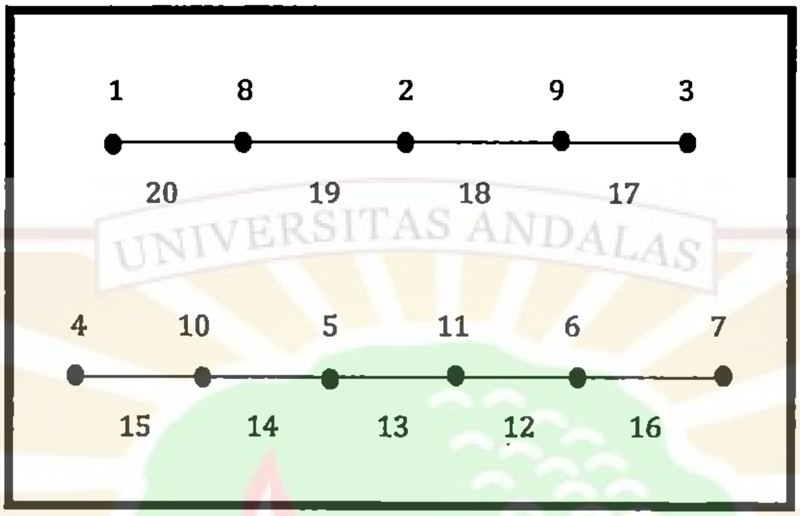
**3. Kostanta Ajaib**

- $f(v_{1,1}) + f(v_{1,1}v_{1,2}) + f(v_{1,2}) = 1 + 20 + 8 = 29$
- $f(v_{1,2}) + f(v_{1,2}v_{1,3}) + f(v_{1,3}) = 8 + 19 + 2 = 29$
- $f(v_{1,3}) + f(v_{1,3}v_{1,4}) + f(v_{1,4}) = 2 + 18 + 9 = 29$
- $f(v_{1,4}) + f(v_{1,4}v_{1,5}) + f(v_{1,5}) = 9 + 17 + 3 = 29$
- $f(v_{2,1}) + f(v_{2,1}v_{2,2}) + f(v_{2,2}) = 4 + 15 + 10 = 29$
- $f(v_{2,2}) + f(v_{2,2}v_{2,3}) + f(v_{2,3}) = 10 + 14 + 5 = 29$
- $f(v_{2,3}) + f(v_{2,3}v_{2,4}) + f(v_{2,4}) = 5 + 13 + 11 = 29$
- $f(v_{2,4}) + f(v_{2,4}v_{2,5}) + f(v_{2,5}) = 11 + 12 + 6 = 29$
- $f(v_{2,5}) + f(v_{2,5}v_{2,6}) + f(v_{2,6}) = 6 + 16 + 7 = 29.$

Berdasarkan Teorema 3.1, diperoleh

$k = 5n + 4 = 5(5) + 4 = 29.$

Perhatikan gambar berikut :




**Gambar 3.1.5** Pelabelan Total Sisi-Ajaib Super pada Graf $P_5 \cup P_6$

Dengan demikian, pelabelan ini merupakan pelabelan total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib $k = 29$.

**4. Pelabelan Dual Super**

Diperoleh,

- $f'(v_{1,1}) = p + 1 - f(v_{1,1}) = 11 + 1 - 1 = 11$
- $f'(v_{1,2}) = p + 1 - f(v_{1,2}) = 11 + 1 - 8 = 4$
- $f'(v_{1,3}) = p + 1 - f(v_{1,3}) = 11 + 1 - 2 = 10$
- $f'(v_{1,4}) = p + 1 - f(v_{1,4}) = 11 + 1 - 9 = 3$
- $f'(v_{1,5}) = p + 1 - f(v_{1,5}) = 11 + 1 - 3 = 9$
- $f'(v_{2,1}) = p + 1 - f(v_{2,1}) = 11 + 1 - 4 = 8$
- $f'(v_{2,2}) = p + 1 - f(v_{2,2}) = 11 + 1 - 10 = 2$
- $f'(v_{2,3}) = p + 1 - f(v_{2,3}) = 11 + 1 - 5 = 7$

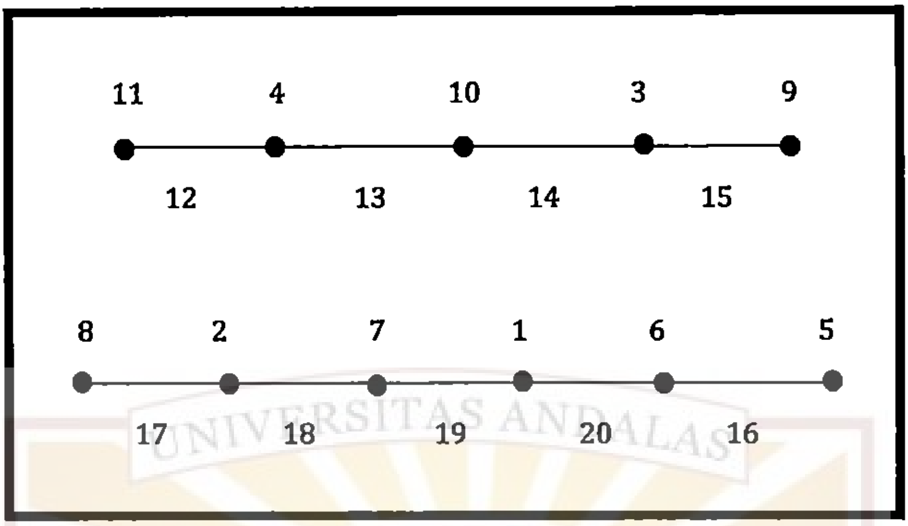
- $f'(v_{2,4}) = p + 1 - f(v_{2,4}) = 11 + 1 - 11 = 1$
- $f'(v_{2,5}) = p + 1 - f(v_{2,5}) = 11 + 1 - 6 = 6$
- $f'(v_{2,6}) = p + 1 - f(v_{2,6}) = 11 + 1 - 7 = 5$
- $f'(v_{1,1}v_{1,2}) = 2p + q + 1 - f(v_{1,1}v_{1,2}) = 2(11) + 9 + 1 - 20 = 12$
- $f'(v_{1,2}v_{1,3}) = 2p + q + 1 - f(v_{1,2}v_{1,3}) = 2(11) + 9 + 1 - 19 = 13$
- $f'(v_{1,3}v_{1,4}) = 2p + q + 1 - f(v_{1,3}v_{1,4}) = 2(11) + 9 + 1 - 18 = 14$
- $f'(v_{1,4}v_{1,5}) = 2p + q + 1 - f(v_{1,4}v_{1,5}) = 2(11) + 9 + 1 - 17 = 15$
- $f'(v_{2,1}v_{2,2}) = 2p + q + 1 - f(v_{2,1}v_{2,2}) = 2(11) + 9 + 1 - 15 = 17$
- $f'(v_{2,2}v_{2,3}) = 2p + q + 1 - f(v_{2,2}v_{2,3}) = 2(11) + 9 + 1 - 14 = 18$
- $f'(v_{2,3}v_{2,4}) = 2p + q + 1 - f(v_{2,3}v_{2,4}) = 2(11) + 9 + 1 - 13 = 19$
- $f'(v_{2,4}v_{2,5}) = 2p + q + 1 - f(v_{2,4}v_{2,5}) = 2(11) + 9 + 1 - 12 = 20$
- $f'(v_{2,5}v_{2,6}) = 2p + q + 1 - f(v_{2,5}v_{2,6}) = 2(11) + 9 + 1 - 16 = 16.$

Jadi, $f'$ adalah pelabelan total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib $k' = 4p + q + 3 - k$, yaitu

$$k' = 4(11) + 9 + 3 - 29 = 27$$

ini sesuai dengan Akibat 3.1, yaitu untuk $n$ ganjil dan $n \geq 3$, graf $P_5 \cup P_6$ memiliki pelabelan total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib $k = 5n + 2 = 5(5) + 2 = 27.$

Untuk lebih jelas, perhatikan gambar berikut :




Gambar 3.1.6 Pelabelan Dual Super pada Graf $P_5 \cup P_6$

# BAB IV

# PENUTUP

## 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh dari Bab III, disimpulkan bahwa graf $P_n \cup P_{n+1}$ dengan himpunan semua titik dan sisi, yaitu :

$$V(P_n \cup P_{n+1}) = \{v_{1,i} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_{2,j} | 1 \leq j \leq n+1\}, \text{ dan}$$

$$E(P_n \cup P_{n+1}) = \{e_{1,i} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{e_{2,j} | 1 \leq j \leq n\}$$

merupakan pelabelan total sisi-ajaib super untuk $n$ ganjil $(n \geq 3)$ dengan konstanta ajaib $k = 5n + 4$, dan pelabelan dual super dengan konstanta ajaib $k' = 5n + 2$.

## 4.2 Saran

Karena masih begitu banyak pelabelan total sisi ajaib super pada gabungan dua graf selain $P_n \cup P_{n+1}$, maka penulis menyarankan untuk mengkaji mengenai pelabelan total sisi ajaib super pada graf lintasan lainnya, seperti graf $nP_2 \cup P_n$ dan graf $nP_2 \cup P_{n+2}$.

## DAFTAR PUSTAKA


[1] Bondy, J. A. dan H. S. R. Murty. 2007. *Graph Theory*. Spinger, USA

[2] Chartrand, G. dan L. Lesniak. 1986. *Graph and Digraph 3rd Edition*. California: Wadsworth, Inc

[3] Figueroa-Centeno, R. M, R. Ichisima, dan F. A. Muntaner-Batle. 2002. On super edge-magic graphs. *Ars Combin.* **64** : 81-95

[4] Gallian, J. A. 2011. A Dynamic Survey Of Graph Labeling. (Online): (*http://www. Combinatorics. Com*. Diakses tanggal 27 Desember 2011)

[5] Kotzig, A. dan A. Rosa. 1970. Magic valuations of finite graphs. *Canad. Math. Bull.* **13** : 451-461

[6] Miler, M. 2000. Open Problems in Graph Theory : Labeling and Extremal Graph. *Prosiding Konferensi Nasional Himpunan Matematika Indonesia X di Institut Teknologi Bandung*, 17-20 Juli

[7] Munir, R. 2005. *Matematika Diskrit Edisi 3*. Penerbit Informatika, Bandung

[8] Sudarsana, I. W, E.T. Baskoro, D. Ismaimuza, dan H. Assiyatun. 2005. Creating New Super Edge-Magic Total Labelings from old ones. *J. Combin. Math. Combin. Comput.* **55** : 83–90

[9] Wijaya, K dan E.T. Baskoro. 2000. Edge-magic total labeling on a disjoint union of cycle graphs (in Indonesian), *Proceedings of the tenth national conference on mathematics*. Bandung, July 18-20 : 159 -163

**RIWAYAT HIDUP PENULIS**

Penulis bernama Nilam Yani, dilahirkan di Jambi pada tanggal 4 September 1988 dari pasangan Ali Akbar dan Nurbaity. Penulis adalah anak kedelapan dari delapan bersaudara. Penulis menamatkan pendidikan dasar di SDN 50 Jambi pada tahun 2000 kemudian melanjutkan ke MTsN Jambi Timur dan menamatkannya pada tahun 2003. Penulis melanjutkan pendidikan ke SMAN 9 Jambi dan selesai pada tahun 2006. Di tahun yang sama penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur Penjaringan Mahasiswa Baru (PMDK).

Selama menjadi mahasiswa di Jurusan Matematika FMIPA UNAND, penulis aktif dalam kegiatan dari Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA), dan penulis juga aktif di kegiatan IMKJ (Ikatan Mahasiswa Kota Jambi).