PELABELAN TOTAL (a,d)- SISI ANTI AJAIB SUPER PADA GABUNGAN GRAF LINTASAN

SKRIPSI

ANNE MUTIA IRSAL
07934017

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN
ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2012

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini menyatakan bahwa :

Nama	:	Anne Mutia Irsal
No. Buku Pokok	:	07 934 017
Jurusan	:	Matematika
Bidang	:	Kombinatorik
Judul Skripsi	:	**Pelabelan Total (a,d)-Sisi Anti Ajaib Super pada Gabungan Graf Lintasan**

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal 19 Januari 2012 berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing / Penguji

1.

Dr. Syafrizal Sy
NIP. 19670602 199302 1 001

2.

Dr. Lyra Yulianti
NIP. 19750706 199903 2 003

Penguji

1.

Dr. Admi Nazra
NIP. 19730330 199903 1 002

2.

Narwen, M.Si
NIP. 19670410 199702 1 001

3.

Izzati Rahmi HG, M.Si
NIP. 19740928 199903 2 002

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand

Dr. Syafrizal Sy
NIP.19670807 199309 1 001

Daripada sekedar bikin pembahasan di skripsi, ternyata membuat halaman ucapan terimakasih alias *thanks to* lah yang membuat saya repot tujuh keliling.. 😃

For the first, for Allah SWT atas segala jalan yang diberikan meski tak selalu mulus namun pasti terbaik bagi saya! *Because I always believe that everything happens for reasons, rite!* Praise be to Allah, the Lord of the worlds! Semoga hamba Mu ini tetap berada di jalanmu dan terus menjadi lebih baik.

For my beloved family who always give pray and encouragement, especially for mama, papa, n grandma, big thanks xooo muchh! So far, ya tidak bisa berhenti berterimakasih. Tidak hanya dalam hal skripsi ini, tetapi ya berterimakasih untuk semua yang ada di kehidupan ya. Dalam hal skripsi, beliau selaku sponsor utama segi materiil dan moril. Dan yang paling istimewa adalah DOAnyaa. . . Who had soothe my soul is crushed when it was, and remove every tear that falls with a soothing words my soul . . .No one can match the sincerity of your heart. . . Praise be to Allah for a mom n dad like them 😃

Untuk pembimbing ya Pak Adek dan Buk Lyra yang senantiasa dan tanpa bosan membimbing dan mendampingi ya saat seminar dan kompre. . hehehe. so big thanks for pak adek n buk lyra. . . Perangkat jurusan dimana saya berada,mwuuahh a lot! Haha. . .

Ini dia BID Group, Acha n Dieje (cieee,,,alah S.Si wak yoo,,,xixi pissss), Pia(tetap sebarkan aura positif mu nak, jilbab oh jilbab, don't forget it,), kakak pia alias Anggun alias Ichun (kak, akuilah adikmu lagi kak..), ipat (semangat syg,wlopun hrs tkr bhn, aq ykin qm bs melahap apapun it, auum), n the last widi yang maaaaatau wak...hahaha. Bwt anggun pia ipat widi, *SEMANGKA, juni menunggu kalian!!!!* Ga terasa udh 4 thn lebih qt bersama, begitu bnyk wrna yang tercipta dengan berbagai pengalaman suka dan duka, dihibur-disakiti, diperhatikan-dikecewakan, didengar-diabaikan, dibantu-ditolak, namun semua ini tidak pernah sengaja dilakukan dengan tujuan kebencian. Semoga smua kehangatan ini ttp terjaga smpai qt tua nanti.

Bwt personil kozzan "LOPE", kak Bemis n "petakku" alias melin. Makasi atas smuanya y kak, kebaikanmu tak tergantikan, buruan tamat kak,hbs t married, jd y bs kjambi & "petakku" alias melin, sbr y syg, smua akan indah pada waktunya, semangat demi gelar S.Hum,,!!. Bwt yovi semoga acara na lancr y cin,, bunga, febi, dona, tia, helda, vini, desi, citra, dita, makasi doanya y adek2ku...
N the next, bwt pasukan Mc Zoven, nurul(si berani yang penyayang, makasi atas smuanya y cin), rida(pulsa oh pulsa), ami, paul,n teman2 Mc Zoven lainnya yg ga bs disbtin satu2 persatu, big thanks all!

Oke, sepertinya ad yang kurang ya. Hmm.. hahahaha.. memang, terimakasih spesial ke laki-laki spesial non family, hahahaha.. yang saat berpengaruh banyak dalam hidup dan pola pikir saya, serta bersedia menjadi teman bertukar pikiran dalam hal apapun. Thanks telah begituuu menyebalkan&menyenangkan,, hahahahha..

N the last bwt smua pihak yang telah membantu yang namanya tidak dpt disebutkan satu persatu, y ucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya, jgn sedih y, ga da mksd bwt membeda2kan kq,tp kondisi yg membatasi,,walopun ga terukir lwt tulisan tapi kalian terukir dalam hatiku...

Thank youu semuaa! Graciasssss!

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Sesungguhnya segala puji hanyalah bagi Allah SWT karena telah memberikan rahmat dan hidayahNya sehingga penulis dapat menyelesaikan hasil penelitian yang berjudul **"PELABELAN TOTAL (a,d)-SISI ANTI AJAIB SUPER PADA GABUNGAN GRAF LINTASAN".**

Dalam kesempatan kali ini penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Dr. Syafrizal Sy dan Ibu Dr. Lyra Yulianti selaku pembimbing I dan II yang telah membimbing penulis dengan sepenuh hati.
2. Bapak Dr. Admi Nazra, Bapak Narwen, M.Si, dan Ibu Izzati Rahmi HG, M.Si selaku penguji yang telah membaca, memberi masukan dan saran kepada penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.
3. Bapak-bapak dan Ibu-ibu dosen jurusan Matematika yang telah memberikan ilmu dan pengetahuan bagi penulis.
4. Bapak Ir. Werman Kasoep, M.Si selaku Pembimbing Akademik.
5. Orang tua dan keluarga yang telah memberikan dukungan moral dan materil serta doa.
6. Semua pihak yang telah membantu dan tidak bisa disebutkan namanya satu persatu.

Penulis menyadari bahwa hasil penelitian ini masih memiliki banyak kekurangan dan jauh dari sempurna, untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran yang sangat membangun, sehingga dapat bermanfaat bagi kita semua.

Padang, Januari 2012

Penulis

ABSTRAK

Suatu graf G dikatakan pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib jika terdapat bilangan bulat $a > 0, d \geq 0$ dan pemetaan bijektif $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \ldots, |V| + |E|\}$ sedemikian sehingga $W = \{w(xy) | w(xy) = \lambda(\mathrm{x}) + \lambda(\mathrm{y}) + \lambda(\mathrm{xy}) : \mathrm{xy} \in \mathrm{E}\}$ dapat ditulis $W = \{a, a + d, \ldots, a + (|E| - 1)d\}$. Suatu pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib λ dari graf G dikatakan *super* jika $\lambda(V) = \{1, 2, \ldots, |V|\}$. Pada penelitian ini dideskripsikan bagaimana mengkonstruksi suatu pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib super dari graf tak terhubung $P_n \cup P_{n+1}$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$. Diperoleh bahwa graf $P_n \cup P_{n+1}$ mempunyai pelabelan total $(4n + 4, 1)$-sisi anti ajaib super dan pelabelan total $(2n + 6, 3)$-sisi anti ajaib super, dan jenis kedua pelabelan ini adalah *selfdual.*

Kata kunci: *graf tak terhubung, pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib, pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib super, selfdual.*

ABSTRACT

A graph G is called (a,d)-edge antimagic total ((a,d)-EAT) if there exist integers $a > 0,\ d \geq 0$ and bijective $\lambda: V \cup E \to \{1, 2, \dots, |V| + |E|\}$ such that $W = \{w(xy) \mid w(xy) = \lambda(x) + \lambda(y) + \lambda(xy),\ xy \in E\}$, and we can write $W = \{a, a + d, \dots, a + (|E| - 1)d\}$. An (a,d)-EAT labeling λ of graph G is *super* if $\lambda(V) = \{1, 2, \dots, |V|\}$. In this paper, it will decribed how to construct a super (a,d)-EAT labeling of disconnected graphs, namely $P_n \cup P_{n+1}$ for positif integer $n \geq 2$. In the process of the construction, we found $(4n + 4, 1)$-EAT labeling and $(2n + 6, 3)$-EAT labeling of the graph. The type of these both labelings is *selfdual*.

Key words : *(a,d)-edge anti magic total labeling, super (a,d)-EAT labeling, disconnected graph, selfdual*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pelabelan graf merupakan topik dalam teori graf yang pertama kali diperkenalkan oleh Sadlacek tahun 1964, Stewart tahun 1966, Kotzig dan Rosa tahun 1970. Pelabelan banyak mendapat perhatian pada saat sekarang ini, dikarenakan model-model yang ada pada pelabelan graf berguna untuk aplikasi yang luas, seperti dalam masalah jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, teori koding, kristalografi sinar-x, radar, sistem alamat jaringan komunikasi dan desain sirkuit (Slamin, 1997).

Pada prinsipnya pelabelan graf merupakan pemberian nilai (label) pada titik, sisi, kedua titik dan sisi ataupun pada bidang. Pelabelan pada sebuah graf ditandai dengan sejumlah label pada titik dan sisi graf. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi. Hingga kini dikenal beberapa jenis pelabelan pada graf, antara lain pelabelan *gracefull*, pelabelan harmoni, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Dalam pengembangan pelabelan anti ajaib, dikenal pula pelabelan total sisi anti ajaib, dan pelabelan total sisi anti ajaib super. Pada tugas akhir ini penulis melakukan kajian pada pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib super dari graf G dimana a adalah bobot sisi terkecil pada pelabelan, dan d adalah selisih antara dua bobot sisi.

1.2 Permasalahan

Permasalahan yang akan dikaji dalam tugas akhir ini adalah bagaimana bentuk/jenis pelabelan total (*a,d*) - sisi anti ajaib super pada $P_n \cup P_{n+1}$.

1.3 Pembatasan Masalah

Kajian masalah dibatasi pada pembahasan mengenai pelabelan total (*a,d*)-sisi anti ajaib super pada $P_n \cup P_{n+1}$, untuk $n \geq 2$.

1.4 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan dari penulisan skripsi ini adalah untuk membuktikan bahwa graf $P_n \cup P_{n+1}$ mempunyai pelabelan total $(4n + 4, 1)$-sisi anti ajaib super dan pelabelan total $(2n + 6, 3)$-sisi anti ajaib super.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam tugas akhir ini terbagi menjadi empat bab yaitu Bab I Pendahuluan, pada bab ini berisi latar belakang, permasalahan, pembatasan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan. Bab II sebagai landasan teori membahas mengenai konsep dasar dari teori graf berupa definisi dan terminologi, jenis-jenis graf, pelabelan pada graf, serta definisi-definisi yang digunakan pada pembahasan dari permasalahan dibab III. Bab III berisi pembahasan mengenai pelabelan total anti ajaib super pada graf tak terhubung. Bab IV Penutup berisikan kesimpulan dan saran dari penulisan skripsi ini.

BAB II

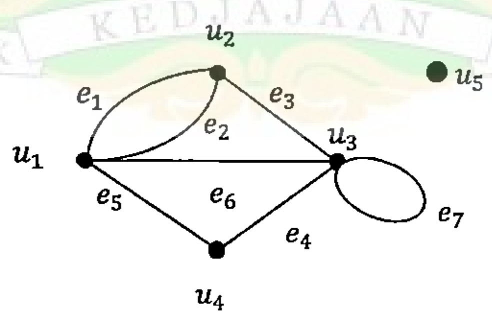
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi dan konsep dasar dari teori graf, dan pelabelan graf yang akan digunakan pada bab selanjutnya.

2.1 Definisi dan Terminologi Graf

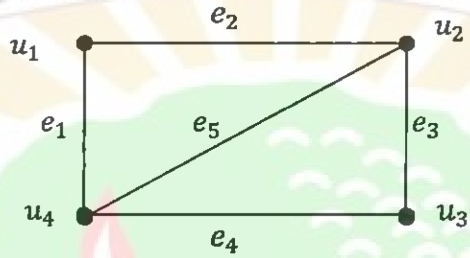
Suatu **graf G** adalah pasangan himpunan tak kosong *V* yang elemen–elemennya disebut **titik (*vertices*)** dan himpunan (boleh kosong) *E* yang elemen-elemennya disebut **sisi (*edge*)** yang menghubungkan sepasang titik *u,v* di *V*. Sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi titiknya harus ada. Banyaknya titik dan sisi pada graf masing-masing dinyatakan sebagai $p=|V|$ dan $q=|E|$, dimana p merupakan ***orde* (*order*)** dari graf G dan q merupakan **ukuran (*size*)** dari graf G.

Sisi yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut dengan **gelang (*loop*)**. Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik, maka sisi tersebut dinamakan **sisi rangkap (*multiple edge*)**. Pada gambar graf G_1, sisi e_7 adalah *loop* dan sisi e_1, e_2 adalah sisi rangkap.



Gambar 2.1.1 Graf G_1

Misal u dan v titik pada graf G. Titik v dikatakan **bertetangga (*adjacent*)** dengan u jika terdapat sisi e yang menghubungkan titik u dan v, yaitu $e = uv$. Jika $e = uv$ adalah sisi pada graf G maka e dikatakan **terkait (*incident*)** dengan titik u dan v. Contohnya pada Gambar 2.1.1, titik u_1 bertetangga dengan titik u_2 dan u_4 tetapi titik u_1 tidak bertetangga dengan titik u_3, titik u_1 terkait dengan sisi e_1, tetapi titik u_3 tidak terkait dengan sisi e_1 .

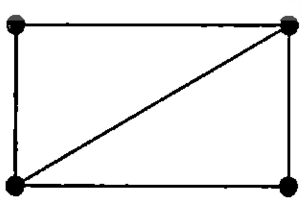


Gambar 2.1.2

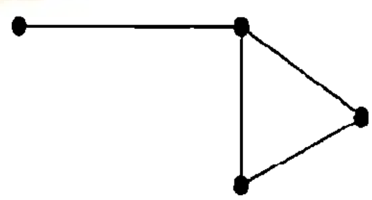
Derajat (*degree*) dari suatu titik menyatakan banyaknya sisi yang terhubung pada titik tersebut, dinotasikan dengan *d(v)*. Contohnya pada Gambar 2.1.2 dimana derajat setiap titik adalah d(u_1) = 2, d(u_2) = 3, d(u_3) = 2, d(u_4) = 3. Titik yang memiliki derajat 0 disebut dengan **titik terisolasi**.

Pada graf juga dikenal operasi penggabungan dari dua graf. Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$, maka gabungan G_1 dan G_2 adalah $G_3 = G_1 \cup G_2$ dengan $V(G_3) = V_1 \cup V_2$ dan $E(G_3) = E_1 \cup E_2$.

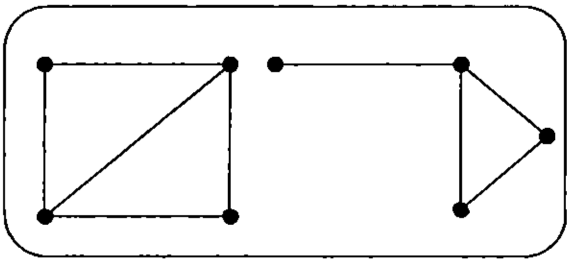
Contoh:



G_1



G_2



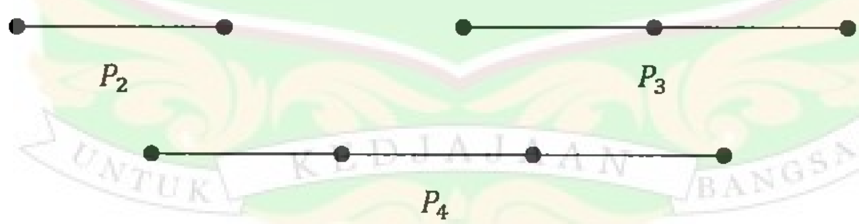
Gambar 2.1.3 $G_1 \cup G_2$

Pembahasan pada tugas akhir ini dibatasi untuk graf sederhana yaitu graf yang tidak memuat *loop* atau sisi ganda.

2.2 Jenis – Jenis Graf

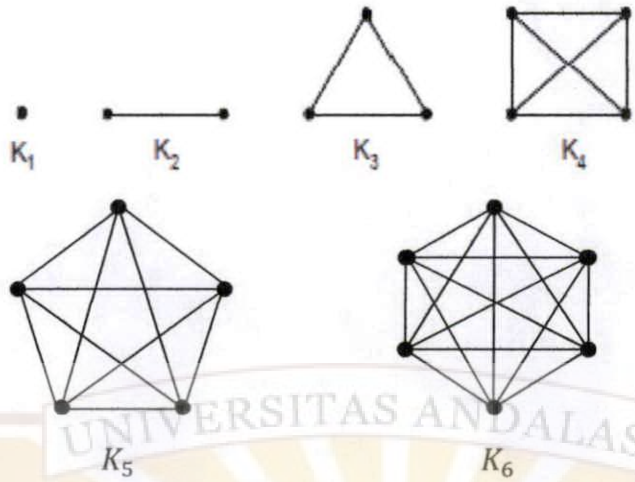
Berdasarkan sifatnya graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori (jenis) bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan graf pun dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda, berdasarkan banyak titik, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi.

Graf lintasan dengan n titik dinotasikan P_n, adalah graf terhubung sederhana dengan dua titik berderajat satu yang merupakan ujung-ujung dari lintasan dan $(n-2)$ titik yang berderajat dua. Pada Gambar 2.2.1 diberikan contoh tiga lintasan.



Gambar 2.2.1 Graf Lintasan

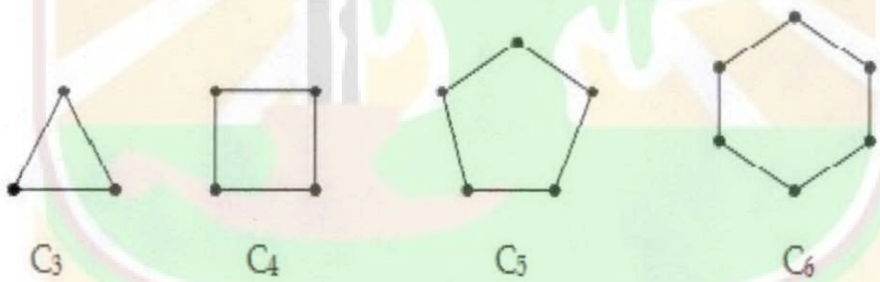
Graf Lengkap (*complete graph*) adalah graf sederhana yang setiap titiknya mempunyai sisi ke semua titik lainnya. Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n, seperti diberikan pada Gambar 2.2.2.



Gambar 2.2.2 Graf Lengkap K_n untuk n ≤ 6

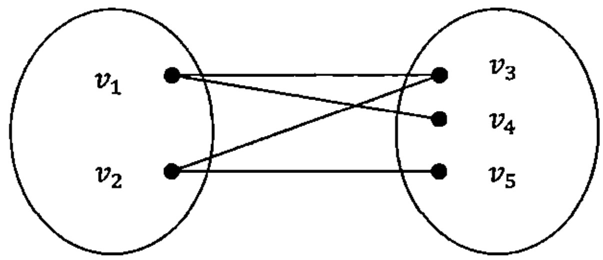
Graf siklus adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf siklus dengan n titik dilambangkan dengan C_n, $n \geq 3$.

Contoh :



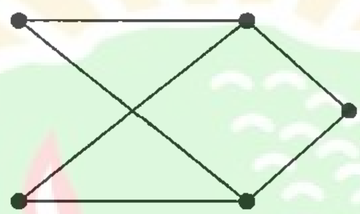
Gambar 2.2.3 Graf Siklus C_n untuk 3 ≤ n ≤ 6

Graf G yang himpunan titiknya dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2 sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah titik di V_1 ke sebuah titik di V_2 disebut **graf bipartit**. Dengan kata lain, setiap dua titik di V_1 (demikian pula dengan setiap dua titik di V_2) tidak bertetangga. Contohnya pada Gambar 2.2.4.



Gambar 2.2.4 Graf Bipartit

Graf G dikatakan **terhubung** jika untuk setiap dua titik di G terdapat lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut.



Gambar 2.2.5 Graf Terhubung

2. 3 Pelabelan pada Graf

Pelabelan ***(labeling)*** pada suatu graf adalah pemetaan dari setiap elemen graf ke bilangan bulat positif, yang mana bilangan tersebut disebut dengan **label**. Jika pelabelan dilakukan hanya pada titiknya saja, maka pelabelan tersebut dinamakan **pelabelan titik** ***(vrtex labeling)***, sedangkan pelabelan yang domainnya adalah himpunan dari sisi-sisinya dinamakan **pelabelan sisi** ***(edge labeling).*** Apabila domainnya merupakan gabungan dari himpunan sisi dan titik, maka pelabelan jenis ini adalah **pelabelan total** ***(total labeling)***. Dalam pelabelan graf juga diperkenalkan pelabelan ajaib dan pelabelan anti-ajaib.

Jumlah label yang terkait dengan elemen graf disebut dengan **bobot**. Misal terdapat sisi $e = xy$ di suatu graf G. Maka **bobot sisi** e adalah jumlah label sisi e dan label titik x dan y. Misal terdapat titik x di suatu graf G. Maka **bobot titik** x

adalah jumlah label titik x dan label semua sisi yang terkait dengan titik x. Graf yang memiliki bobot sisi atau bobot titik yang sama disebut graf dengan **pelabelan ajaib**. Graf yang memiliki bobot sisi atau bobot titik yang berbeda disebut graf dengan **pelabelan anti ajaib.** Pelabelan ini didefinisikan oleh Simanjuntak dkk pada tahun 2000 [7].

2.4 Pelabelan Anti Ajaib

Berikut ini adalah beberapa jenis pelabelan anti ajaib pada suatu graf yang dikutip dari [1].

a) **Pelabelan sisi (a,d)-titik anti ajaib**

Graf G dikatakan mempunyai pelabelan sisi (a,d)-titik anti ajaib jika terdapat bilangan bulat $a > 0$, $d \geq 0$ dan $\lambda_1 : E(G) \rightarrow \{1,2,\ldots,q\}$, sedemikian sehingga himpunan bobot titik dari semua titik di G, yang dinotasikan dengan $W_1 = \{\, w(x)|w(x) = \sum \lambda_1(xy),\ x \in V(G)\}$, dapat ditulis sebagai $W_1 = \{a, a+d, a+2d, \ldots, a+(p-1)d\}$.

b) **Pelabelan titik (a,d)-sisi anti ajaib**

Graf G dikatakan mempunyai pelabelan titik (a,d)-sisi anti ajaib jika terdapat bilangan bulat $a > 0$, $d \geq 0$ dan $\lambda_2 : V(G) \rightarrow \{1,2,\ldots,p\}$, sedemikian sehingga himpunan bobot sisi dari semua sisi di G, yang dinotasikan dengan $W_2 = \{w(xy)|w(xy) = \lambda_2(x) + \lambda_2(y), xy \in E(G)\}$, dapat ditulis sebagai $W_2 = \{a, a+d, a+2d, \ldots, a+(q-1)d\}$.

c) **Pelabelan total (a, d)-titik anti ajaib**

Sebuah fungsi bijeksi $\lambda_3 : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,\ldots,p+q\}$ dikatakan *pelabelan total (a, d)-titik anti ajaib* pada graf G jika himpunan bobot titik untuk semua titik di G yang dinotasikan dengan $W_3 = \{w(x)|w(x) = \lambda_3(x) +$

$\sum \lambda_2(xy), xy \in E(G)\}$, dapat ditulis sebagai $W_3 = \{a, a+d, a+2d, \dots, a+(p-1)d\}$ untuk suatu $a > 0$ dan $d \geq 0$.

d) **Pelabelan total (*a*, *d*)-sisi anti ajaib**

Sebuah fungsi bijeksi $\lambda_4 : V(G) \cup E(G) \to \{1,2,\dots,p+q\}$ dikatakan *pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib* pada graf G jika himpunan bobot sisi untuk semua sisi di G yang dinotasikan dengan $W_4 = \{w(xy) | w(xy) = \lambda_4(x) + \lambda_4(xy) + \lambda_4(y), xy \in E(G)\}$, dapat ditulis sebagai $W_3 = \{a, a+d, a+2d, \dots, a+(q-1)d\}$ untuk suatu $a > 0$ dan $d \geq 0$.

Suatu pelabelan total (*a*,*d*)-sisi anti ajaib λ dari graf G dikatakan **super** apabila $\lambda(V) = \{1, 2, \dots, p\}$[8]. Pada pelabelan super ini, $\lambda(E) = \{p+1, p+2, \dots, p+q\}$. Misal terdapat sisi $e_i = u_i u_{i+1}$ untuk suatu i, maka untuk setiap pelabelan total (*a*,*d*)-sisi anti ajaib super, bobot sisi maksimum dari e_i tidak akan melebihi $p + (p+q) + (p-1)$ karena titik u_i dan u_{i+1} dapat dilabeli berturut-turut dengan $p-1$ dan p, sementara sisi e_i dilabeli dengan $p+q$. Sehingga diperoleh:

$$a + (q-1)d \leq p + (p+q) + (p-1)$$

$$a + (q-1)d \leq 3p + q - 1 \tag{1}$$

sementara untuk bobot sisi minimum e_i tidak akan kurang dari $1 + (p+1) + 2$, sehingga

$$1 + (p+1) + 2 \leq a$$

$$p + 4 \leq a \tag{2}$$

Dari (1) dan (2), kita dapatkan

$$\Leftrightarrow \quad p+4+(q-1)d \le a+(q-1)d \le 3p+q-1$$

$$\Leftrightarrow \quad p+4+(q-1)d \le 3p+q-1$$

$$\Leftrightarrow \quad (q-1)d \le 2p+q-5$$

$$\Leftrightarrow \quad d \le \frac{2p+q-5}{q-1}, q \ne 1$$

Misal terdapat sisi $e_i = u_i u_{i+1}$ untuk suati i. Untuk sebarang pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1,2,\dots,p+q\}$, maka bobot sisi maksimum dari e_i tidak akan melebihi $(p+q-2)+(p+q-1)+(p+q)$, sehingga diperoleh

$$a+(q-1)d \le (p+q-2)+(p+q-1)+(p+q)$$

$$a+(q-1)d \le 3p+3q-3 \tag{3}$$

Sementara untuk bobot sisi minimum e_i tidak akan kurang dari $1+2+3$, yaitu

$$6 \le a. \tag{4}$$

Sehingga dari (3) dan (4), diperoleh

$$\Leftrightarrow \quad 6+(q-1)d \le a+(q-1)d \le 3p+3q-3$$

$$\Leftrightarrow \quad 6+(q-1)d \le 3p+3q-3$$

$$\Leftrightarrow \quad (q-1)d \le 3p+3q-3-6$$

$$\Leftrightarrow \quad (q-1)d \le 3p+3q-9$$

$$\Leftrightarrow \quad d \le \frac{3p+3q-9}{q-1}, q \ne 1$$

Misalkan diberikan pelabelan total sisi ajaib λ pada graf G yang mempunyai p titik dan q sisi. Maka Wallis dkk [9] mendefinisikan pelabelan *dual* λ' sebagai berikut :

$$\lambda'(x) = p + q + 1 - \lambda(x), \forall x \in V(G), \text{ dan}$$

$$\lambda'(xy) = p + q + 1 - \lambda(xy), \forall xy \in E(G).$$

Dengan menggunakan sifat dualitas di atas, maka diperoleh Teorema 2.3.1 berikut.

Teorema 2.3.1. [8] *Misal terdapat graf G dengan p titik dan q sisi. Jika G mempunyai pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib maka G mempunyai pelabelan total (3p + 3q + 3 – a – (q – 1)d, d)-sisi anti ajaib sebagai dualnya.*

Bukti.

Berikut dikonstruksikan pelabelan λ' terhadap sisi dan titik di G sebagai berikut :

$$\lambda'(x) = p + q + 1 - \lambda(x), \forall\, x \in V(G)$$

$$\lambda'(y) = p + q + 1 - \lambda(y), \forall\, y \in V(G)$$

$$\lambda'(xy) = p + q + 1 - \lambda(xy), \forall xy \in E(G).$$

Maka bobot sisi $w'(xy)$ dapat dihitung sebagai berikut :

$$w'(xy) = \lambda'(x) + \lambda'(xy) + \lambda'(y)$$

$$= (p + q + 1 - \lambda(x)) + (p + q + 1 - \lambda(xy))) + (p + q + 1 - \lambda(y))$$

$$= 3p + 3q + 3 - (\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y))$$

Sehingga, $W' = \{w'(xy): xy \in E(G)\}$ terhadap λ' merupakan suatu deret aritmatika yang dimulai dari $3p + 3q + 3 - a - (q - 1)d$ dan beda *d*. Diperoleh bahwa pelabelan total $(3p + 3q + 3 - a - (q - 1)d, d)$-sisi anti ajaib merupakan dual dari pelabelan λ pada G. ■

Pelabelan λ' merupakan dual dari pelabelan total (*a*, *d*)-sisi anti ajaib dari λ pada G. Untuk pelabelan total (*a*,*d*)-sisi anti ajaib super, diperoleh pelabelan total $(4p + q + 3 - a - (q - 1)d, d)$-sisi anti ajaib super sebagai dualnya. Hal tersebut ditunjukkan dalam teorema berikut.

Teorema 2.3.2. [8] *Misal G adalah graf total (a, d)-sisi anti ajaib super dengan p titik dan q sisi. Misal λ_1 adalah pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib super dari G. Maka pelabelan λ_1' yang didefinisikan oleh :*

$$\lambda_1'(x) = p + 1 - \lambda_1(x),\ \forall x \in V(G),\ dan$$

$$\lambda_1'(xy) = 2p + q + 1 - \lambda_1(xy),\ \forall xy \in E(G)$$

merupakan pelabelan total $(4p + q + 3 - a - (q-1)d, d)$*- sisi anti ajaib super dari G yang menjadi dual dari* λ_1.

Bukti.

Misal $xy \in E(G)$. Maka, bobot sisi $w'(xy)$ dapat dihitung sebagai berikut :

$$\begin{aligned} w'(xy) &= \lambda_1'(x) + \lambda_1'(xy) + \lambda_1'(y) \\ &= (p + 1 - \lambda_1(x)) + (2p + q - \lambda_1(xy) + 1) + (p + 1 - \lambda_1(y)) \\ &= 4p + q + 3 - (\lambda_1(x) + \lambda_1(xy) + \lambda_1(y)) \end{aligned}$$

Sehingga, $W' = \{w(xy): xy \in E\}$ terhadap λ_1' merupakan suatu deret aritmatika yang dimulai dari $4p + q + 3 - a - (q-1)d$ dan beda d. Maka diperoleh bahwa pelabelan λ_1' merupakan dual dari pelabelan total (*a, d*)-sisi anti ajaib super dari λ_1 pada G. ∎

Untuk selanjutnya, pembahasan akan difokuskan pada pelabelan total (*a,d*)-sisi anti ajaib super pada graf yang merupakan gabungan dari dua graf lintasan.

BAB III

PEMBAHASAN

Dinotasikan himpunan titik dan sisi dari $P_n \cup P_{n+1}$ sebagai berikut :

$$V\ (P_n \cup P_{n+1}) = \{\ u_{1,i} \mid 1 \le i \le n\ \} \cup \{\ u_{2,j} \mid 1 \le j \le n+1\ \},\ \text{dan}$$

$$E\ (P_n \cup P_{n+1}) = \{\ e_{1,i} \mid 1 \le i \le n-1\ \} \cup \{\ e_{2,j} \mid 1 \le j \le n\ \}$$

dimana $e_{1,i} = u_{1,i}\ u_{1,i+1}$, untuk $1 \le i \le n-1$ dan $e_{2,j} = u_{2,j}\ u_{2,j+1}$, untuk $1 \le j \le n$.

Gambar 3.1.1 Graf $P_n \cup P_{n+1}$

Teorema 3.1 *Untuk setiap $n \ge 2$, graf $P_n \cup P_{n+1}$ mempunyai pelabelan total (4n + 4, 1)-sisi anti ajaib super. Jenis pelabelan ini adalah self dual .*

Bukti. Definisikan label titik dan sisi pada $P_n \cup P_{n+1}$ sebagai berikut :

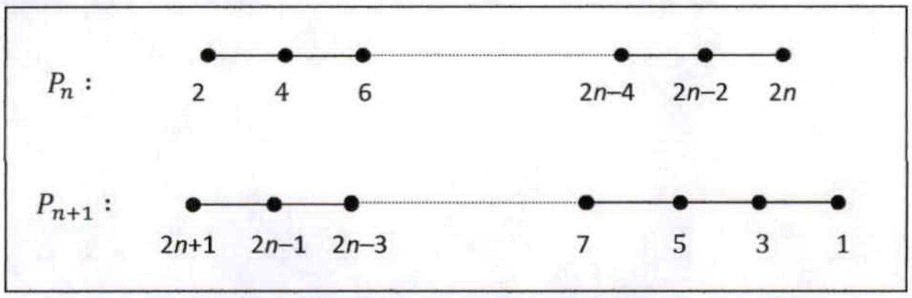
$\lambda\ (u_{1,i}) = 2i$, untuk $1 \le i \le n$

$\lambda\ (u_{2,j}) = 2n + 3 - 2j$, untuk $1 \le j \le n+1$

$\lambda\ (e_{1,i}) = \lambda\ (u_{1,i}\ u_{1,i+1}) = 4n + 1 - 2i$, untuk $1 \le i \le n-1$

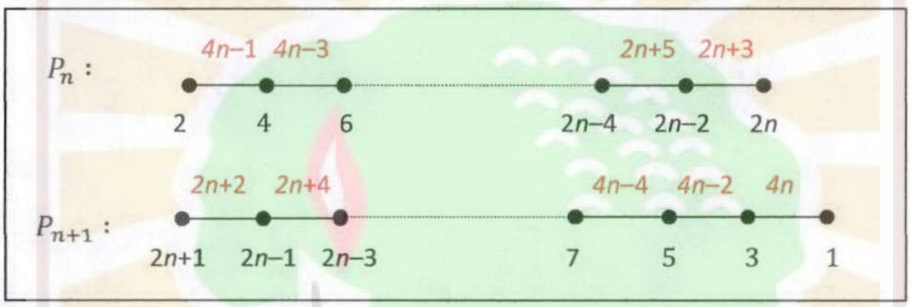
$\lambda\ (e_{2,j}) = \lambda\ (u_{2,j}\ u_{2,j+1}) = 2n + 2j$, untuk $1 \le j \le n$

Diperoleh label titik-titik $P_n \cup P_{n+1}$ seperti pada Gambar 3.1.2 berikut.



Gambar 3.1.2 Pelabelan Titik-titik $P_n \cup P_{n+1}$

Selanjutnya sisi-sisi dilabeli seperti pada Gambar 3.1.3 berikut.



Gambar 3.1.3 Pelabelan Graf $P_n \cup P_{n+1}$

Maka himpunan bobot sisi $P_n \cup P_{n+1}$ dapat dihitung dengan menggabungkan himpunan bobot sisi dari P_n dan P_{n+1}.

a. Bobot-bobot sisi pada P_n dihitung sebagai berikut.

Untuk $i = 1$, diperoleh :

$$w(e_{1,1}) = \lambda(u_{1,1}) + \lambda(e_{1,1}) + \lambda(u_{1,2})$$

$$= 2 + (4n - 1) + 4$$

$$= 4n + 5.$$

Untuk $i = 2$, diperoleh :

$$w(e_{1,2}) = \lambda(u_{1,2}) + \lambda(e_{1,2}) + \lambda(u_{1,3})$$

$$= 4 + (4n - 3) + 6$$

$$= 4n + 7.$$

$$\vdots$$

Untuk $i = n - 2$, diperoleh :

$$w(e_{1,n-2}) = \lambda(u_{1,n-1}) + \lambda(e_{1,n-2}) + \lambda(u_{1,n-1})$$

$$= (2n - 4) + (2n + 5) + (2n - 2)$$

$$= 6n - 1.$$

Untuk $i = n - 1$, diperoleh :

$$w(e_{1,n-1}) = \lambda(u_{1,n-1}) + \lambda(e_{1,n-1}) + \lambda(u_{1,n})$$

$$= (2n - 2) + (2n + 3) + 2n$$

$$= 6n + 1.$$

Maka himpunan bobot sisi P_n adalah sebagai berikut :

$$W\ (P_n) = \{w(e_{1,i}): 1 \leq i \leq n - 1\}$$

$$= \{w(e_{1,1}), w(e_{1,2}), \dots, w(e_{1,n-2}), w(e_{1,n-1})\}$$

$$= \{4n + 5, 4n + 7, \dots, 6n - 1, 6n + 1\}.$$

b. Bobot-bobot sisi pada P_{n+1} dihitung sebagai berikut.

Untuk $j = 1$, diperoleh :

$$w(e_{2,1}) = \lambda(u_{2,1}) + \lambda(e_{2,1}) + \lambda(u_{2,2})$$

$$= (2n+1) + (2n+2) + (2n-1)$$

$$= 6n + 2.$$

Untuk $j = 2$, diperoleh :

$$w(e_{2,2}) = \lambda(u_{2,2}) + \lambda(e_{2,2}) + \lambda(u_{2,3})$$

$$= (2n-1) + (2n+4) + (2n-3)$$

$$= 6n.$$

$$\vdots$$

Untuk $j = n-2$, diperoleh :

$$w(e_{2,n-2}) = \lambda(u_{2,n-2}) + \lambda(e_{2,n-2}) + \lambda(u_{2,n-1})$$

$$= 7 + (4n-4) + 5$$

$$= 4n + 8.$$

Untuk $j = n-1$, diperoleh :

$$w(e_{2,n-1}) = \lambda(u_{2,n-1}) + \lambda(e_{2,n-1}) + \lambda(u_{2,n})$$

$$= 5 + (4n-2) + 3$$

$$= 4n + 6.$$

Untuk $j = n$, diperoleh :

$$w(e_{2,n}) = \lambda(u_{2,n}) + \lambda(e_{2,n}) + \lambda(u_{2,n+1})$$

$$= 3 + 4n + 1$$

$$= 4n + 4.$$

Maka himpunan bobot sisi P_{n+1} adalah :

$$W\ (P_{n+1}) = \{w(e_{2,j}) : 1 \leq j \leq n\}$$

$$= \{w(e_{2,1}), w(e_{2,2}), \dots, w(e_{2,n-2}), w(e_{2,n-1}), w(e_{2,n})\}$$

$$= \{6n + 2, 6n, \dots, 4n + 8, 4n + 6, 4n + 4\}\ .$$

Sehingga diperoleh himpunan bobot sisi pada $P_n \cup P_{n+1}$ sebagai berikut :

$$W\ (P_n \cup P_{n+1}) = W\ (P_n) \cup W\ (P_{n+1})$$

$$= \{w(e_{1,i}) : 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{w(e_{2,j}) : 1 \leq j \leq n\}$$

$$= \{w(e_{1,1}), w(e_{1,2}) \dots, w(e_{1,n-2}), w(e_{1,n-1})\} \cup$$

$$\{w(e_{2,1}), w(e_{2,2}), \dots, w(e_{2,n-2}), w(e_{2,n-1}), w(e_{2,n})\}$$

$$= \{4n + 5, 4n + 7, \dots, 6n - 1, 6n + 1\} \cup$$

$$\{6n + 2, 6n, \dots, 4n + 8, 4n + 6, 4n + 4\}$$

$$= \{4n + 4, 4n + 5, 4n + 6, 4n + 7, 4n + 8, \dots, 6n, 6n + 1, 6n + 2\}$$

Jadi, graf $P_n \cup P_{n+1}$ mempunyai pelabelan total $(4n + 4, 1)$-sisi anti ajaib super untuk $n \geq 2$.

Dengan menggunakan Teorema 2.3.2, akan ditunjukkan bahwa tipe pelabelan total $(4n+4,1)$-sisi anti ajaib super adalah *selfdual.* Banyaknya titik dan sisi pada $P_n \cup P_{n+1}$ adalah :

$$|V(P_n \cup P_{n+1})| = \mathrm{p} = (2n+1)$$

$$|E(P_n \cup P_{n+1})| = \mathrm{q} = (2n-1)$$

Definisikan label titik dan sisi pada $P_n \cup P_{n+1}$ sebagai berikut :

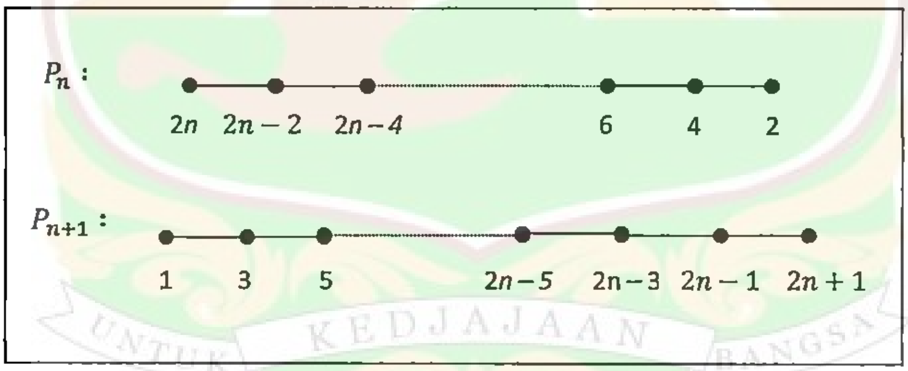
$\lambda'(u_{1,i}) = p + 1 - \lambda\,(u_{1,i})$, untuk $1 \leq i \leq n$

$\lambda'(u_{2,j}) = p + 1 - \lambda\,(u_{2,j})$, untuk $1 \leq j \leq n+1$

$\lambda'(e_{1,i}) = 2p + q - 1 - \lambda\,(e_{1,i})$, untuk $1 \leq i \leq n-1$

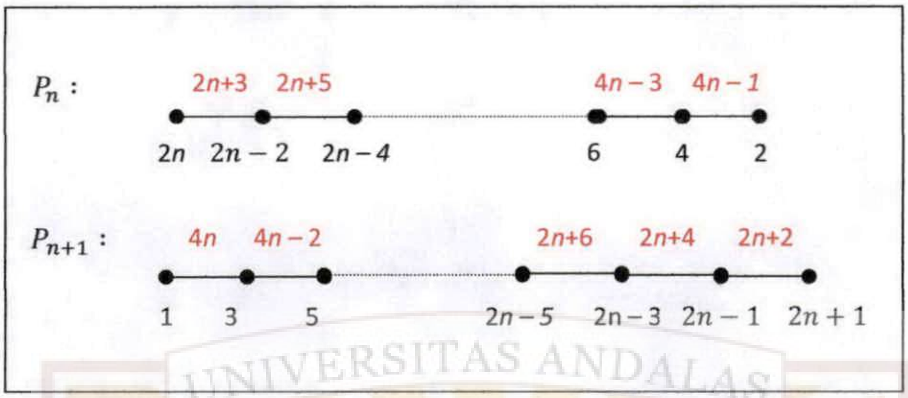
$\lambda'(e_{2,j}) = 2p + q - 1 - \lambda\,(e_{2,j})$ untuk $1 \leq j \leq n$

1. Labeli titik-titik pada $P_n \cup P_{n+1}$ dengan pelabelan λ'



Gambar 3.1.5 Pelabelan Titik-titik $P_n \cup P_{n+1}$

2. Labeli sisi-sisi pada $P_n \cup P_{n+1}$ dengan pelabelan λ'



Gambar 3.1.6 Pelabelan Graf $P_n \cup P_{n+1}$

3. Himpunan bobot sisi $P_n \cup P_{n+1}$ dapat dihitung dengan menggabungkan himpunan bobot sisi dari P_n dan P_{n+1}.

   a. Bobot-bobot sisi pada P_n dihitung sebagai berikut.

Untuk $i = 1$, diperoleh :

$$w'(e_{1,1}) = \lambda'(u_{1,1}) + \lambda'(e_{1,1}) + \lambda'(u_{1,2})$$

$$= 2n + (2n + 3) + (2n - 2)$$

$$= 6n + 1.$$

Untuk $i = 2$, diperoleh :

$$w'(e_{1,2}) = \lambda'(u_{1,2}) + \lambda'(e_{1,2}) + \lambda'(u_{1,3})$$

$$= (2n - 2) + (2n + 5) + (2n - 4)$$

$$= 6n - 1.$$

$\vdots$

Untuk $i = n - 2$, diperoleh :

$$w'(e_{1,n-2}) = \lambda'(u_{1,n-2}) + \lambda'(e_{1,n-2}) + \lambda'(u_{1,n-1})$$

$$= 6 + (4n - 3) + 4$$

$$= 4n + 7.$$

Untuk $i = n - 1$, diperoleh :

$$w'(e_{1,n-1}) = \lambda'(u_{1,n-1}) + \lambda'(e_{1,n-1}) + \lambda'(u_{1,n})$$

$$= 4 + (4n - 1) + 2$$

$$= 4n + 5.$$

Maka himpunan bobot sisi P_n adalah :

$$W'(P_n) = \{w'(e_{1,i}): 1 \le i \le n - 1\}$$

$$= \{w'(e_{1,1}), w'(e_{1,2}) \dots, w'(e_{1,n-2}), w'(e_{1,n-1})\}$$

$$= \{6n + 1, 6n - 1, \dots, 4n + 7, 4n + 5\}.$$

b. Bobot-bobot sisi pada P_{n+1} dihitung sebagai berikut.

Untuk $j = 1$, diperoleh :

$$w'(e_{2,1}) = \lambda'(u_{2,1}) + \lambda'(e_{2,1}) + \lambda'(u_{2,2})$$

$$= 1 + 4n + 3$$

$$= 4n + 4.$$

Untuk $j = 2$, diperoleh :

$$w'(e_{2,2}) = \lambda'(u_{2,2}) + \lambda'(e_{2,2}) + \lambda'(u_{2,3})$$

$$= 3 + (4n - 2) + 5$$

$$= 4n + 6.$$

$\vdots$

Untuk $j = n - 2$, diperoleh :

$$w'(e_{2,n-2}) = \lambda'(u_{2,n-2}) + \lambda'(e_{2,n-2}) + \lambda'(u_{2,n-1})$$

$$= (2n - 5) + (2n + 6) + (2n - 3)$$

$$= 6n - 2.$$

Untuk $j = n - 1$, diperoleh :

$$w'(e_{2,n-1}) = \lambda'(u_{2,n-1}) + \lambda'(e_{2,n-1}) + \lambda'(u_{2,n})$$

$$= (2n - 3) + (2n + 4) + (2n - 1)$$

$$= 6n.$$

Untuk $j = n$, diperoleh :

$$w'(e_{2,n}) = \lambda'(u_{2,n}) + \lambda'(e_{2,n}) + \lambda'(u_{2,n+1})$$

$$= (2n - 1) + (2n + 2) + (2n + 1)$$

$$= 6n + 2.$$

Maka himpunan bobot sisi P_{n+1} adalah :

$$W'(P_{n+1}) = \{w'(e_{2,j}): 1 \leq j \leq n\}$$

$$= \{w'(e_{2,1}), w'(e_{2,2}), \dots, w'(e_{2,n-2}), w'(e_{2,n-1}), w'(e_{2,n})\}$$

$$= \{4n+4, 4n+6, \dots, 6n-2, 6n, 6n+2\}$$

Sehingga diperoleh himpunan bobot sisi $P_n \cup P_{n+1}$ sebagai berikut :

$$W'(P_n \cup P_{n+1}) = W'(P_n) \cup W'(P_{n+1})$$

$$= \{w'(e_{1,i}): 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{w'(e_{2,j}): 1 \leq j \leq n\}$$

$$= \{w'(e_{1,1}), w'(e_{1,2}) \dots, w'(e_{1,n-2}), w'(e_{1,n-1})\} \cup$$

$$\{w'(e_{2,1}), w'(e_{2,2}), \dots, w'(e_{2,n-2}), w'(e_{2,n-1}), w'(e_{2,n})\}$$

$$= \{6n+1, 6n-1, \dots, 4n+7, 4n+5\} \cup$$

$$\{4n+4, 4n+6, \dots, 6n-2, 6n, 6n+2\}$$

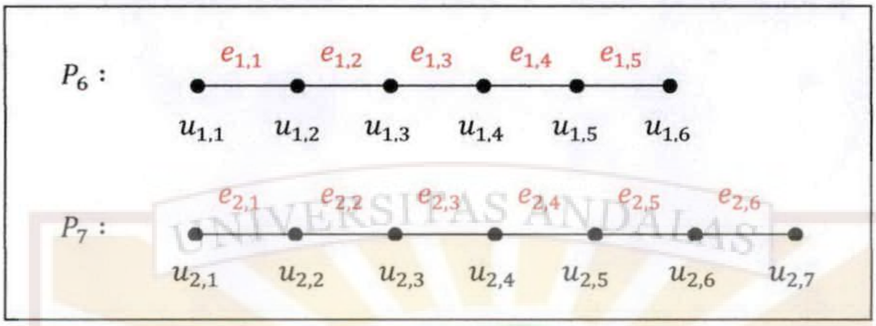
$$= \{4n+4, 4n+5, 4n+6, 4n+7, \dots, 6n-2, 6n-1, 6n,$$

$$6n+1, 6n+2\}.$$

Jadi, graf $P_n \cup P_{n+1}$ dengan pelabelan total $(4n+4, 1)$-sisi anti ajaib super merupakan pelabelan yang bersifat *selfdual*. ■

Contoh 1: Graf $P_6 \cup P_7$ mempunyai pelabelan total (28, 1)-sisi anti ajaib super dan bersifat *selfdual*.

Himpunan titik dan sisi pada $P_6 \cup P_7$ adalah seperti dalam Gambar 3.1.7 berikut.



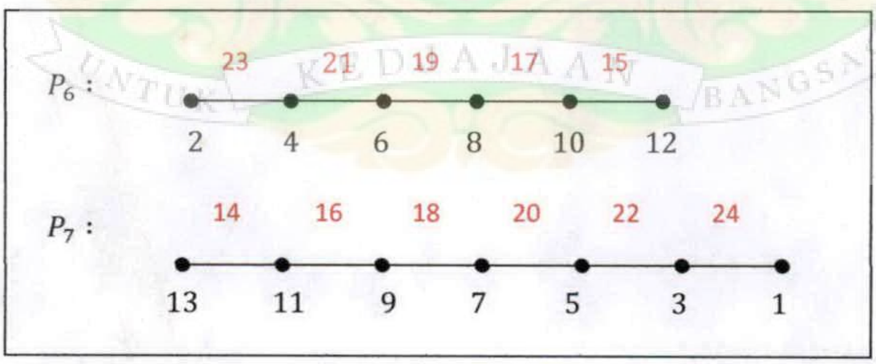
Gambar 3.1.7 Graf $P_6 \cup P_7$

Langkah-langkah pelabelan adalah sebagai berikut.

1. Labeli titik- titik pada $P_6 \cup P_7$

Gambar 3.1.8 Pelabelan Titik pada Graf $P_6 \cup P_7$

2. Labeli sisi- sisi pada $P_6 \cup P_7$



Gambar 3.1.9 Pelabelan Graf $P_6 \cup P_7$

Diperoleh himpunan bobot sisi $P_6 \cup P_7$ sebagai berikut.

Himpunan bobot sisi P_6 adalah sebagai berikut :

$$W\ (P_6) = \{w(e_{1,i}): 1 \leq i \leq 5\}$$

$$= \{w(e_{1,1}), w(e_{1,2}), w(e_{1,3}), w(e_{1,4}), w(e_{1,5})\}$$

$$= \{29, 31, 33, 35, 37\}.$$

Himpunan bobot sisi P_7 adalah sebagai berikut :

$$W\ (P_7) = \{w(e_{2,j}): 1 \leq j \leq 6\}$$

$$= \{w(e_{2,1}), w(e_{2,2}), w(e_{2,3}), w(e_{2,4}), w(e_{2,5}), w(e_{2,6})\}$$

$$= \{38, 36, 34, 32, 30, 28\}.$$

Sehingga diperoleh himpunan bobot sisi untuk $P_6 \cup P_7$:

$$W\ (P_6 \cup P_7) = W\ (P_6) \cup W\ (P_7)$$

$$= \{w(e_{1,i}): 1 \leq i \leq 5\} \cup \{w(e_{2,j}): 1 \leq j \leq 6\}$$

$$= \{w(e_{1,1}), w(e_{1,2}), w(e_{1,3}), w(e_{1,4}), w(e_{1,5})\} \cup$$

$$\{w(e_{2,1}), w(e_{2,2}), w(e_{2,3}), w(e_{2,4}), w(e_{2,5}), w(e_{2,6})\}$$

$$= \{29, 31, 33, 35, 37\} \cup \{38, 36, 34, 32, 30, 28\}$$

$$= \{28, 29, 30, 31, 34, 35, 36, 37, 38\}.$$

Dapat dilihat bahwa pelabelan tersebut adalah pelabelan (28,1)-sisi anti ajaib super. Karena $a = 28$, $d = 1$, $p = |V(P_6 \cup P_7)| = 13$, dan $q = |E(P_6 \cup P_7)| = 11$. Maka berdasarkan Teorema 2.3.2 diperoleh :

$$a' = 4p + q + 3 - a - (q-1)d = 4(13) + (11) + 3 - 28 - (11-1)1 = 28$$

Sehingga diperoleh pelabelan total (28,1)-sisi anti ajaib super yang bersifat *selfdual*. ■

Teorema 3.2 *Untuk setiap $n \geq 2$, graf $P_n \cup P_{n+1}$ mempunyai pelabelan total -($2n + 6$, 3)-sisi antiajaib super. Jenis pelabelan ini adalah selfdual.*

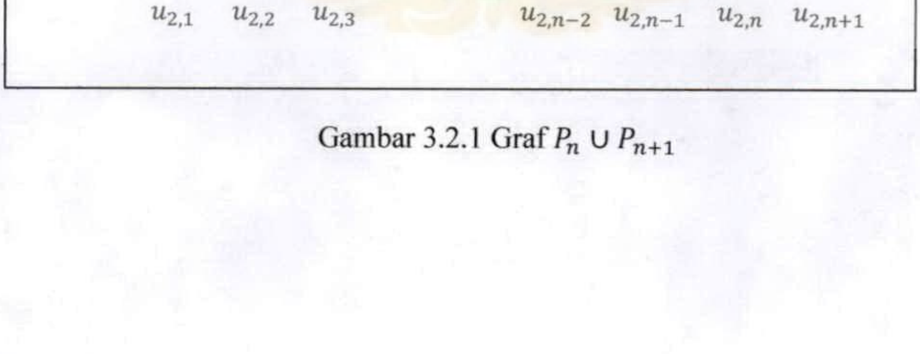
Bukti. Definisikan pelabelan titik dan sisi pada $P_n \cup P_{n+1}$ sebagai berikut :

$\lambda(u_{1,i}) = 2i$, untuk $1 \leq i \leq n$

$\lambda(u_{2,j}) = 2j - 1$, untuk $1 \leq j \leq n + 1$

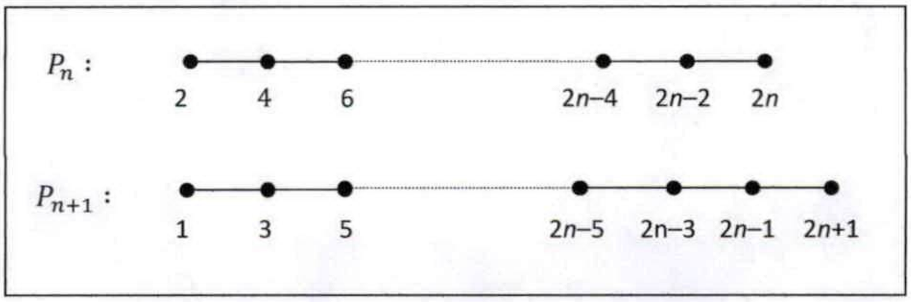
$\lambda(e_{1,i}) = \lambda(u_{1,i}\, u_{1,i+1}) = 2n + 2i + 1$, untuk $1 \leq i \leq n - 1$

$\lambda(e_{2,j}) = \lambda(u_{2,j}\, u_{2,j+1}) = 2n + 2j$, untuk $1 \leq j \leq n$



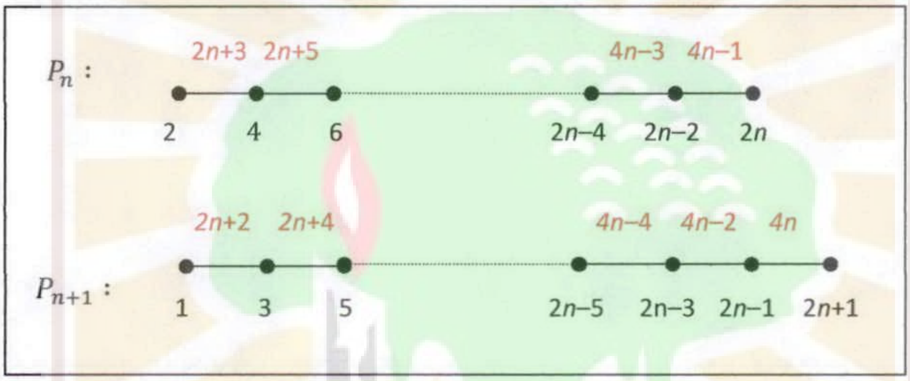
Gambar 3.2.1 Graf $P_n \cup P_{n+1}$

Diperoleh label titik- titik $P_n \cup P_{n+1}$ seperti pada Gambar 3.2.2 berikut.



Gambar 3.2.2 Pelabelan Titik pada Graf $P_n \cup P_{n+1}$

Selanjutnya sisi- sisi dilabeli seperti pada Gambar 3.2.3 berikut.



Gambar 3.2.3 Pelabelan pada Graf $P_n \cup P_{n+1}$

Maka himpunan bobot sisi $P_n \cup P_{n+1}$ dapat dihitung dengan menggabungkan himpunan bobot sisi dari P_n dan P_{n+1}.

a. Bobot- bobot sisi pada P_n dihitung sebagai berikut.

Untuk $i = 1$, diperoleh :

$$w(e_{1,1}) = \lambda(u_{1,1}) + \lambda(e_{1,1}) + \lambda(u_{1,2})$$

$$= 2 + (2n + 3) + 4$$

$$= 2n + 9.$$

Untuk $i = 2$, diperoleh :

$$w(e_{1,2}) = \lambda(u_{1,2}) + \lambda(e_{1,2}) + \lambda(u_{1,3})$$

$$= 4 + (2n + 5) + 6$$

$$= 2n + 15.$$

$$\vdots$$

Untuk $i = n - 2$, diperoleh :

$$w(e_{1,n-2}) = \lambda(u_{1,n-2}) + \lambda(e_{1,n-2}) + \lambda(u_{1,n-1})$$

$$= (2n - 4) + (4n - 3) + (2n - 2)$$

$$= 8n - 9.$$

Untuk $i = n - 1$, diperoleh :

$$w(e_{1,n-1}) = \lambda(u_{1,n-1}) + \lambda(e_{1,n-1}) + \lambda(u_{1,n})$$

$$= (2n - 2) + (4n - 1) + 2n$$

$$= 8n - 3.$$

Maka himpunan bobot sisi P_n adalah sebagai berikut :

$$W(P_n) = \{w(e_{1,i}): 1 \le i \le n - 1\}$$

$$= \{w(e_{1,1}), w(e_{1,2}), \dots, w(e_{1,n-2}), w(e_{1,n-1})\}$$

$$= \{2n + 9, 2n + 15, \dots, 8n - 9, 8n - 3\}$$

b. Bobot-bobot sisi P_{n+1} dihitung sebagai berikut.

Untuk $j = 1$, diperoleh :

$$w(e_{2,1}) = \lambda(u_{2,1}) + \lambda(e_{2,1}) + \lambda(u_{2,2})$$

$$= 1 + (2n + 2) + 3$$

$$= 2n + 6.$$

Untuk $j = 2$, diperoleh :

$$w(e_{2,2}) = \lambda(u_{2,2}) + \lambda(e_{2,2}) + \lambda(u_{2,3})$$

$$= 3 + (2n + 4) + 5$$

$$= 2n + 12.$$

$\vdots$

Untuk $j = n - 2$, diperoleh :

$$w(e_{2,n-2}) = \lambda(u_{2,n-2}) + \lambda(e_{2,n-2}) + \lambda(u_{2,n-1})$$

$$= (2n - 5) + (4n - 4) + (2n - 3)$$

$$= 8n - 12.$$

Untuk $j = n - 1$, diperoleh :

$$w(e_{2,n-1}) = \lambda(u_{2,n-1}) + \lambda(e_{2,n-1}) + \lambda(u_{2,n})$$

$$= (2n - 3) + (4n - 2) + (2n - 1)$$

$$= 8n - 6.$$

Untuk $j = n$, diperoleh :

$$w(e_{2,n}) = \lambda(u_{2,n}) + \lambda(e_{2,n}) + \lambda(u_{2,n+1})$$

$$= (2n-1) + 4n + (2n+1)$$

$$= 8n.$$

Maka himpunan bobot sisi P_{n+1} adalah :

$$W(P_{n+1}) = \{w(e_{2,j}): 1 \leq j \leq n\}$$

$$= \{w(e_{2,1}), w(e_{2,2}) \dots, w(e_{2,n-2}), w(e_{2,n-1}), w(e_{2,n})\}$$

$$= \{2n+6, 2n+12, \dots, 8n-12, 8n-6, 8n\}$$

Sehingga diperoleh himpunan bobot sisi $P_n \cup P_{n+1}$ sebagai berikut :

$$W(P_n \cup P_{n+1}) = \{w(e_{1,i}): 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{w(e_{2,j}): 1 \leq j \leq n\}$$

$$= \{w(e_{1,1}), w(e_{1,2}) \dots, w(e_{1,n-2}), w(e_{1,n-1})\} \cup$$

$$\{w(e_{2,1}), w(e_{2,2}) \dots, w(e_{2,n-2}), w(e_{2,n-1}), w(e_{2,n})\}$$

$$= \{2n+9, 2n+15, \dots, 8n-9, 8n-3\} \cup$$

$$\{2n+6, 2n+12, \dots, 8n-12, 8n-6, 8n\}$$

$$= \{2n+6, 2n+9, 2n+12, 2n+15, \dots, 8n-12, 8n-9,$$

$$8n-6, 8n-3, 8n\}$$

Jadi, graf $P_n \cup P_{n+1}$ mempunyai pelabelan total $(2n+6, 3)$-sisi anti ajaib super untuk $n \geq 2$.

Dengan menggunakan teorema 2.3.2, akan ditunjukkan bahwa tipe pelabelan total $(2n + 6, 3)$-sisi anti ajaib super adalah *selfdual*. Banyaknya titik dan sisi pada $P_n \cup P_{n+1}$ adalah :

$$|V(P_n \cup P_{n+1})| = p = (2n + 1)$$

$$|E(P_n \cup P_{n+1})| = q = (2n - 1)$$

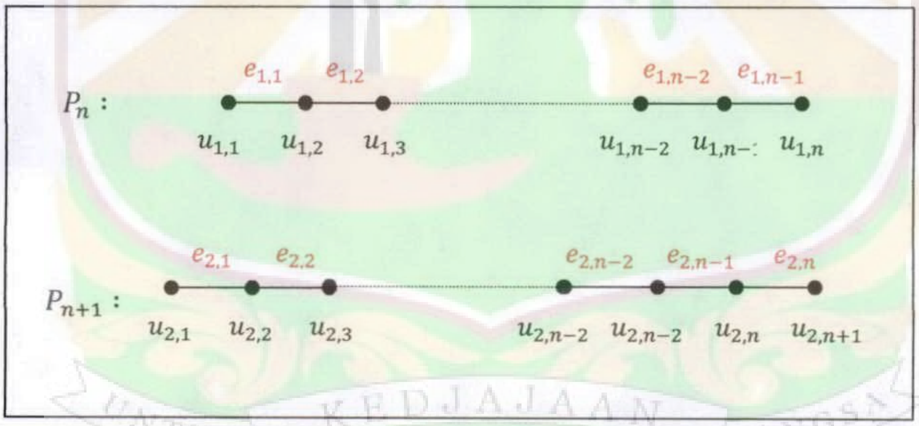
Definisikan label titik dan sisi pada $P_n \cup P_{n+1}$ sebagai berikut :

$\lambda'(u_{1,i}) = p + 1 - \lambda\,(u_{1,i})$, untuk $1 \le i \le n$

$\lambda'(u_{2,j}) = p + 1 - \lambda\,(u_{2,j})$, untuk $1 \le j \le n + 1$

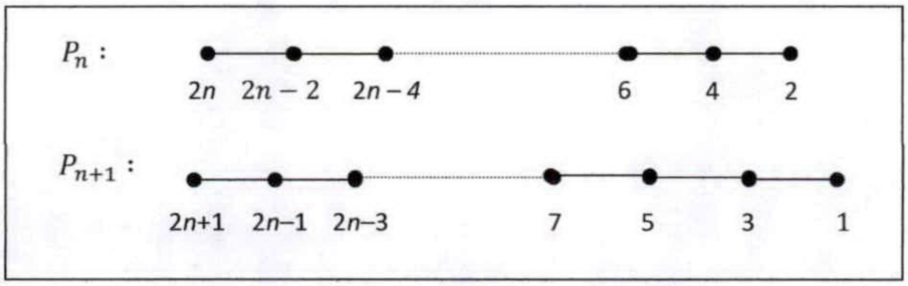
$\lambda'(e_{1,i}) = 2p + q - 1 - \lambda\,(e_{1,i})$, untuk $1 \le i \le n - 1$

$\lambda'(e_{2,j}) = 2p + q - 1 - \lambda\,(e_{2,j})$ untuk $1 \le j \le n$



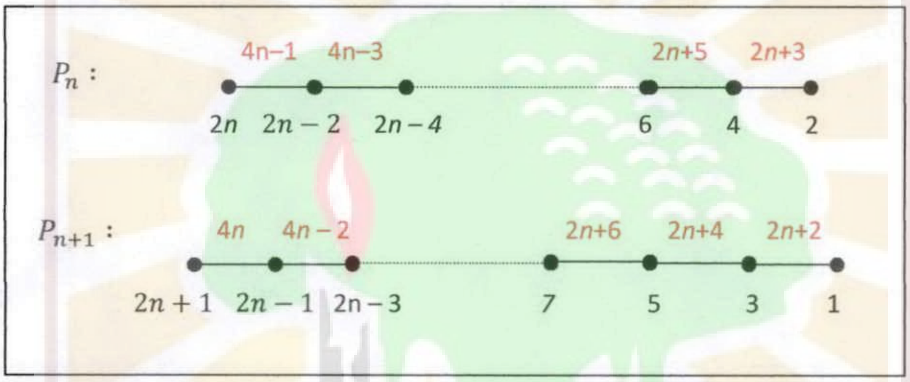
Gambar 3.2.4 Graf $P_n \cup P_{n+1}$

1. Labeli titik-titik $P_n \cup P_{n+1}$ dengan pelabelan λ'



Gambar 3.2.5 Pelabelan Titik Graf $P_n \cup P_{n+1}$

2. Labeli sisi-sisi $P_n \cup P_{n+1}$ dengan pelabelan λ'



Gambar 3.2.6 Pelabelan Graf $P_n \cup P_{n+1}$

3. Himpunan bobot sisi $P_n \cup P_{n+1}$ dapat dihitung dengan menggabungkan himpunan bobot sisi dari P_n dan P_{n+1}.

   a. Bobot- bobot sisi pada P_n

untuk $i = 1$, diperoleh :

$$w'(e_{1,1}) = \lambda'(u_{1,1}) + \lambda'(e_{1,1}) + \lambda'(u_{1,2})$$

$$= 2n + (4n - 1) + (2n - 2)$$

$$= 8n - 3$$

untuk $i = 2$, diperoleh :

$$w'(e_{1,2}) = \lambda'(u_{1,2}) + \lambda'(e_{1,2}) + \lambda'(u_{1,3})$$

$$= (2n-2) + (4n-3) + (2n-4)$$

$$= 8n - 9$$

$$\vdots$$

untuk $i = n-2$, diperoleh :

$$w'(e_{1,n-2}) = \lambda'(u_{1,n-2}) + \lambda'(e_{1,n-2}) + \lambda'(u_{1,n-1})$$

$$= 6 + (2n+5) + 4$$

$$= 2n + 15$$

untuk $i = n-1$, diperoleh :

$$w'(e_{1,n-1}) = \lambda'(u_{1,n-1}) + \lambda'(e_{1,n-1}) + \lambda'(u_{1,n})$$

$$= 4 + (2n+3) + 2$$

$$= 2n + 9$$

Maka himpunan bobot sisi P_n adalah :

$$W'(P_n) = \{w'(e_{1,i}) : 1 \leq i \leq n-1\}$$

$$= \{w'(e_{1,1}) w'(e_{1,2}), \dots, w'(e_{1,n-2}), w'(e_{1,n-1})\}$$

$$= \{8n-3, 8n-9, \dots, 2n+15, 2n+9\}.$$

b. Bobot-bobot sisi pada P_{n+1}

untuk $j = 1$, diperoleh :

$w'(e_{2,1}) = \lambda'(u_{2,1}) + \lambda'(e_{2,1}) + \lambda'(u_{2,2})$

$= (2n + 1) + 4n + (2n - 1)$

$= 8n$

untuk $j = 2$, diperoleh :

$w'(e_{2,2}) = \lambda'(u_{2,2}) + \lambda'(e_{2,2}) + \lambda'(u_{2,3})$

$= (2n - 1) + (4n - 2) + (2n - 3)$

$= 8n - 6$

$\vdots$

untuk $j = n - 2$, diperoleh :

$w'(e_{2,n-2}) = \lambda'(u_{2,n-2}) + \lambda'(e_{2,n-2}) + \lambda'(u_{2,n-1})$

$= 7 + (2n + 6) + 5$

$= 2n + 18$

untuk $j = n - 1$, diperoleh :

$w'(e_{2,n-1}) = \lambda'(u_{2,n-1}) + \lambda'(e_{2,n-1}) + \lambda'(u_{2,n})$

$= 5 + (2n + 4) + 3$

$= 2n + 12$

untuk $j = n$, diperoleh :

$$w'(e_{2,n}) = \lambda'(u_{2,n}) + \lambda'(e_{2,n}) + \lambda'(u_{2,n+1})$$

$$= 3 + (2n + 2) + 1$$

$$= 2n + 6$$

Maka himpunan bobot sisi P_{n+1} adalah :

$$W'(P_{n+1}) = \{w'(e_{2,j}): 1 \leq j \leq n\}$$

$$= \{w'(e_{2,1}), w'(e_{2,2}), \dots, w'(e_{2,n-2}), w'(e_{2,n-1}), w'(e_{2,n})\}$$

$$= \{8n, 8n - 6, \dots, 2n + 18, 2n + 12, 2n + 6\}$$

Sehingga diperoleh himpunan bobot sisi $P_n \cup P_{n+1}$ sebagai berikut :

$$W'(P_n \cup P_{n+1}) = \{w'(e_{1,i}): 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{w'(e_{2,j}): 1 \leq j \leq n\}$$

$$= \{w'(e_{1,1}), \dots, w'(e_{1,n-1})\} \cup \{w'(e_{2,1}), \dots, w'(e_{2,n})\}$$

$$= \{8n - 3, 8n - 9, \dots, 2n + 15, 2n + 9\} \cup$$

$$\{8n, 8n - 6, \dots, 2n + 18, 2n + 12, 2n + 6\}$$

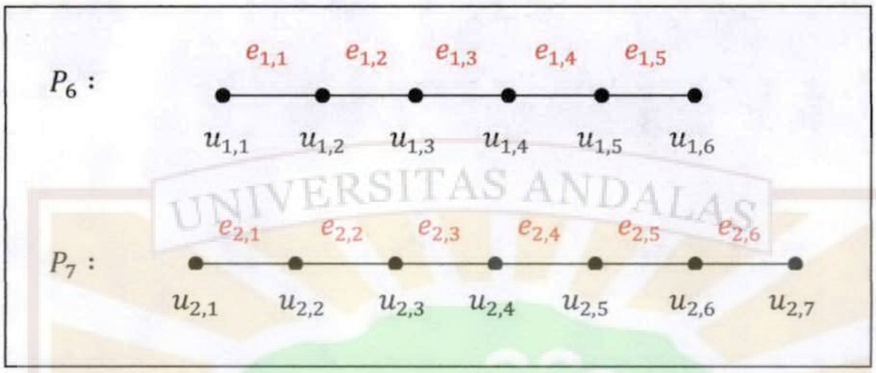
$$= \{2n + 6, 2n + 9, 2n + 12, 2n + 15, 2n + 18, \dots, 8n - 9, 8n - 6,$$

$$8n - 3, 8n\}$$

Jadi, graf $P_n \cup P_{n+1}$ dengan pelabelan total $(2n + 6, 3)$-sisi anti ajaib super merupakan pelabelan yang bersifat *selfdual*. ■

Contoh 2: Graf $P_6 \cup P_7$ mempunyai pelabelan total (18, 3)-sisi anti ajaib super dan bersifat *selfdual*.

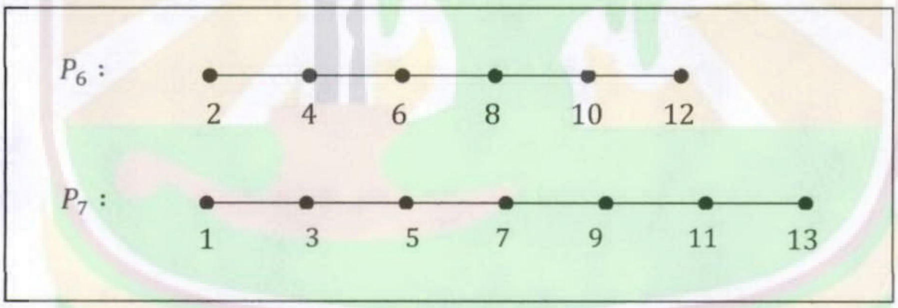
Himpunan titik dan sisi pada $P_6 \cup P_7$ adalah seperti dalam Gambar 3.2.7 berikut



Gambar 3.2.7 Graf $P_6 \cup P_7$

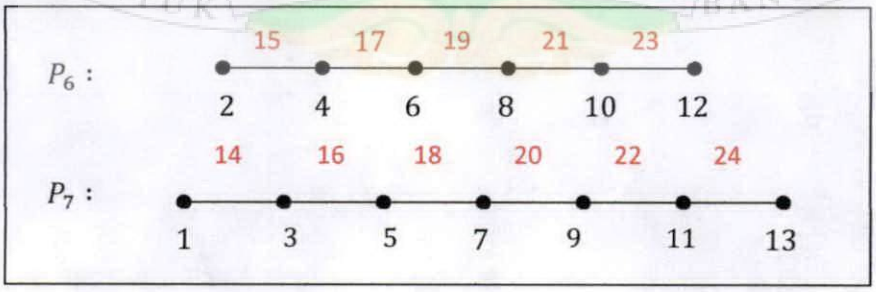
Langkah-langkah pelabelan adalah sebagai berikut.

1. Labeli titik- titik $P_6 \cup P_7$



Gambar 3.2.8 Pelabelan Titik pada Graf $P_6 \cup P_7$

2. Labeli sisi- sisi $P_6 \cup P_7$



Gambar 3.2.9 Pelabelan Graf $P_6 \cup P_7$

Diperoleh himpunan bobot sisi $P_6 \cup P_7$ sebagai berikut.

Himpunan bobot sisi P_6 dapat dihitung sebagai berikut :

$$W\ (P_6) = \{w(e_{1,i}): 1 \leq i \leq 5\}$$

$$= \{w(e_{1,1}), w(e_{1,2}), w(e_{1,3}), w(e_{1,4}), w(e_{1,5})\}$$

$$= \{21, 27, 33, 39, 45\}.$$

Himpunan bobot sisi P_7 dapat dihitung sebagai berikut :

$$W\ (P_7) = \{w(e_{2,j}): 1 \leq j \leq 6\}$$

$$= \{w(e_{2,1}), w(e_{2,2}), w(e_{2,3}), w(e_{2,4}), w(e_{2,5}), w(e_{2,6})\}$$

$$= \{18, 24, 30, 36, 42, 48\}.$$

Sehingga diperoleh himpunan bobot sisi untuk $P_6 \cup P_7$:

$$W\ (P_6 \cup P_7) = W\ (P_6) \cup W\ (P_7)$$

$$= \{w(e_{1,i}): 1 \leq i \leq 5\} \cup \{w(e_{2,j}): 1 \leq j \leq 6\}$$

$$= \{w(e_{1,1}), w(e_{1,2}), w(e_{1,3}), w(e_{1,4}), w(e_{1,5})\} \cup$$

$$\{w(e_{2,1}), w(e_{2,2}), w(e_{2,3}), w(e_{2,4}), w(e_{2,5}), w(e_{2,6})\}$$

$$= \{21, 27, 33, 39, 45\} \cup \{18, 24, 30, 36, 42, 48\}$$

$$= \{18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48\}$$

Dapat dilihat bahwa pelabelan tersebut adalah pelabelan (18,3)-sisi anti ajaib super. Karena $a = 18$, $d = 3$, $p = |V(P_6 \cup P_7)| = 13$, dan $q = |E(P_6 \cup P_7)| = 11$. Maka berdasarkan Teorema 2.3.2 diperoleh :

$$a' = 4p + q + 3 - a - (q-1)d = 4(13) + (11) + 3 - 18 - (11-1)3 = 18$$

Sehingga diperoleh pelabelan total (18,3)-sisi anti ajaib super yang bersifat *selfdual*. ■

BAB IV

KESIMPULAN

Pelabelan total (a, d)*-sisi anti ajaib* dari suatu graf G adalah pemetaan satu-satu $\lambda : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., p + q\}$, sedemikian sehingga himpunan bobot sisi dari semua sisi di G, yang dinotasikan dengan $W(xy) = \{w(xy) | w(xy) = \lambda(x) + \lambda(y) + \lambda(xy), \forall x, y \in V(G) \text{ dan } xy \in E(G)\}$ atau dapat ditulis sebagai $W(xy) = \{a, a + d, a + 2d, ..., a + (q - 1)d\}$ untuk suatu $a > 0$ dan $d \geq 0$.

Pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib dikatakan **super** jika $\lambda(V) = \{1, 2, \cdots, p\}$. Pada tulisan ini telah ditunjukkan bahwa untuk setiap $n \geq 2$, graf $P_n \cup P_{n+1}$ mempunyai pelabelan total $(4n + 4,1)$-sisi anti ajaib super dan pelabelan total $(2n + 6,3)$-sisi anti ajaib super. Pada tulisan ini juga telah ditunjukkan bahwa kedua pelabelan di atas merupakan pelabelan yang bersifat *selfdual*.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Baca, M dan M, Miller. 2008. **Super Edge-Antimagic Graphs**. Brown Walker Press. Florida.

[2] N. Hartsfield dan G. Ringe.1994. **Pearls in Graph Theory**. Academic Press. San Diego.

[3] Ngurah, A.A.G dan E.T. Baskoro. 2003. On magic and antimagic total labeling of generalized Petersen graph. *Utilitas Math.* **63** : 97-107.

[5] Ngurah. 2001. *Pelabelan Ajaib dan Anti Ajaib.* ITB.Bandung. *Tesis- S2. T*idak diterbitkan.

[6] Munir, Rinaldi. 2005. *Matematika Diskret Edisi Ketiga.* Informatika Bandung. Bandung.

[7] R. Simanjuntak. F. Bertault dan M. Miller. 2000. Two new (a, d)-antimagic graph labeling. *Proc. of Eleventh Australia Workshop of Combinatorial Algorithm.* 179-189.

[8] Sudarsana, W, D. Ismaimuza, E. T. Baskoro dan H. Assiyatun. 2005. On super (a,d)-edge antimagic total labelling of disconnected graphs. *JCMCC.* **55** : 149-158.

[9] W. D. Wallis, E.T. Baskoro, M. Miller dan Slamin. 2000. Edge-magic total labellings. *Australasian Journal of Combinatorics.* **22** : 177-190.