BILANGAN RAMSEY UNTUK GRAF BINTANG Sn DAN GRAF RODA Wm

SKRIPSI

ISNAINI RAMADHANI
07934025

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2012

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini menyatakan bahwa :

Nama	:	Isnaini Ramadhani
No. Buku Pokok	:	07 934 025
Jurusan	:	Matematika
Bidang	:	Kombinatorik
Judul Skripsi	:	**Bilangan Ramsey Untuk Graf Bintang *Sn* dan Graf Roda *Wm***

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal 06 Agustus 2012 berdasarkan ketentuan yang berlaku.

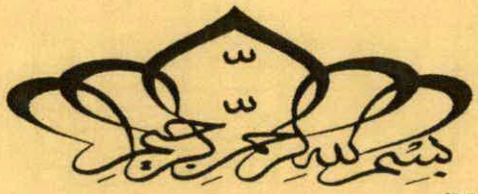
Pembimbing / Penguji	Penguji
1.	1.
Dr. Lyra Yulianti NIP. 197507061999032003	Dr. Syafrizal Sy NIP.196708071993091001
2.	2.
Zulakmal M.Si NIP. 196711081998021001	Dr. Admi Nazra NIP.197303301999031002
	3.
	Narwen M.Si NIP.196704101997021001

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand

Dr. Syafrizal Sy

NIP.196708071993091001



"Dan seandainya semua pohon yang ada dibumi dijadikan pena,

dan lautan dijadikan

tinta, ditambah lagi tujuh lautan sesudah itu, maka belum akan habislah

kalimat-kalimat Allah yang akan dituliskan, sesungguhnya Allah maha

Perkasa lagi Maha Bijaksana". (Q.S. Lukman: 27)

Alhamdulillah.... dengan ridha-Mu ya Allah.....

Amanah ini telah selesai, sebuah langkah usai sudah. Cinta telah ku gapai, namun itu bukan akhir dari perjalanan ku, melainkan awal dari sebuah perjalanan.

Tiada cinta yang paling suci selain kasih sayang ayahanda dan ibundaku

Setulus hatimu bunda, searif arahanmu ayah

Doamu hadirkan keridhaan untukku, Petuahmu tuntunkan jalanku

Pelukmu berkahi hidupku, diantara perjuangan dan tetesan doa malammu

Dan sebait doa telah merangkul diriku, Menuju hari depan yang cerah

Kini diriku telah selesai dalam studiku

Dengan kerendahan hati yang tulus, bersama keridhaan-Mu ya Allah,

Kupersembahkan karya tulis ini untuk yang termulia, Ayahanda ....

Ibunda ...., Kakakku ....,dan Adikku.....

Terima kasih atas cintanya, semoga karya ini dapat mengobati beban kalian walau hanya sejenak, semua jasa-jasa kelian tak kan dapat kulupakan.

Semoga Allah beserta kita semua..
AMIIN..

Thank's To Pembimbing

Beribu ucapan terimakasih aQ ucapkan kepada org yg begitu berjasa dalam penyelesaian studi_Q ini yaitu ibu Dr. Lyra Yulianti dan Bapak Zulakmal, M.Si..

Sumpah, Ibu dan Bapak adalah pembimbing yg paliiinnnnnnnnnnnnnnggg baik,.(serius ne bu,pak ☺)

berurusan sama ibu dan bapak sangat mudah,tidak membebani mahasiswa,pokoke plong bgtz dahhh… ☺

Thank's To ANREQMAN..

Bwt teman2_Q di Anreqman, **AMIE** (yg udh dluan sukses, ntik rebelz nyusul ea.. ☺), **MPOK REVI** (yg ga jelas situasiny,setiap ditanya slalu malawak,susah diajak serius..hahahah), **MELY** (anak yg paling lembut dan nurut,.hehheh), **MISS FIT** (ketua genk kami yg dengar2 lge S2,semoga sukses aja), **RIDA** (sumpah,ne org ga Tw kabarnya dimana,.jgn lupakan kisah Qt berdua,,aseekk.. ☺), **CITA** (cmngdh cita November tuh,,), **AMEL** (yg lge marah sm rebelz,gara2 ga dksh tw jdwl semnar,.bukan gt amel semua org mnk ga dksh tw,.kecuali dya nanya,biznya amel ga nanya sehhh..muph ea.. ☺)

Thank's To Ladies Koz

Bwt OCINK n SARI (temen foto2 aq dikoz..hah ga bakal ad lge neh jadwal pemotretan dikoz ibu..hikz..hikzz) , WINA n AIU (kamar yg slalu aq minta air galonnya klo gallon aq habizz,.wahh thanks bgt ea,.klo ga ad kalian rebelz bs dehidrasi..hhahah lebayy ☺) BEY n OcHA (klo kamar yg Atu ini sering ksh aq makanan,palage klo puasa kerjaan si bey tuh tw bana rebelz iduik susah..aseekk),.

CICI,WENY,EKA,OCHA 010,MARIA,ELA,LIA 011,ANGGI,PUTRI dan cemua koz ladies aja..thanks ea atas pertemanan nya clama ini,.selama berteman klo ad sikap rebelz yg tdak disukai,rebelz mnta maap..”maapkan aq menduakan cintamu” hehehe kama lo pae nyo ko.. ☺..

Thanks To BRC

Wahhh kalo nyebut BRC ga ad habiznya..kalian penyemangat rebelz selama ini,.thanks bwt rara,dhoci,uwok,dhea,dhani,chicken,andra,jeje dan semua anggota yg membantu rebelz BEGADANG selama ini..hheheehhh bwt RMC juga mkc atas kucuran danany,.nanti klo rebelz udh suksess dganti dahhhh..hhahhahah

Thanks TO panitia suksesnya rebelz

Ada RIRI Sebagai moderator seminarnya rebelz (thanks bgt ea ri atas suara indahnya hhehheh)

Ada WINA n PAK ETEK sebagai seksi konsumsinya rebelz (adUhhh muph bgtz ea wina n pak etek,,udah nyusahin kalian nenteng2 kuenya,,heheheh thanks..thnks..thnks.. ☺)

Ada Tika si tukang parcel hehehe (mkc bgtz ea tika atas parcelnya,jd rebelz ga perlu pusing2 soal parcel,jadi lbh konsen bwt kompre,,. ☺)

Ada si BEY, OCHA 09 n OCHA 010 (ini neh org yg berjasa dibidang penampilannya rebelz,mkc bwt bajunya si bey, jilbabnya ocha 09 dan manset bajunya ocha 010,.duwh jd malu neh rebelz minjem semua,.maklum rebelz kere..hhhaahha

DAN Tak lupa rebelz ucapin bwt teman2 MC.ZOVEN, SENIOR DAN JUNIOR YG TELAH MEMBANTU REBELZ SELAMA KULIAH DI JURUSAN MATEMATIKA UNAND,."TANPA KALIAN AQ BUKAN SIAPA2"... ☺

☺

RebeLz OrLov

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur tiada henti-hentinya penulis panjatkan kehadirat Allah S.W.T. atas segala kelimpahan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "***BILANGAN RAMSEY UNTUK GRAF BINTANG DAN GRAF RODA***" ini. Salawat serta beriring salam bagi kekasih Allah, Muhammad Rasulullah SAW yang telah menjadi tauladan dan mengantarkan umat manusia dari abad kegelapan menuju abad terang dan berilmu pengetahuan.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, dorongan, kerjasama maupun bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Ibu Dr. Lyra Yulianti sebagai dosen Pembimbing I yang telah sabar dan bersedia meluangkan waktu dan pikiran sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

2. Bapak Zulakmal, M.Si sebagai dosen Pembimbing II yang telah sabar dan bersedia meluangkan pikiran dan waktu sehingga akhirnya penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini.

3. Bapak Dr. Syafrizal Sy, Bapak Dr. Admi Nazra, dan Bapak Narwen, M.Si yang telah bersedia membaca, menelaah, dan menguji naskah skripsi ini.

4. Semua Dosen di Fakultas MIPA UNAND khususnya di Jurusan Matematika yang telah membagi ilmu kepada penulis selama studi.

5. Teman-teman di Jurusan Matematika, terutama teman-teman MC ZOVEN, senior serta junior yang telah memberikan dorongan dan semangat untuk tetap maju, dan semua pihak yang turut membantu hingga selesainya skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan namanya satu persatu, terima kasih.

Secara khusus penulis mengucapkan terimakasih kepada yang mulia Ayahanda Ali Asrun, S.Pd.I dan yang tercinta Ibunda Armita yang telah memberikan do'a motivasi, semangat dan dorongan yang luarbiasa dan tiada henti.

Penulis sangat menyadari bahwa dalam skripsi ini masih banyak sekali kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk penyempurnaan skripsi ini.

Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan sesuatu yang bermanfaat bagi pihak yang membacanya.

Padang, Juni 2012

Isnaini Ramadhani

ABSTRACT

Given graph G and H, the Ramsey number $R(G, H)$ is the smallest natural number n such that every graph F of order n fulfills the following condition: either F contains G or the complement of F contains H. This paper investigates the Ramsey number $R(S_n, W_m)$ of star versus wheel. Given star S_n and wheel W_m then $R(S_n, W_m) = 3n - 2$ for odd m, $n \geq 3$ and $m \leq 2n - 1$. Furthermore $R(S_n, W_m) = 3n - 4$ for odd n, $n \geq 5$ and $m = 2n - 4$.
Keywords :Ramsey numbers, stars, wheels.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Seiring perkembangan zaman dan kemajuan teknologi, aplikasi teori graf telah merambah ke aneka disiplin ilmu dan membantu memudahkan orang untuk menyelesaikan permasalahan. Penggunaan graf ditekankan untuk memodelkan persoalan. Teori graf juga sangat berguna untuk mengembangkan model-model yang terstruktur dalam berbagai situasi. Teori graf berkembang seiring dengan ditemukannya masalah-masalah dalam kehidupan. Beberapa masalah yang dapat diselesaikan dengan teori graf, seperti masalah jaringan listrik, jaringan telepon, jaringan komputer, jalan penghubung antar kota dan lain sebagainya.

Salah satu teori yang berkembang pesat dalam bidang graf adalah teori Ramsey. Teori Ramsey pertama kali dikaji oleh Frank Plumpton Ramsey (1930). Teori ini digunakan dalam permasalahan mencari prosedur untuk menentukan benar-tidaknya (*konsistensi*) suatu formula logika yang diberikan. Teori tersebut menjadi terkenal setelah Erdos dan Szekeres (1935) mengaplikasikannya ke dalam teori Graf. Ramsey mendefinisikan bahwa apabila terdapat dua buah bilangan asli a dan b dengan $a, b \geq 2$, maka bilangan Ramsey $R(a, b)$ adalah bilangan asli terkecil n, sedemikian sehingga jika graf lengkap K_n dengan n titik diwarnai dengan warna merah atau biru, maka graf tersebut akan selalu memuat graf lengkap

K_a dengan a titik merah atau K_b dengan b titik biru sebagai subgraf. Bilangan $R(a, b)$ ini disebut sebagai *bilangan Ramsey klasik.*

Penelitian tentang penentuan bilangan Ramsey klasik $R(a, b)$ telah memperoleh banyak perhatian. Namun demikian, hasilnya masih jauh dari yang diharapkan. Semenjak pertama kali diperkenalkan (1928), hanya sembilan nilai eksak bilangan Ramsey klasik $R(a, b)$ yang baru diketahui. Konsep awal bilangan Ramsey adalah konsep bilangan Ramsey klasik dua warna yang diberikan oleh Erdos dan Szekeres. Karena masalah ini sangat sulit, beberapa peneliti memperumum konsep bilangan Ramsey klasik menjadi konsep bilangan Ramsey graf sebarang. Bilangan Ramsey graf $R(G, H)$ didefinisikan sebagai bilangan bulat terkecil N sedemikian sehingga setiap graf F dengan orde N akan memenuhi kondisi sebagai berikut: F memuat G sebagai subgraf atau komplemen dari F memuat H sebagai subgraf.

Kajian penentuan bilangan Ramsey Graf untuk pasangan graf bintang dan bintang telah tuntas dilakukan oleh Burr dkk (1973). Penentuan bilangan Ramsey untuk bintang dan graf bipartit lengkap juga telah dikaji, walaupun hasilnya masih sedikit. Hal ini dilakukan oleh Harary (1972), Lawrence (1973), Parson (1975), dan Rosyida (2004). Kajian penentuan bilangan Ramsey untuk bintang dan roda hampir tuntas, dan dilakukan oleh beberapa peneliti, diantaranya: Baskoro dkk. (2002), Chen dkk. (2004), dan Korolova (2005). Kasus yang tersisa untuk bintang dan roda tersebut dikaji oleh penulis dan hasilnya disajikan pada Bab III.

1.2 Perumusan Masalah

Misal terdapat graf bintang dengan n titik, dinotasikan S_n dan graf roda dengan $m+1$ titik, dinotasikan W_m. Akan ditentukan berapakah bilangan asli terkecil $R(S_n, W_m) = t$ sedemikian sehingga sebarang graf G dengan t titik memuat sebuah graf bintang S_n atau komplemennya memuat sebuah graf roda W_m.

1.3 Pembatasan Masalah

Pada tahun 2001, Surahmat dan Baskoro mengkaji bilangan Ramsey untuk bintang dan roda. Hasilnya adalah $R(S_n, W_4) = 2n - 1$ untuk n ganjil, $n \geq 3$ dan $R(S_n, W_4) = 2n+1$ untuk n genap. Mereka juga membuktikan $R(S_n, W_5) = 3n-2$ untuk $n \geq 3$. Selain itu, mereka juga memperoleh $R(S_n, W_m) = 3n - 2$ untuk m ganjil, $m \geq 5$ dan $n \geq 2m - 4$. Hasil ini juga diperkuat oleh Chen dkk. (2004) yang membuktikan $R(S_n, W_m) = 3n - 2$ untuk m ganjil , $m \geq 5$ dan $n \geq m - 1 \geq 2$. Zhang dkk. menunjukkan $R(S_n, W_6) = 2n + 1$ untuk $n \geq 3$ dan $R(S_n, W_8) = 2n + 1$ untuk n ganjil, $5 \leq n \leq 10$ dan $R(S_n, W_8) = 2n + 2$ untuk n genap. Korolova menunjukkan bahwa untuk m ganjil, $R(S_n, W_m) = 3n - 2$ jika $n = m$, $m + 1$ atau $m + 2$. Selain itu Hasmawati (2005) juga membuktikan $R(S_n, W_m) = m + n - 2$ untuk n ganjil, $m \geq 2n - 2$ dan $n \geq 4$.

Pada tugas akhir ini akan dibahas bilangan Ramsey untuk pasangan bintang dan roda untuk selang m dan n yang belum dikaji yaitu : $R(S_n, W_m)$ untuk m ganjil, $n \geq 3$ dan $m \leq 2n - 1$, serta untuk n ganjil, $n \geq 5$ dan $m = 2n - 4$.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk menentukan bilangan Ramsey $R(S_n, W_m)$ untuk m ganjil, $n \geq 3$ dan $m \leq 2n - 1$, serta bilangan Ramsey $R(S_n, W_m)$ untuk n ganjil, $n \geq 5$ dan $m = 2n - 4$.

1.5 Sistematika Penulisan

Pada Bab I diuraikan tentang latar belakang masalah, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan skripsi ini. Konsep dasar dari bilangan Ramsey, definisi dan terminologi, serta beberapa teori pendukung yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan skripsi ini disajikan pada Bab II sebagai landasan teori. Pada bab ini juga akan diberikan beberapa teorema pendukung untuk membantu proses pembuktian teorema utama. Pembahasan dari permasalahan tersebut akan diuraikan pada Bab III. Penulisan skripsi ini diakhiri dengan bagian kesimpulan dan saran yang disajikan pada Bab IV.

BAB II

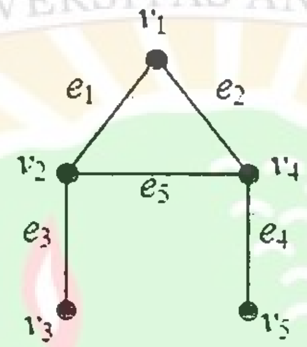
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan disajikan beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan permasalahan yang telah dikemukakan pada Bab I. Definisi dan terminologi graf diberikan pada Subbab 2.1. Subbab 2.2 menjelaskan tentang jenis-jenis graf yang digunakan dalam skripsi ini, sementara Subbab 2.3 menjelaskan tentang bilangan Ramsey. Teorema dan lema pendukung untuk menyelesaikan permasalah an skripsi ini diberikan pada Subbab 2.4.

2.1 Definisi dan Terminologi Graf

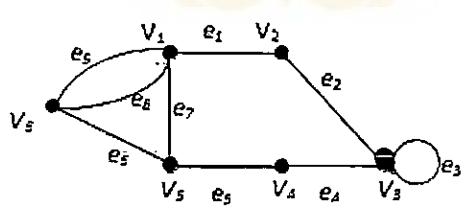
Graf $G = (V, E)$ terdiri dari pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah **himpunan titik** (*vertex*) di graf G dan E adalah himpunan pasangan tak terurut dari unsur-unsur di V. Elemen-elemen E disebut **sisi** (*edge*). Himpunan titik dari G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisinya dinotasikan dengan $E(G)$. Banyak titik di G disebut **orde** (*order*) dari G, yang dinotasikan dengan $|V(G)|$ dan banyak sisi pada G disebut **ukuran** (*size*) dari G yang dinotasikan dengan $|E(G)|$.

Titik u dikatakan **bertetangga** (*adjacent*) dengan titik v, jika $e = uv \in E(G)$ dan sisi e dikatakan **terkait** (*incident*) dengan titik u dan v. Dua sisi e_1 dan e_2 pada G disebut sisi-sisi bertetangga jika e_1 dan e_2 terkait pada satu titik yang sama. Pada Gambar 2.1.1, titik v_2 bertetangga dengan titik v_1, v_3 dan v_4, tetapi tidak bertetangga dengan titik v_5, sedangkan titik v_5 hanya bertetangga dengan titik v_4. Kemudian, sisi e_1 dikatakan terkait dengan titik v_1 dan v_2, dan sisi e_2 terkait dengan titik v_1 dan v_4.



Gambar 2.1.1. Ilustrasi ketetanggaan dan keterkaitan pada suatu graf

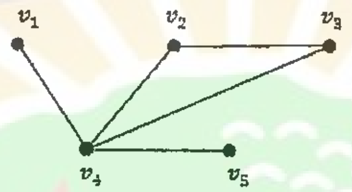
Jalan (*walk*) dari titik v_0 ke v_n di G adalah barisan hingga $v_0, v_0v_1, v_1, v_1v_2, v_2, ..., v_{n-1}v_n, v_n$ dari titik-titik dan sisi-sisi di G sedemikian sehingga $v_{i-1}v_i \in E(G)$ untuk $i = 1, 2, ..., n$. Jalan dari v_0 ke v_n dapat ditulis dengan v_0v_n-jalan. Panjang dari jalan adalah banyaknya sisi dari barisan tersebut. Jalan dikatakan tertutup jika $v_0 = v_n$ dan dikatakan terbuka jika $v_0 \neq v_n$. Perhatikan Gambar 2.1.1.



Gambar 2.1.2. Walk dalam graf.

Barisan $\{v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_3, e_4, v_4, e_5, v_5, e_6, v_6, e_9, v_1, e_8, v_6\}$ yang terlihat pada Gambar 2.1.2 merupakan jalan di G.

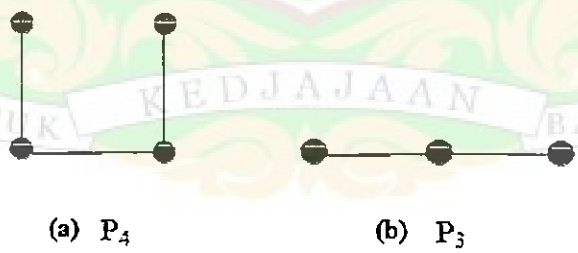
Jika semua sisi yang dilewati pada suatu jalan berbeda maka disebut **jalur** (*trail*).



Gambar 2.1.3. Trail.

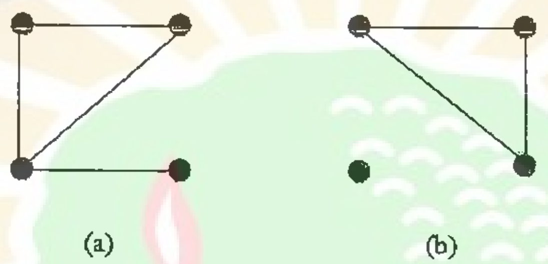
Suatu jalan dikatakan lintasan apabila semua titik dan sisinya berbeda. Lintasan dari v_0 ke v_n dapat ditulis sebagai v_0v_n-lintasan. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n atau dapat juga ditulis dengan bentuk berikut $P_n : \{v_1, v_2, ..., v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, ..., v_n\}$ [1].

Gambar 2.1.3 berikut ini adalah contoh graf lintasan.



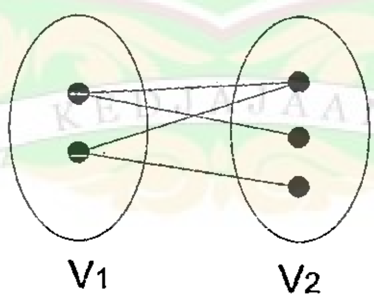
Gambar 2.1.4. Lintasan P_4 dan P_3.

Misal terdapat graf $G = (V, E)$ dengan $u, v \in V(G)$. Titik u dikatakan **terhubung** dengan titik v dalam graf G jika G memuat suatu lintasan dengan titik u dan titik v sebagai titik ujungnya. Jika tidak demikian, maka graf dikatakan sebagai graf **tak terhubung** (*disconnected graph*). Gambar 2.1.5 memperlihatkan graf terhubung dan tak terhubung.



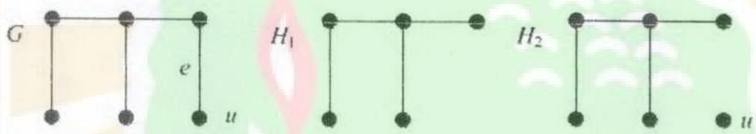
Gambar 2.1.5. (a) Graf terhubung (b) Graf tak terhubung.

Graf G yang himpunan titiknya dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2 sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah titik di V_1 kesebuah titik di V_2 disebut **graf bipartit** dan dinyatakan sebagai $G(V_1, V_2)$. Contoh graf Bipartit diberikan pada gambar berikut.



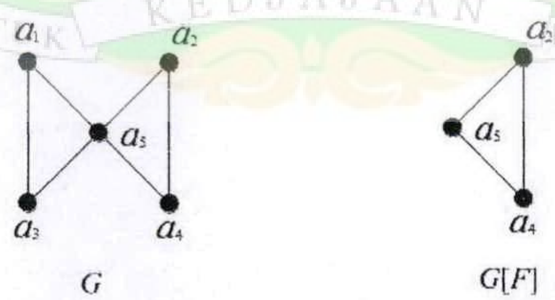
Gambar 2.1.6. Ilustrasi Graf Bipartit.

Graf H disebut subgraf dari graf G, yang dinotasikan dengan $H \subseteq G$, jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Misalkan $u \in V(G)$ dengan $|V(G)| \geq 2$, maka $G - u$ adalah subgraf dari graf G dengan $V(G-u) = V(G) \setminus \{u\}$ dan $E(G-u) = E(G) \setminus \{uv \mid v \in V(G)\ \}$. Misalkan $e = uv \in E(G)$, maka $G - e$ adalah subgraf dari graf G dengan $V(G-e) = V(G)$ dan $E(G-e) = E(G) \setminus \{e\}$. Gambar 2.1.7 memberikan contoh graf yang berasal dari pengurangan titik dan sisi pada graf G.



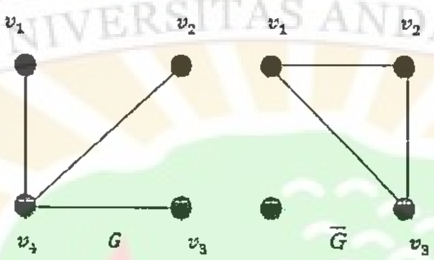
Gambar 2.1.7. Ilustrasi $H_1 = G - u$ dan $H_2 = G - e$.

Subgraf F dikatakan subgraf terinduksi dari G, jika $u, v \in V(F)$ dan $uv \in E(G)$ maka haruslah $uv \in E(F)$. Graf G yang diinduksi oleh F dinotasikan dengan $G[F]$. Contoh graf G dan subgraf terinduksi $G[F]$ dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 2.1.8. Ilustrasi penginduksian suatu graf.

Komplemen dari G, dinotasikan dengan $\bar{G}$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$, dimana dua titik bertetangga di $\bar{G}$ jika dan hanya jika dua titik tersebut tidak bertetangga di G. Suatu graf G memenuhi $\bar{\bar{G}} = G$. Contoh suatu graf dan komplemennya diberikan oleh Gambar 2.1.9 berikut



Gambar 2.1.9. Graf dan Komplemennya.

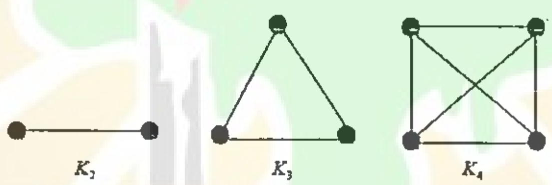
Misalkan $H \subseteq G$. Subgraf H disebut suatu komponen dari G jika H merupakan subgraf terhubung maksimal. Notasi *c(G)* melambangkan banyaknya titik pada komponen terbesar dalam graf G. Notasi *g(G)* melambangkan panjang siklus terkecil yang termuat dalam G. Untuk suatu titik $v \in V(G)$, lingkungan $N(v)$ adalah himpunan dari titik yang menjadi tetangga v di G. Selain itu juga didefinisikan $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. *Derajat* dari titik v dalam graf G adalah banyaknya titik pada $N_G(v)$, dinotasikan dengan $|N_G(v)|$ atau $d_G(v)$. *Derajat minimum* dari G adalah derajat terkecil dari titik-titik dalam G, dinotasikan dengan $\delta(G)$. Derajat maksimum dari G adalah derajat terbesar dari titik-titik dalam G, dinotasikan dengan Δ(G). Graf dengan n titik dikatakan *pancyclic* jika memuat siklus dengan panjang l, $3 \leq l \leq n$. Graf dikatakan *weakly pancyclic* jika memuat siklus dengan panjang sebesar *girth* (panjang siklus terpendek) hingga ke *circumference* (panjang siklus terpanjang).

2.2 Jenis-Jenis Graf

Berikut adalah beberapa jenis graf yang digunakan dalam kajian ini.

2.2.1 Graf Lengkap

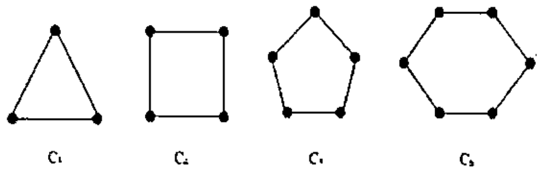
Graf lengkap (*complete graph*) adalah graf sederhana yang setiap titiknya bertetangga ke semua titik lainnya. Graf lengkap dengan n titik dilambangkan dengan K_n. Setiap titik pada K_n berderajat $n-1$. Banyaknya sisi pada graf lengkap dengan n titik adalah $(n(n-1))/2$. Pada Gambar 2.2.10 diberikan beberapa contoh dari graf lengkap.



Gambar 2.2.10. Graf Lengkap K_n dengan $2 \leq n \leq 4$.

2.2.2 Graf Siklus

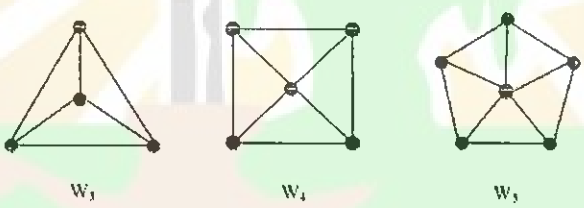
Graf siklus (*cycle*) adalah graf terhubung yang setiap titiknya berderajat dua. Graf siklus dengan n titik dilambangkan dengan C_n, $n \geq 3$. Gambar 2.2.11 merupakan gambar graf siklus C_n, dengan $3 \leq n \leq 6$.



Gambar 2.2.11. Graf Siklus C_n dengan $3 \leq n \leq 6$.

2.2.3 Graf Roda

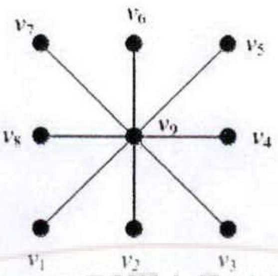
Graf roda (wheel) W_m adalah suatu graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu titik, dinamakan x_0, di luar C_n yang bertetangga ke semua titik di C_n. Graf roda dengan $m+1$ titik dilambangkan dengan simbol W_m, $m \geq 3$.



Gambar 2.2.12. Graf Roda W_m dengan $3 \leq m \leq 5$.

2.2.4 Graf Bintang

Graf bintang S_n adalah graf pohon berorde n yang memiliki satu titik berderajat $n-1$ yang disebut pusat dan $n-1$ titik berderajat satu. Pada Gambar 2.2.13 titik v_9 merupakan pusat dari graf bintang S_9.



Gambar 2.2.13. Graf Bintang S_9.

2.3 Bilangan Ramsey

2.3.1 Bilangan Ramsey Klasik

Pada tahun 1935, Erdos dan Szekeres mengkaji teori Ramsey dan kemudian mengaplikasikannya ke dalam teori graf. Kajian mereka itu menghasilkan teorema Ramsey klasik.

Adapun definisi dari bilangan Ramsey klasik diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.1.1 *Misalkan* $a, b \geq 2$ *adalah bilangan asli. Bilangan Ramsey* $R(a, b)$ *adalah bilangan asli terkecil* n *sedemikian sehingga jika graf lengkap* K_n *diwarnai dengan warna merah atau biru, maka senantiasa terdapat subgraf* K_a *merah atau* K_b *biru.*

Karena setiap graf F memenuhi $\bar{\bar{F}} = F$, maka bilangan Ramsey klasik bersifat simetris yaitu :

$$R(a, b) = R(b, a)$$

Selanjutnya, nilai eksak bilangan Ramsey klasik akan ditinjau. Dalam hal

$a = 1$ atau $a = 2$ jelas bahwa :

$$R(1, b) = 1 \text{ dan } R(2, b) = b$$

Erdos dan Szekeres telah memberikan eksistensi dari bilangan Ramsey klasik R(a,b) dengan menunjukkan batas atasnya sebagaimana teorema berikut.

Teorema 2.3.1.2[5] *Untuk setiap bilangan bulat positif a dan b, bilangan Ramsey R(a,b) senantiasa ada dan memenuhi*

$$R(a, b) \leq \begin{pmatrix} a+b-2 \\ a-1 \end{pmatrix}$$

Akibat 2.3.1.3[5] *Untuk setiap* $a \geq 2$ *dan* $b \geq 2$

$$R(a, b) \leq R(a-1, b) + R(a, b-1)$$

Selanjutnya, jika $R(a-1, b)$ dan $R(a, b-1)$ keduanya genap, maka

$$R(a, b) < R(a-1, b) + R(a, b-1).$$

Hingga saat ini, baru sembilan buah nilai eksak bilangan Ramsey klasik yang diketahui. Greenwood dan Gleason (1955) menunjukkan $R(3,3) = 6$, $R(3,4) = 9$, $R(3,5) = 14$, $R(4,4) = 18$. Selanjutnya Kery (1964) membuktikan $R(3,6) = 18$ dan diikuti oleh Kalbfleisch (1966) yang memberikan $R(3,7) = 23$. Dua bilangan Ramsey lain diberikan oleh Grienstead dan Roberts(1982), yaitu $R(3,8) = 28$ dan $R(3,9) = 36$. Hasil terbaru dalam hal ini diberikan oleh McKay dan Radziszowski (1995) yang menunjukkan bahwa $R(4,5) = 25$.

Untuk nilai $m, n \geq 3$ lainnya, penentuan nilai eksak bilangan Ramsey klasik merupakan persoalan yang sulit. Akan tetapi, batas atas dan batas bawah nontrivial dari bilangan tersebut telah diperoleh, seperti pada tabel berikut :

n\m	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	**6**	**9**	**14**	**18**	**23**	**28**	**36**	40 43	46 51	52 59	59 69
4		**18**	**25**	35 41	49 61	56 84	73 115	92 149	97 191	128 238	133 291
5			43 49	58 87	80 143	101 216	125 316	143 442	159 633	185 848	209 1139
6				102 165	113 298	130 495	169 780	179 1171	253 1804	262 2566	317 3705
7					205 540	216 1031	237 1713	289 2826	405 4553	416 6954	511 10581
8						282 1870	317 3583	6090	10630	16944	817 27490
9							565 6588	580 12677	22325	39025	64871
10								798 23556			

Tabel 2.3.1. [5] Bilangan Ramsey Klasik

Uraian di atas memberikan gambaran bahwa penentuan bilangan Ramsey klasik merupakan kajian yang sulit. Karena itu pada perkembangan selanjutnya, grafnya terbatas pada graf lengkap saja, tetapi berlaku untuk sembarang graf. Bilangan Ramsey untuk pasangan sebarang graf selanjutnya disebut bilangan Ramsey graf.

2.3.2 Bilangan Ramsey Graf

Bilangan Ramsey $R(G, H)$ untuk suatu graf G dan H adalah suatu bilangan bulat terkecil n sedemikian sehingga untuk sebarang graf F dengan n titik berlaku bahwa F memuat G atau $\bar{F}$ memuat H. Sebelum menentukan nilai eksak bilangan Ramsey, terlebih dahulu diberikan definisi *graf elok*.

Definisi 2.3.2.4 *Diberikan dua graf G dan H. Graf F disebut graf (G, H)-elok jika F tidak memuat G dan $\bar{F}$ tidak memuat H. Sebarang graf (G, H)-elok dengan n titik dinotasikan dengan graf (G, H, n)-elok.*

Batas bawah bilangan Ramsey $R(G, H)$ diberikan oleh Chvatal dan Harary, seperti dalam teorema berikut.

Teorema 2.3.2.5[5] (***Batas Bawah***) *Untuk setiap graf G dan H berlaku*

$$R(G, H) \geq (c(G) - 1)(\chi(H) - 1) + 1).$$

Bukti. Misalkan Graf $F = (\chi(H) - 1)K_{(c(G)-1)}$. Dalan hal ini F tidak memuat G sebagai subgraf karena komponen dari F berorder $c(G) - 1$.

Karena $\chi(\bar{F}) < \chi(H) - 1$ maka $\bar{F}$ tidak memuat H, sehingga diperoleh $R(G, H) \geq (c(G) - 1)(\chi(H) - 1) + 1)$.

Contoh 1: Misal graf $G = P_4$ dan $H = W_5$ akan ditentukan $R(P_4, W_5)$.

Bukti. Ambil graf $F = (\chi(W_5) - 1)K_{(c(P_4)-1)}$. Karena $\chi(W_5) = 4$ dan $c(P_4) = 4$, maka $F = 3K_3$. Dalam hal ini F tidak memuat P_4 sebagai subgraf karena komponen dari F punya orde $c(G) - 1 = 3$. Karena $\chi(\bar{F}) < \chi(H) - 1 = 2 < 3$, maka $\bar{F}$ tidak memuat W_5. Dengan demikian haruslah $R(P_4, W_5) \geq 10$

Bilangan kromatik dari H, dinotasikan dengan $\chi(H)$ adalah bilangan asli terkecil k sedemikian sehingga jika titik-titik di H diwarnai dengan k warna, maka tidak ada titik yang bertetangga mempunyai warna yang sama. Berikut diberikan contoh bilangan kromatik graf roda W_m.

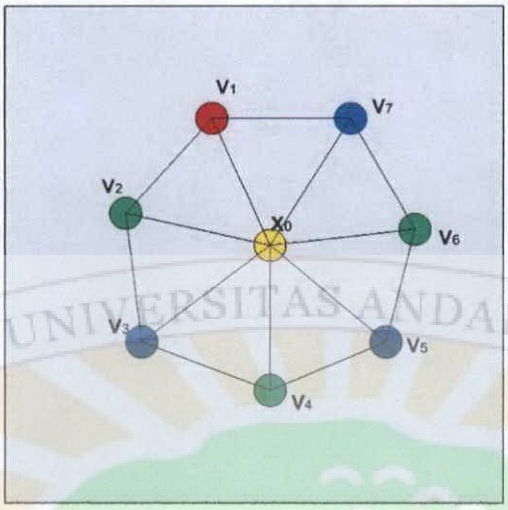
Contoh 1 :

$$\chi(W_7) = 4$$

Misalkan Graf W_7 adalah graf $[x_0, C_7]$ dengan 8 titik, dimana satu titik dinotasikan x_0 merupakan pusat (hub) yang bertetangga dengan semua titik di C_7. Dinotasikan $V(W_7) = \{x_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$. Akan ditentukan bilangan kromatik $\chi(W_m)$ untuk $m = 7$. Akan dilakukan pewarnaan titik yaitu memberikan warna pada setiap titik di graf W_7. Sedemikian sehingga setiap dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda.

Andaikan titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 dan v_7 dan tidak bertetangga dengan titik v_3,v_4,v_5 dan v_6. Titik v_1 tidak boleh berwarna sama dengan titik v_2 dan v_7, tetapi titik v_1 boleh berwarna sama dengan titik v_3. Sedangkan titik v_4 tidak boleh berwarna sama dengan titik v_3 dan v_5. Titik v_3 dan v_5 boleh berwarna sama dengan titik v_7, karena ketiga titik tersebut tidak saling bertetangga. Sedangkan titik v_6 dan v_7 tidak boleh berwarna sama karena kedua titik saling bertetangga. Begitupun dengan titik v_7 dan v_1 tidak boleh berwarna yang sama karena kedua titik juga saling bertetangga.

Dalam pewarnaan titik, warna titik yang bertetangga haruslah berbeda. Selain itu, warna yang digunakan haruslah seminimum mungkin. Pada pewarnaan titik pada W_7 ini, diperoleh $\chi(W_7) = 4$. Dengan ilustrasi gambar dapat dilihat pada gambar berikut :



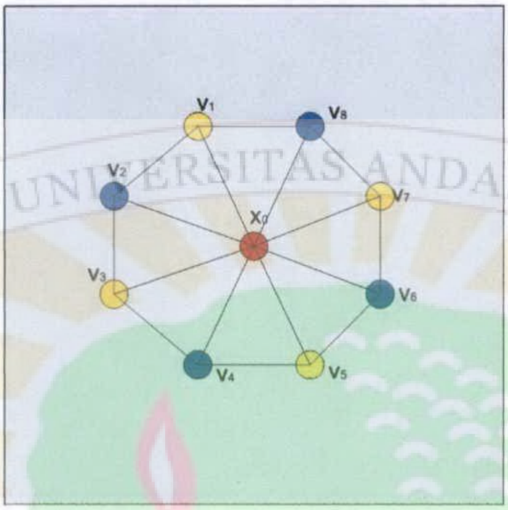
Contoh 2 :

$$\chi(W_8) = 3$$

Misalkan graf W_8 adalah graf $[x_0, C_8]$ dengan 9 titik, dimana satu titik dinotasikan x_0 merupakan pusat (hub) yang bertetangga dengan semua titik di C_8. Dinotasikan $V(W_6)$=$\{x_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$. Akan ditentukan bilangan kromatik $\chi(W_m)$ untuk $m = 8$. Akan dilakukan pewarnaan titik yaitu memberikan warna pada setiap titik di graf W_8, sedemikian sehingga setiap dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda.

Andaikan titik v_1 bertetangga dengan v_2 dan v_8 dan tidak bertetangga dengan v_3,v_4,v_5,v_6,v_7. Titik v_1 tidak boleh berwarna sama dengan titik v_2 dan v_8, tetapi titik v_1 boleh berwarna sama dengan titik v_3,v_5 dan v_7, karena titik v_1 tidak bertetangga dengan titik v_3,v_5 dan v_7. Sedangkan titik v_2 boleh berwarna sama dengan titik v_4,v_6 dan v_8, karena titik v_2 tidak bertetangga dengan titik v_4,v_6 dan v_8.

Pada pewarnaan titik pada W_8 ini, diperoleh $\chi(W_8) = 3$. Dengan ilustrasi gambar sebagai berikut :



Sehingga diperoleh,

$$\chi(W_m) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } m \text{ genap} \\ 4, & \text{untuk } m \text{ ganjil} \end{cases}$$

Sejak adanya batas bawah ini, kajian bilangan Ramsey berkembang pesat. Salah satu topik yang paling banyak dikaji adalah bilangan Ramsey untuk graf pohon. Hal ini disebabkan oleh struktur pohon yang berbeda-beda. Struktur pohon yang paling sederhana adalah lintasan dan bintang. Karena itu, pengkajian bilangan Ramsey untuk graf pohon umumnya dimulai dengan pengkajian bilangan Ramsey untuk lintasan atau bintang. Pada tahun 2001, Surahmat dan Edy Tri Baskoro [5] telah membuktikan bahwa

$$R(S_n, W_4) = \begin{cases} 2n-1, & \text{n ganjil dan } n \geq 3 \\ 2n+1, & n \geq 4. \end{cases}$$

Mereka juga membuktikan $R(S_n, W_5) = 3n - 2$ untuk $n \geq 3$. Selain itu, mereka juga memperoleh $R(S_n, W_m) = 3n - 2$ untuk m ganjil, $m \geq 5$ dan $n \geq$

$2m-4$. Hasil ini juga diperkuat oleh Chen dkk. yang membuktikan $R(S_n, W_m) = 3n-2$ untuk m ganjil , $m \geq 5$ dan $n \geq m-1 \geq 2$. Zhang dkk. menunjukkan $R(S_n, W_6) = 2n+1$ untuk $n \geq 3$ dan $R(S_n, W_8) = 2n+1$ untuk n ganjil, $5 \leq n \leq 10$ dan $R(S_n, W_8) = 2n+2$ untuk n genap. Korolova menunjukkan bahwa untuk m ganjil, $R(S_n, W_m) = 3n-2$ jika $n = m$, $m+1$ atau $m+2$. Selain itu Hasmawati juga membuktikan $R(S_n, W_m) = m+n-2$ untuk n ganjil, $m \geq 2n-2$ dan $n \geq 4$.

2.3.3 Lema Pendukung

Berikut adalah lema yang mendukung untuk menyelesaikan permasalahan pada skripsi ini seperti yang dikutip oleh Hasmawati dkk[4],

Lema 2.3.1.(*Bondy*).*Misal G adalah graf dengan orde n.Jika $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, maka G adalah pansiklis atau $G = K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ untuk n genap.*

BAB III

BILANGAN RAMSEY UNTUK GRAF BINTANG S_n DAN GRAF RODA W_m

Pada bab ini akan ditentukan bilangan Ramsey $R(S_n, W_m)$ untuk pasangan bintang S_n dan roda W_m untuk m ganjil, $n \geq 3$ dan $m \leq 2n-1$, serta untuk n ganjil, $n \geq 5$ dan $m = 2n-4$.

Karena $c(T_n) = n$ dan $\chi(W_m) = 3$ untuk m genap atau $\chi(W_m) = 4$ untuk m ganjil, maka menurut Teorema 2.3.1.5 diperoleh batas bawah untuk $R(T_n, W_m)$ yaitu :

$$R(T_n, W_m) \geq \begin{cases} 2n-1, & \text{untuk } m \text{ genap} \\ 3n-2, & \text{untuk } m \text{ ganjil} \end{cases} \tag{3.0.1}$$

Karena S_n dengan n titik adalah salah satu dari bentuk pohon T_n dengan n titik, maka pertaksamaan (3.0.1) dapat digunakan untuk memperoleh batas bawah $R(S_n, W_m)$, yaitu

$$R(S_n, W_m) \geq \begin{cases} 2n-1, & \text{untuk } m \text{ genap} \\ 3n-2, & \text{untuk } m \text{ ganjil} \end{cases} \tag{3.0.2}$$

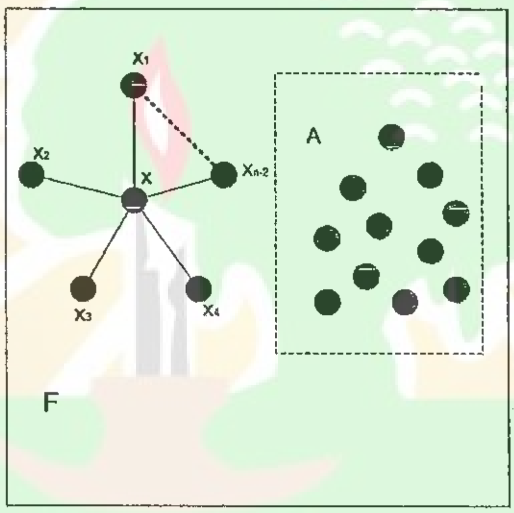
Berikut adalah hasil utama dari kajian ini.

Teorema 3.1 *Diberikan bintang S_n dan roda W_m. Maka $R(S_n, W_m) = 3n-2$ untuk m ganjil, $n \geq 3$ dan $m \leq 2n-1$.*

Bukti. Karena $3K_{n-1}$ tidak memuat S_n dan komplemen dari $3K_{n-1}$ tidak memuat

W_m untuk m ganjil maka $R(S_n, W_m) \geq 3n-2$ untuk m ganjil. Selanjutnya, untuk memperoleh nilai eksak $R(S_n, W_m)$, akan ditunjukkan bahwa $R(S_n, W_m) \leq 3n-2$. Misalkan F adalah sebarang graf berorde $3n-2$ yang tidak memuat S_n. Akan ditunjukkan $\bar{F}$ memuat W_m.

Misalkan x adalah sebarang titik di F. Karena $F \not\supseteq S_n$, maka $d_F(x) \leq n-2$ untuk setiap $x \in F$. Misalkan $A = V(F) \setminus N[x]$ dan $T = F[A]$, seperti pada Gambar 3.0.1.



Gambar 3.0.1. Graf dengan orde $3n-2$ yang tidak memuat S_n

Maka haruslah $|T| \geq (3n-2) - (n-1) = 2n-1$. Karena $d_T(v) \leq n-2$ untuk setiap $v \in T$ dan $|\bar{T}| = |T|$, maka

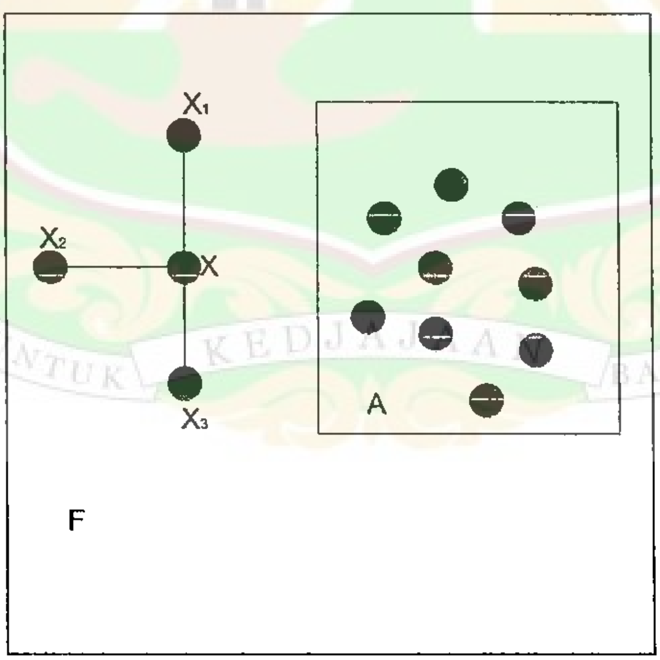
$$\begin{aligned} d_{\bar{T}}(v) &\geq |T| - (n-1) \\ &= 2n-1-(n-1) \\ &= n \\ &> n - \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Karena $|\bar{T}| \geq 2n-1 = 2(n-\frac{1}{2})$ maka $d_{\bar{T}}\ (v) \geq \frac{|\bar{T}|}{2}$. Karena $d_{\bar{T}}\ (v) \geq \frac{|\bar{T}|}{2}$ maka menurut Lema 2.3.1, $\bar{T}$ adalah graf pancyclic artinya $\bar{T}$ memuat siklus C_m, dengan $3 \leq m \leq 2n-1 \leq |\bar{T}|$. Dengan x sebagai pusat, diperoleh graf roda W_m di $\bar{F}$. Sehingga $R(S_n, W_m) \leq 3n-2$ untuk $3 \leq m \leq 2n-1$. Jadi, $R(S_n, W_m) = 3n-2$ untuk $3 \leq m \leq 2n-1$

Contoh 1 :

Berikut adalah contoh dari Teorema 3.1 diatas.

Untuk $n = 5$ dan $m = 9$ akan ditunjukkan $R(S_5, W_9) = 13$, dengan menunjukkan bahwa batas bawah dan batas atasnya sama. Karena $3K_4$ tidak memuat S_5 dan komplemen dari $3K_4$ tidak memuat W_9 untuk m ganjil maka $R(S_5, W_9) \geq 13$. Berikutnya, akan ditunjukkan bahwa $R(S_5, W_9) \leq 13$. Ambil graf F dengan 13 titik dan F tidak memuat S_5. Ilustrasi diberikan pada Gambar 3.0.2.



Gambar 3.0.2. Graf F yang tidak memuat S_5

Karena $F \not\supseteq S_5$ maka $d_F(x) \leq 3 = 5 - 2$. Misalkan $A = V(F) - N[x]$ dan $T = F[A]$ maka diperoleh $|\bar{T}| \geq 2.5 - 1 = 9$. $\forall v \in T$, $d_T(v) \leq 3 = 5 - 2$ sehingga

$$d_{\bar{T}}(v) \geq |T| - (n-1)$$

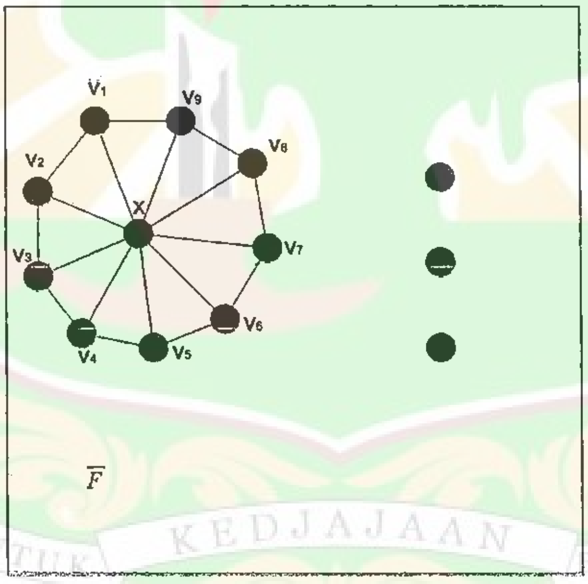
$$= 9 - 4 = 5$$

$$d_{\bar{T}}(v) \geq \frac{|\bar{T}|}{2}$$

Menurut Lema 2.3.1 $\bar{T}$ memuat siklus C_9, untuk $3 \leq m \leq 9 \leq |\bar{T}|$

Karena $\bar{T} \subseteq \bar{F}$ maka $W_9 \subseteq \bar{T} \subseteq \bar{F}$, sehingga $R(S_5, W_9) \leq 3.5 - 2 = 13$

Ilustrasi diberikan pada gambar 3.0.3.



Gambar 3.0.3. Ilustrasi $\bar{F}$ yang memuat W_9

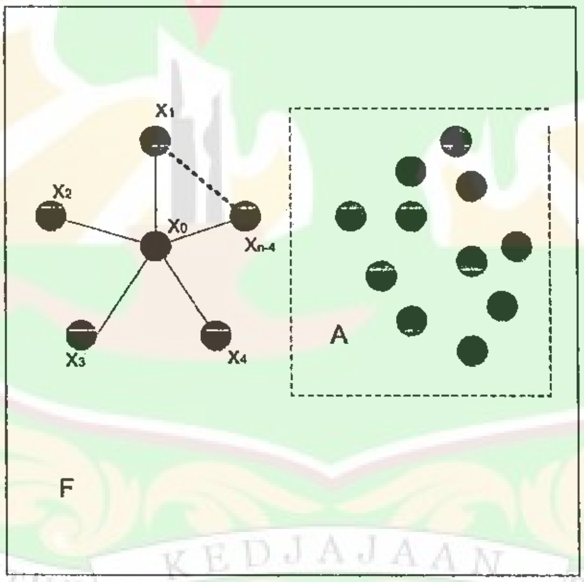
Teorema 3.2 *Diberikan bintang S_n dan roda W_m. Maka $R(S_n, W_m) = 3n - 4$ untuk n ganjil dan $n \geq 5$, dan $m = 2n - 4$.*

Bukti : Sebagai langkah pertama akan ditunjukkan bahwa batas bawah untuk

$R(S_n, W_m) \geq 3n-4$. Karena $K_{n-1} \cup K_{n-2,n-2}$ tidak memuat S_n dan komplemennya tidak memuat W_m, untuk $m = 2n-4$ maka $R(S_n, W_m) \geq 3n-4$.

Berikutnya, akan ditunjukkan bahwa $R(S_n, W_m) \leq 3n-4$. Misalkan F adalah sebarang graf berorde $3n-4$ dan asumsikan F tidak memuat S_n. Akan ditunjukkan $\bar{F}$ memuat W_m. Karena F tidak memuat S_n, maka $d_F(v) \leq n-2$ untuk setiap $v \in F$. Karena n ganjil maka $|F| = 3n-4$ juga ganjil. Dengan demikian, tidak semua titik di F berderajat $n-2$ (ganjil).

Misalkan terdapat $x_0 \in F$ dengan $d_F(x_0) \leq n-3$. Tulis $A = V(F) \setminus N[x_0]$, dan $T = F[A]$, seperti pada Gambar 3.0.4.



Gambar 3.0.4. Graf dengan orde $3n-4$ yang tidak memuat S_n

Maka haruslah $|T| \geq (3n-4)-(n-2) = 2n-2$. Karena $d_T(v) \leq n-2$ untuk setiap $v \in T$ dan $|\bar{T}| = |T|$, maka

$$\begin{aligned} d_{\bar{T}}(v) &\geq |T| - (n-1) \\ &= 2n-2-(n-1) \end{aligned}$$

$$= n - 1$$

$$> n - 2$$

Karena $|\bar{T}| \geq 2n - 2 \geq 2(n-1) \geq 2(n-2)$ maka $d_{\bar{T}}\ (v) \geq \frac{|\bar{T}|}{2}$.

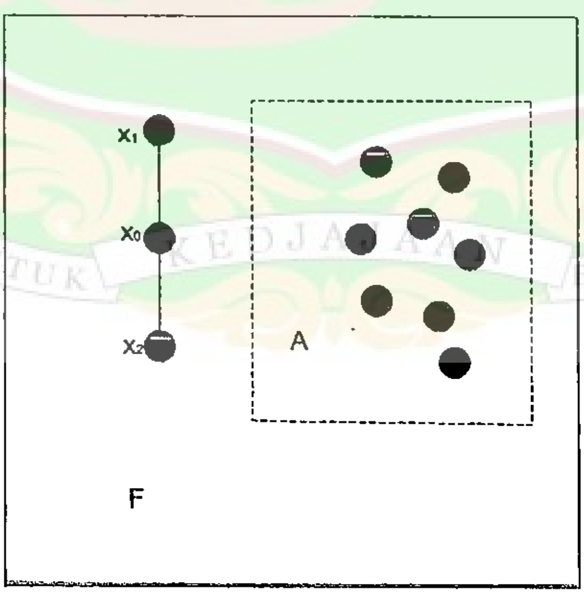
Menurut Lema 2.3.1 maka diperoleh $\bar{T}$ memuat siklus C_{2n-4}. Dengan demikian, $\bar{F}$ memuat suatu roda W_{2n-4} dengan pusat x_0. Jadi, $R(S_n, W_m) \leq 3n - 4$ untuk $m = 2n - 4$.

Contoh 2 :

Berikut adalah contoh dari Teorema 3.2 diatas.

Untuk $n = 5$ maka $m = 6$ akan ditunjukkan $R(S_5, W_6) = 11$, dengan menunjukkan batas bawah dan batas atasnya sama. Karena $K_4 \cup K_{3,3}$ tidak memuat S_5 dan komplemennya tidak memuat W_6, untuk $m = 6$ maka $R(S_5, W_6) \geq 11$.

Berikutnya, akan ditunjukkan bahwa $R(S_5, W_6) \leq 11$ dan F tidak memuat S_5. Ilustrasi diberikan pada Gambar 3.0.5.



Gambar 3.0.5. Graf F yang tidak memuat S_5

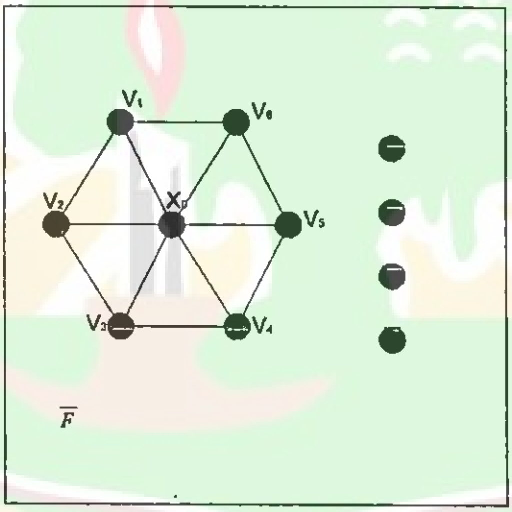
Karena n ganjil maka $|F| = 3n - 4$ juga ganjil. Dengan demikian, tidak semua titik di F berderajat $n-2$ (ganjil) sehingga $d_F(x_0) \leq n-3 = 5-3 = 2$.

Misalkan $A = V(F) - N[x]$ dan $T = F[A]$ maka diperoleh $|\bar{T}| \geq 2.n - 2 = 2(5) - 2 = 8$

$\forall v \in T$, $d_T(v) \leq 3$ maka $d_{\bar{T}}(v) \geq |T| - (n-1) = 8 - 4 = 4$. Sehingga $d_{\bar{T}}(v) \geq \frac{|\bar{T}|}{2}$.

Menurut Lema 2.3.1 $\bar{T}$ memuat siklus C_6. Dengan demikian, $\bar{F}$ memuat suatu W_6 dengan pusat x_0. Jadi $R(S_5, W_6) \leq 3(5) - 2 = 11$

Ilustrasi diberikan pada gambar 3.0.6.



Gambar 3.0.6. Ilustrasi $\bar{F}$ yang memuat W_6

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Diberikan graf bintang S_n dengan n titik dan graf roda W_m dengan $m+1$ titik maka bilangan Ramsey untuk pasangan bintang dan roda adalah

1. $R(S_n, W_m) = 3n-2$ untuk m ganjil, $n \geq 3$ dan $m \leq 2n-1$
2. $R(S_n, W_m) = 3n-4$ untuk n ganjil, $n \geq 5$ dan $m = 2n-4$.

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya penulis menyarankan untuk membahas bilangan Ramsey untuk pasangan bintang dan roda yang belum dikaji.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Chartrand, G. and Ping Zhang. 2005. **Introduction to Graph Theory**. McGraw-Hill Press, Singapore.

[2] Chvatal, V. and F. Harary. 1972. Generalized Ramsey Theory for Graph, III. Small off-Diagonal Numbers. *Pacific. J.Math*, **41** : 335-345

[3] Hasmawati. 2007. **Bilangan Ramsey untuk graf Bintang**. ITB Bandung. Disertasi-S3. Tidak diterbitkan.

[4] Hasmawati, E.T Baskoro, dan Hilda Assiyatun. 2005. Star - Wheel Ramsey Numbers. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*. **55** : 123-128.

[5] Radziszowski, S. P. Small Ramsey Numbers. *The Electronic Journal of Combinatorics*, August (2011) DS1.

[6] Surahmat and E.T. Baskoro. 2001. On The Ramsey Number of a Path or a Star versus or W_4 or W_5, *Proceedings of the 12-th Australasian Workshop on Combinatorial Algorithms*, Bandung, Indonesia, July 14-17(2001) 165-170.

[7] Surahmat. 2003. **Bilangan Ramsey untuk graf Roda**. ITB Bandung. Disertasi-S3. Tidak diterbitkan.