PENYELESAIN MASALAH PROGRAM LINIER DENGAN METODE GENERASI KOLOM

TESIS

RINALDI
06215134

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2008

PENYELESAIAN MASALAH PROGRAM LINIER DENGAN METODE GENERASI KOLOM

Oleh: RINALDI

(Di bawah bimbingan Dr. Susila Bahri, M.Sc dan Haripamyu, M.Si)

RINGKASAN

Dalam masalah Program Linier (PL) untuk memaksimisasi dan meminimisasi suatu fungsi seringkali berhadapan dengan suatu syarat-syarat atau batasan-batasan tertentu. Kasus optimisasi bersyarat seperti ini banyak dijumpai dalam berbagai kegiatan sehari-hari. Misalnya suatu perusahaan kayu umumnya menghasilkan kayu dengan panjang standar 17 *ft*. Pesanan khusus dengan panjang yang berbeda-beda dipenuhi dengan memotong panjang standar. Pada realisasisnya untuk memenuhi suatu pesanan dilakukan penyetelan terhadap pisau pemotong sesuai dengan panjang yang diminta. Biasanya, untuk memenuhi pesanan para pelanggan terdapat beberapa cara atau pola pemotongan yang mungkin dilakukan. Tujuan akhir dari perusahan kayu ini tentu ingin meminimalkan sisa potongan dan memaksimalkan hasil pemotongan, sehingga dari bahan baku yang ada diperolehlah keuntungan yang sebesar-besarnya.

Untuk menentukan solusi optimal persoalan tersebut, langkah pertama adalah menentukan semua pola yang mungkin dan kemudian menentukan semua kombinasi yang layak. Meskipun menentukan semua pola yang mungkin dilakukan tidak begitu sulit, namun menentukan semua kombinasi yang layak merupakan suatu perkerjaan

yang berat. Disinilah model Program Linear dengan Metode Generasi Kolom memainkan peranan dan teknik pendekatan yang sistimatis.

Penelitian ini bertujuan untuk menunjukan proses penentuan solusi masalah minimisasi dalam pemrograman linier dengan Metode Generasi Kolom.

Penelitian ini dilaksanakan mulai bulan September sampai dengan November 2008, di Payakumbuh dan Padang

Adapun Langkah-langkah penelitian Tesis ini adalah :

1. Langkah awal adalah merumuskan secara matematis permasalahan kedalam bentuk Program Linier, dengan menentukan fungsi tujuan dan pertidaksamaan kendala.
2. Menentukan variabel dasar sebagai basis.
3. Menggunakan Teknik Generasi Kolom dalam menentukan masalah Knapsack.
4. Menentukan penyelesaian masalah Knapsack dengan Metode Branch and bound.

Dari hasil penelitian ini dapat disimpulkan bahwa :

Pada persoalan pemotongan stok, tidak perlu mencari semua pola pemotongan yang mungkin, cukup menentukan sebuah pola awal yang merupakan pola pemotongan murni. Pola pemotongan yang lebih baik diawali dengan menyatakan model matematisnya kedalam bentuk pemrograman linier. Setelah itu dilanjutkan dengan mengunakan teknik Generasi Kolom

Metode yang cukup praktis untuk menyelesaikan persoalan knapsack ini adalah metoda *Branch and Bound*. Bila jumlah pesanan semakin banyak (dalam model matematis = jumlah baris semakin banyak) maka semakin banyak pula variabel yang terlibat dalam subpersoalan knapsack.

PENYELESAIAN MASALAH PROGRAM LINIER DENGAN METODE GENERASI KOLOM

Oleh:

RINALDI

06215134

T e s i s

Sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Magister Sains
pada Program Pascasarjana Universitas Andalas

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
2008

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 08 November 1975 di Payakumbuh, sebagai anak keempat dari Ayah Munzir dan Ibu Ramayulis.

Penulis menamatkan SD pada tahun 1988, SMP pada tahun 1991 di Simalanggang Kabupaten 50 Kota, dan STM pada tahun 1994 di Kota Payakumbuh. Penulis memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Teknik Elektro IKIP Padang pada tahun 1998.

Sejak tahun 1998-2002 penulis bekerja di Departemen Training PT.Tripatra Engineering Caltex Pacific Indonesia Riau. Pada Tahun 2002-sekarang bertugas sebagai guru bidang studi Matematika di SD Islam Yayasan Pendidikan Islam Raudhatul Jannah Kota Payakumbuh. Pada tahun 2006 memperoleh kesempatan melanjutkan pendidikan di jurusan Matematika FMIPA Program Pascasarjana Universitas Andalas di Padang.

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Dengan ini saya menyatakan bahwa tesis yang saya tulis dengan judul "PENYELESAIAN MASALAH PROGRAM LINIER DENGAN METODE GENERASI KOLOM" adalah hasil karya saya sendiri dan bukan ciplakan karya orang lain, kecuali kutipanya yang sumbernya dicantumkan.

Jika dikemudian hari pernyataan yang saya buat ini ternyata tidak benar, maka status kelulusan dan gelar yang saya peroleh batal dengan sendirinya.

Padang 24 Nopember 2008

Yang membuat Pernyataan,

RINALDI
BP.06215134

KATA PENGANTAR

Penulis mengucapkan puji dan syukur kehadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan hidayahNYA sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini. Tesis ini ditulis berdasarkan hasil penelitian yang berjudul "Penyelesaian Masalah Program Linier dengan Metode Generasi Kolom".

Dalam menyelesaikan tesis ini penulis mendapat bantuan dari banyak pihak. Pada kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. Ir. H. Novirman Jamarun,M.Sc, Direktur Program Pascasarjana sebagai Ketua Pelaksana Program Pascasarjana.
2. Bapak Jenizon, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika dan Bapak Zulakmal, M.Si sebagai Koordinator Program Magister Jurusan Matematika yang telah memberikan fasilitas baik sarana maupun prasarana dalam penyelesaian penulisan tesis ini.
3. Ibu Dr. Susila Bahri, M.Sc dan Ibu Haripamyu, M.Si sebagai Komisi Pembimbing yang telah memberikan pengarahan dalam penulisan tesis ini.
4. Bapak Dr. I Made Arnawa, M.Si, Ibu Nova Noliza Bakar, M.Si dan Bapak Jenizon, M.Si sebagai tim penguji tesis ini.
5. Seluruh Staf Pengajar Program Pascasarjana Matematika Universitas Andalas Padang yang telah memberi bekal ilmu pengetahuan kepada penulis.
6. Kepala SD Islam Raudhatul Jannah Kota Payakumbuh, seluruh guru dan staf yang telah memberikan motivasi dalam menyelesaikan tesis ini.

7. Teman-teman seperjuangan dan semua pihak yang telah memberikan semangat dan dukungan kepada penulis yang tidak mungkin disebutkan satu persatu dalam penulisan ini.
8. Ibunda, Istri,anak-anakku serta seluruh keluarga yang selalu mendo'akan dan selalu setia memotivasi.

Penulis menyadari bahwa tesis ini sangat jauh dari sempurna. Oleh karena itu penulis sangat terbuka dalam menerima kritikan dan saran dari pembaca untuk kesempurnaan tesis ini. Mudah-mudahan tesis ini memberikan sumbangan pada ilmu pengetahuan.

Akhirnya penulis berharap semoga hasil penelitian ini akan bermanfaat dalam pengembangan ilmu dalam bidang matematika.

Padang, November 2008

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR		ix
DAFTAR ISI		xi
DAFTAR SIMBOL		xiii
DAFTAR GAMBAR		xiv
DAFTAR TABEL		xv
BAB I	PENDAHULUAN	1
	1.1 Latar Belakang	1
	1.2 Rumusan Masalah	2
	1.3 Tujuan Penelitian	2
	1.4 Manfaat Penelitian	2
BAB II	TINJAUAN PUSTAKA	3
	2.1 Istilah-istilah Dalam Pemrograman Linier	3
	2.2 Bentuk Umum Masalah Pemrograman Linier	5
	2.3 Solusi Masalah Pemrograman Linier	6
	2.4 Uji rasio	7
	2.5 Matriks dan Invers Matriks	7
	2.6 Pemrograman Bilangan Bulat dan Metode Knapsach	9
	2.7 Metode Branch and Bound	10
BAB III	METODOLOGI PENELITIAN	12
	3.1 Waktu dan Tempat Penelitian	12
	3.2 Metode Penelitian	12
BAB IV	PEMBAHASAN	13
	4.1 Menyatakan masalah PL secara matematika	13
	4.2 Menentukan variabel dasar sebagai basis	15
	4.3 Menggunakan Generasi Kolom dalam Menentukan Masalah Knapsack	17

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN.. 28
5.1 Kesimpulan 28
DAFTAR PUSTAKA.. 29

DAFTAR SIMBOL

x_i	= Variabel keputusan ke i
$\mathbf{B_0}$	= Variabel dasar sebagai basis awal
$\mathbf{B_0}^{-1}$	= Invers dari variable dasar awal
$\mathbf{C_{BV}}$	= Koefisien variabel dasar Vektor baris 1 x m yang elemen ke j nya adalah koefisien fungsi objektif untuk BV_j
$\boldsymbol{a}_j$	= Kolom x_j pada batasan dari variable dasar awal
$\mathbf{c}_j$	= koefisien – kofesien x_j pada fungsi subjektif
$\mathbf{SP_2}$	= Sub Persoalan 2 adalah : Sub Persoalan 1 (SP_1) dengan kendala $xj \leq a$
$\mathbf{SP_3}$	= Sub Persoalan 3 adalah : Sub Persoalan 1 (SP_1) dengan kendala $xj \geq b$
b	= Vektor sisi kanan pada konstrain –konstrain tabel awal
$\mathbf{E_0}$	= Matriks identitas berukuran m x m dengan kolom ke r ditukar dengan vektor kolom
$\mathbf{C_{BV}B^{-1}}\ \boldsymbol{a}_j - \mathbf{c}_j$	= Koefisien x_j pada baris nol

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1, Pohon Branch and Bound

Untuk masalah pemrograman bilangan bulat (4.3.2)........... 20

Gambar 2, Pohon Branch and Bound

Untuk masalah pemrograman bilangan bulat (4.3.3)........... 23

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Kombinasi Pemotongan Papan Perusahaan Woodco 3

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam masalah Program Linier (PL) untuk memaksimisasi dan meminimisasi suatu fungsi seringkali berhadapan dengan suatu syarat-syarat atau batasan-batasan tertentu. Kasus optimisasi bersyarat seperti ini banyak dijumpai dalam berbagai kegiatan sehari-hari. Misalnya suatu perusahaan kayu umumnya menghasilkan kayu dengan panjang standar 17 *ft*. Pesanan khusus dengan panjang yang berbeda-beda dipenuhi dengan memotong panjang standar. Pada realisasisnya untuk memenuhi suatu pesanan dilakukan penyetelan terhadap pisau pemotong sesuai dengan panjang yang diminta. Biasanya, untuk memenuhi pesanan para pelanggan terdapat beberapa cara atau pola pemotongan yang mungkin dilakukan. Tujuan akhir dari perusahan kayu ini tentu ingin meminimalkan sisa potongan dan memaksimalkan hasil pemotongan, sehingga dari bahan baku yang ada diperolehlah keuntungan yang sebesar-besarnya.

Untuk menentukan solusi optimal persoalan tersebut, langkah pertama adalah menentukan semua pola yang mungkin dan kemudian menentukan semua kombinasi yang layak. Meskipun menentukan semua pola yang mungkin dilakukan tidak begitu sulit, namun menentukan semua kombinasi yang layak merupakan suatu perkerjaan yang berat. Disinilah model Program Linear dengan Metode Generasi Kolom memainkan peranan dan teknik pendekatan yang sistimatis.

1.2 Rumusan Masalah

Yang menjadi masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana cara menyelesaikan masalah pemrograman linier dengan menggunakan Metode Generasi Kolom.

Tulisan ini hanya akan membahas masalah pemrograman linier yang bertujuan untuk meminimumkan fungsi tujuan.

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menunjukan proses penentuan solusi masalah minimisasi dalam pemrograman linier dengan Metode Generasi Kolom.

1.4 Manfaat Penelitian

Penulisan ini diharapkan dapat memberikan sumbangan pengetahuan, baik kepada penulis sendiri maupun bagi pembaca dalam menyelesaikan masalah-masalah dalam kehidupan sehari-hari terutama yang berkaitan dengan masalah optimisasi. Penulisan ini juga diharapkan dapat memperluas penerapan matematika khususnya di bidang riset operasi (*Operation Research*) pada industri dan perusahaan.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Untuk memahami pembahasan pada Bab IV maka terlebih dahulu ditinjau teori-teori dasar yang berhubungan dengan program linier, seperti istilah-istilah dalam pemrograman linier, jenis solusinya serta metoda yang digunakan untuk mendapatkan solusi tersebut.

2.1 Istilah-istilah dalam Pemrograman Linier

Dalam menyelesaikan masalah pemrograman linier digunakan istilah-istilah dibawah ini yang dijelaskan melalui sebuah contoh masalah.

Perusahaan Woodco menjual papan ukuran 3 *ft*, 5 *ft* dan 9 *ft*. Pelanggan Woodco memesan 25 batang papan 3 *ft*, 20 batang papan 5 *ft* dan 15 batang papan 9 *ft*. Perusahaan Woodco tersebut harus memenuhi permintaan tersebut dengan cara memotong papan standar ukuran 17 *ft* dan juga ingin meminimumkan sisa/buangan dari hasil potongan papan tersebut, dengan demikian maka biaya produksi akan bisa diminimumkan. Banyak cara yang dilakukan Perusahaan Woodco untuk memotong sebuah papan secara optimal, seperti yang tercantum pada Tabel 2.1. (Kombinasi Pemotongan Papan Perusahaan Woodco

Kombinasi	Jumlah			Sisa (*ft*)
	3 *ft*	5 *ft*	9 *ft*	
1	5	0	0	2
2	4	1	0	0
3	2	2	0	1
4	2	0	1	2
5	1	1	1	0
6	0	3	0	2

(i) Variabel keputusan (*Decision Variables*)

Variabel Keputusan adalah variabel yang menguraikan secara lengkap keputusan yang akan dibuat (Winston, 2004).

Dari masalah Woodco dilakukan beberapa cara / kombinasi pemotongan papan (tabel 2.1), maka variabel keputusannya adalah :

x_1 = Jumlah pemotongan papan standar 17 *ft* menurut kombinasi ke 1

x_2 = Jumlah pemotongan papan standar 17 *ft* menurut kombinasi ke 2

x_3 = Jumlah pemotongan papan standar 17 *ft* menurut kombinasi ke 3

x_4 = Jumlah pemotongan papan standar 17 *ft* menurut kombinasi ke 4

x_5 = Jumlah pemotongan papan standar 17 *ft* menurut kombinasi ke 5

x_6 = Jumlah pemotongan papan standar 17 *ft* menurut kombinasi ke 6

(ii) Fungsi Tujuan (*Objective Function*)

Fungsi tujuan merupakan fungsi dari variabel keputusan yang akan dimaksimumkan atau diminimumkan (Winston, 2004).

Untuk masalah Woodco, maka fungsi tujuannya adalah :

Minimumkan $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$ (2.1.1)

(iii) Batasan / Kendala (*Constraints*)

Batasan merupakan pembatas yang membatasi nilai fungsi tujuan sehingga tidak dapat ditentukan nilai-nilai variabel keputusan secara sebarang. Setiap batasan merupakan persamaan linier atau ketaksamaan linier (Winston, 2004).

Untuk masalah Woodco, maka batasannya adalah :

$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \quad &\geq 25 \quad \text{(batasan 3 } ft\text{)} \\ x_2 + 2x_3 + x_5 + 3x_6 \quad &\geq 20 \quad \text{(batasan 5 } ft\text{)} \\ x_4 + x_5 \quad &\geq 15 \quad \text{(batasan 9 } ft\text{)} \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

(iv) Batasan Tanda (*Restriction Sign*)

Batasan tanda digunakan untuk memberikan batasan daerah solusi PL. Solusi PL yang dinyatakan dalam variabel keputusan dapat bernilai non negatif atau dapat bernilai keduanya positif dan negatif (Winston, 2004).

Batasan tanda untuk masalah Woodco adalah :

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0.$ Batasan tanda tersebut penulisannya dapat menjadi $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$ (2.1.3)

Dari (2.1.1) sampai (2.1.3) diperoleh model PL Woodco yaitu :

minimumkan $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

dengan batasan
$$5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 25 \quad \text{(batasan } 3\textit{ft}\text{)}$$
$$x_2 + 2x_3 + x_5 + 3x_6 \geq 20 \quad \text{(batasan } 5\textit{ft}\text{)}$$
$$x_4 + x_5 \geq 15 \quad \text{(batasan } 9\textit{ft}\text{)}$$

batasan tanda $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$ (2.1.4)

2.2 Bentuk Umum Masalah Pemrograman Linier

Pada dasarnya bentuk umum persoalan Pemrograman Linier dapat dirumuskan sebagai berikut :

Minimumkan $z = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n$

dengan batasan
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \quad (2.2.1)$$
$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$a_{13}x_1 + a_{13}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_3$$
$$x_i \geq 0\ ;\ i = 1, 2, \ldots, n$$

(Supranto, 2006)

2.3 Solusi Masalah Pemrograman Linier

Jenis-jenis solusi dari suatu masalah PL adalah :

(i). Solusi Dasar

Sebuah solusi dasar diperoleh dengan menyusun variabel tak dasar dan variabel dasar. Variabel tak dasar merupakan variabel yang nilainya nol. Langkah untuk menentukan variabel tak dasar adalah dengan cara menyusun n − m variabel dengan n adalah jumlah variabel pada persamaan PL dan m adalah jumlah persamaan. Misalnya untuk masalah Woodco mempunyai jumlah variabel (n) = 6 dan jumlah persamaan (m) = 3, maka diperoleh jumlah variabel tak dasar sebanyak n − m = 6 − 3 = 3 buah, berarti diperoleh jumlah variabel dasar sebanyak 3 buah (Http://luk.staff.ugm.ac.id/optimasi/pdf/simplek handout.pdf)

Untuk Woodco, variabel dasarnya adalah $\{x_2, x_5, x_6\}$, maka variabel tak dasarnya $\{x_1, x_3, x_4\}$.

(ii). Solusi Dasar Layak

Definisi 2.3.2 (Winston, 2004).

Sebarang solusi dasar dimana semua variabelnya adalah non negatif. Sebarang solusi dasar tersebut merupakan solusi dasar layak atau *Basic Feasible Solution* (BSF)

(iii). Solusi optimal

Definisi 2.3.3 (http://eksaktaplus.890m/com/materi program linier_1.pdf.)

Solusi optimal adalah solusi yang mempunyai nilai fungsi tujuan paling besar pada masalah maksimisasi dan mempunyai nilai fungsi tujuan paling kecil pada masalah minimisasi.

2.4 Uji Rasio

Sebelum memasukkan sebuah variabel menjadi basis, maka perlu dihitung uji rasio berikut :

$$\frac{\textit{Sisi Kanan Baris}}{\textit{Koefisien variabel masukan pada Baris}}$$

Batasan dengan rasio paling kecil disebut uji pemenang rasio. Variabel yang merupakan pemenang uji rasio inilah yang akan menjadi variabel basis masalah Woodco (Winston. 2004).

2.5 Matriks dan invers matriks

2.5.1 Matrik

Definisi 2.5.1.1 (Anton.H dan Rorres.C, 2002)

Matriks adalah kumpulan bilangan atau unsur yang disusun menurut baris dan kolom.

Bilangan-bilangan yang disusun itu disebut elemen-elemen atau komponen-komponen matriks. Banyaknya baris dan kolom dari suatu matriks disebut ordo matriks atau ukuran matriks. Matriks dinyatakan dengan notasi $(a_{ij})_{m,n}$ atau (a_{ij}) dan disebut matriks m x n. Untuk setiap i dan j, a_{ij} disebut elemen dari matriks itu. Pada elemen a_{ij} indeks pertama i menunjukan baris sedangkan indeks kedua menunjukan lajur (kolom).

Jadi sebuah matriks m x n secara umum dapat ditulis seperti :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.5.1.3 (Noble,1988)

Matriks identitas disimbolkan dengan I_n, yaitu suatu matriks yang mempunyai ukuran n x n dengan elemen diagonal utamanya 1 dan elemen lainnya 0.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.5.2 Invers matrik

Definisi 2.5.2.1 (Anton.H dan Rorres.C, 2002)

Jika A adalah matriks bujur sangkar,dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga AB = BA = I, maka A disebut dapat dibalik (*invertible*) dan B disebut sebagai invers dari A. Jika matrik B tidak dapat didefinisikan, maka A dinyatakan sebagai matriks singular.

Untuk menentukan invers suatu matriks dapat digunakan Operasi Baris Elementer. Pengolahan dasar baris terhadap suatu matriks A ialah :

1. Kalikan baris i dengan $c \neq 0$
2. Tukarkan baris i dengan baris j
3. Tambahkan c kali baris i ke baris j (Anton.H, Rorres.C, 2004)

Maka untuk mencari invers dari matriks A yang dapat dibalik, harus mencari suatu urutan operasi baris elementer yang mereduksi A menjadi identitas dan melakukan urutan operasi yang sama terhadap I_n untuk memperoleh A^{-1}

Contoh : $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaiannya adalah matriks A akan direduksi menjadi matriks identitas melalui operasi-operasi baris dan secara simultan melakukan operasi yang sama terhadap *I* untuk memperoleh A^{-1}.

Untuk mencapai hal ini akan digabungkan matriks identitas ke sebelah kanan dari A, sehingga menghasilkan matriks dengan bentuk [A | *I*]. Kemudian kita akan melakukan operasi-operasi baris terhadap matriks ini hingga sisi kiri tereduksi menjadi *I,* operasi-operasi ini akan mengubah sisi kanan menjadi A^{-1}, sehingga matriks akhir akan berbentuk $[\, I \mid A^{-1} \,]$ (Anton.H, 2002).

Dalam bentuk matriks, bentuk umum persoalan pemrograman linier dapat ditulis : minimumkan $z = cx$,

dengan batasan $Ax \geq b$

batasan tanda $x \geq 0$ bilangan bulat.

c adalah vektor baris berdimensi n, *x* adalah vektor kolom berdimensi n, b adalah vektor kolom berdimensi m, dan A adalah matriks berordo m x n.

2.6 Pemrograman Bilangan Bulat dan Masalah Knapsack

(i). Pemrograman Bilangan Bulat

Pemrograman bilangan bulat (*Integer Programing*) adalah program linier dimana variabel-variabelnya bertipe integer atau bulat. Program bilangan bulat digunakan untuk memodelkan permasalahan yang variabel-variabelnya tidak mungkin berupa bilangan pecahan, seperti variabel yang mempresentasikan jumlah orang.

(ii). Masalah Knapsack

Masalah Knapsack adalah suatu masalah bagaimana menentukan pemilihan barang dari sekumpulan barang diamana setiap barang tersebut mempunyai ukuran dan profit masing-masing, sehingga dari pemilihan barang tersebut didapatkanlah profit/keuntungan yang maksimum. Dalam pengerjaannya masalah knapsack adalah pemrograman bilangan bulat yang hanya mempunyai sebuah batasan/kendala (Winston, 2004).

Contoh, Maksimumkan $z = \frac{1}{5}a_3 + \frac{1}{3}a_5 + a_9 - 1$

$$3a_3 + 5a_5 + 9a_9 \leq 17$$

$$a_3, a_5, a_9 \geq 0;\ a_3, a_5, a_9 \text{ bilangan bulat} \qquad (2.6.1)$$

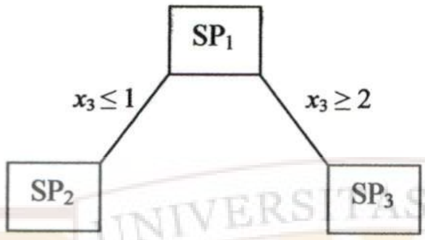
2.7 Metode Branch and Bound

Metode Branch and Bound adalah suatu metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah pemrograman bilangan bulat. Pada metode *Branch and Bound* variabel keputusan yang tidak bernilai bilangan bulat diselesaikan dengan cara mencabangkan masalah menjadi submasalah (Winston, 2004).

Ada beberapa langkah dalam proses branch and bound, yaitu :

Branching adalah langkah untuk membuat dua subpersoalan pada variabel keputusan yang belum bilangan bulat misalnya x_j, dimana $i_1 < x_j < i_2$ dan i_1, i_2 adalah dua bilangan bulat non negatif yang berurutan. Kemudian dibentuk dua masalah baru dengan cara memperluas masalah semula dengan kendala $x_j \leq i_1$ atau $x_j \geq i_2$ (Siagian.P, 1987)

Contoh, misalkan sebuah masalah PL menghasilkan nilai optimal $z = 15$, $x_1 = 3$ dan $x_2 = 3$ dan $x_3 = \frac{7}{4}$. Oleh karena nilai variabel x_3 juga harus bernilai bilangan bulat maka dilakukan pencabangan terhadap x_3 yaitu :



($z = 15$, $x_1 = 3$ dan $x_2 = 3$ dan $x_3 = \frac{7}{4}$)

Sub Persoalan 2 (SP_2) adalah : Sub Persoalan 1 (SP_1) dengan kendala $x_3 \leq 1$

Sub Persoalan 3 (SP_3) adalah : Sub Persoalan 1 (SP_1) dengan kendala $x_3 \geq 2$

Bounding adalah langkah untuk menyelesaikan masing-masing subpersoalan dengan program linier yang mengabaikan batasan bilangan bulat (Siagian.P, 1987)

Fathoming adalah penghentian pencabangan dari suatu subpersoalan. Pencabangan akan dihentikan jika salah satu dari kriteria di bawah ini terpenuhi :

1. Penyelesaian dari subpersoalan tidak layak.
2. Penyelesaian dari subpersoalan memberikan penyelesaian optimal dengan seluruh variabel memenuhi kriteria kendala. (Winston, 2004)

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan mulai bulan September sampai dengan November 2008. Tempat penelitian adalah di perpusatakaan jurusan Matematika FMIPA Universtias Andalas Padang

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan dalam menentukan solusi masalah minimisasi pemrograman linier dengan metode generasi kolom adalah :

1. Langkah awal adalah merumuskan secara matematis permasalahan kedalam bentuk Program Linier, dengan menentukan fungsi tujuan dan pertidaksamaan kendala.
2. Menentukan variabel dasar sebagai basis
3. Menggunakan Teknik Generasi Kolom dalam menentukan masalah Knapsack
4. Menentukan penyelesaian masalah Knapsack dengan Metode Branch and Bound

BAB IV
PEMBAHASAN

Pada bab ini akan diuraikan langkah-langkah penyelesaian masalah Pemrograman Linier (PL) dengan menggunakan Metode Generasi Kolom.

4.1 Menyatakan masalah PL secara Matematika

Sesuai dengan permasalahan Perusahaan Woodco pada Bab II, maka langkah-langkah penyelesaiannya akan dijelaskan sebagai berikut :

Perusahaan Woodco harus mengambil suatu keputusan yang tepat agar setiap batang papan 17 *ft* bisa dipotong dengan optimal. Karena itu setiap keputusan yang diambil Woodco akan berhubungan dengan cara memotong sebatang papan standar 17 *ft*.

Untuk memformulasikan masalah PL Woodco secara matematis, maka digunakan :

(i) x_i sebagai jumlah potongan papan 17 *ft* menurut kombinasi ke *i*

(ii) Jumlah papan Woodco yang terbuang + total permintaan pelanggan = jumlah panjang total papan.

Total permintaan pelanggan = 25(3 *ft*) + 20(5 *ft*) + 15(9 *ft*) = 310 *ft* dan jumlah panjang total papan yang di potong = $17(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$, maka papan yang terbuang dalam *ft* adalah $17(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) - 310$, sehingga fungsi tujuan dari masalah Woodco adalah :

Meminimumkan $z = 17x_1 + 17x_2 + 17x_3 + 17x_4 + 17x_5 + 17x_6 - 310$ (4.1.1)

Meminimumkan sisa papan berarti ekivalen dengan meminimumkan panjang total papan $17(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$ yang juga ekivalen dengan meminimumkan jumlah kombinasi pemotongan papan $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$

Pada akhirnya fungsi objektif Woodco adalah :

Minimumkan $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$ (4.1.2)

Ini berarti bahwa sisa pemotongan bisa diminimumkan dengan cara meminimumkan jumlah pemotongan papan 17 *ft*.

Selanjutnya terdapat tiga batasan untuk masalah Woodco yaitu :

Batasan 1 sedikitnya 25 batang papan panjang 3 *ft* harus dipotong, batasan 2 sedikitnya 20 batang papan panjang 5 *ft* harus dipotong dan batasan 3 sedikitnya 15 batang papan panjang 9 *ft* harus dipotong. Karena jumlah total panjang papan 3 *ft* yang dipotong diberikan oleh kombinasi $5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 25$, maka batasan 1 menjadi : $5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 25$ (4.1.3)

Dengan cara yang sama, untuk pemotongan papan 5 *ft* dan 9 *ft* maka batasan 2 dan 3 berturut-turut adalah :

batasan 2 menjadi : $x_2 + 2x_3 + x_5 + 3x_6 \geq 20$ (4.1.4)

batasan 3 menjadi : $x_4 + x_5 \geq 15$ (4.1.5)

Koefisien x_i pada batasan untuk papan *k-ft* adalah jumlah dari papan *k-ft* yang dihasilkan. Jika sebuah papan dipotong menurut kombinasi *i*, maka tentu saja bahwa x_i harus bilangan bulat.

Menggabungkan batasan tanda $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$ dengan (4.1.2 – 4.1.5) diperoleh masalah PL Woodco secara matematis :

minimumkan $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

dengan batasan $5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 25$ (batasan 3 *ft*)

$x_2 + 2x_3 + x_5 + 3x_6 \geq 20$ (batasan 5 *ft*)

$x_4 + x_5 \geq 15$ (batasan 9 *ft*)

batasan tanda $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$ (4.1.6)

4.2 Menentukan Variabel Dasar sebagai Basis

Dari Tabel 2.1 dan batasan pada (4.1.6) dapat dilihat bahwa x_1 hanya ada pada batasan 3 *ft* (karena kombinasi 1 hanya dihasilkan oleh papan 3 *ft*) dan x_6 hanya ada pada batasan 5 *ft* (karena kombinasi 6 hanya dihasilkan oleh papan 5 *ft*). Ini berarti x_1 dan x_6 dapat digunakan sebagai variabel dasar awal untuk papan batasan 3 *ft* dan 5 *ft*. Tidak satupun dari kombinasi 1 sampai 6 yang menghasilkan hanya papan 9 *ft*, sehingga batasan 9 *ft* tidak punya variabel dasar.

Untuk menghindari keharusan menambahkan sebuah variabel dasar pada batasan 9 *ft*, maka didefinisikan kombinasi 7 menjadi kombinasi pemotongan yang menghasilkan hanya 1 papan 9 *ft*. Selanjutnya x_7 didefinisikan sebagai jumlah papan yang dipotong menurut kombinasi 7 dan kolom untuk x_7 pada batasan PL akan menjadi :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Variabel x_7 akan ditambahkan ke fungsi objektif. Sekarang dapat digunakan variabel dasar = $\{ x_1, x_6, x_7 \}$ sebagai basis awal (B_0)untuk PL (4.1.5). maka diperoleh :

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} x_1 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\
B_0 = & \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
\end{array}
$$

Untuk memperoleh invers dari B_0, maka dilakukan Opersai Baris Elementer dengan mereduksi $[B_0| I]$, dengan langkah-langkah :

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],
$$

Baris 1 dikali $\frac{1}{5}$, baris 2 dikali $\frac{1}{3}$, sedangkan baris 3 tetap.

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],
$$

Dari operasi operasi baris elementer (OBE) diperoleh invers dari B_0 yaitu :

$$
B_0^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Agar variabel dasar bisa sebagai basis maka inversnya (B_0^{-1}) dikalikan dengan koefisien variabel dasar (*Coeficient Basic Variable/C_{BV}*). C_{BV} dari B_0 adalah $x_1 = x_6 = x_7 = 1$.

maka $C_{BV} B_0^{-1} = [\ 1\ 1\ 1\ ] \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{3}\ 1\ ]$

$C_{BV} B_0^{-1} = [\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{3}\ 1\ ]$

4.3 Menggunakan Generasi Kolom untuk Menentukan Masalah Knapsack

Teknik generasi kolom adalah suatu teknik untuk memperoleh kolom yang dapat memberikan nilai fungsi tujuan terbaik (positif pada persoalan minimisasi). Pada B_0 setiap kolom variabel menyatakan kombinasi pemotongan satu jenis papan. Sebuah variabel ditetapkan dengan 3 bilangan a_3, a_5 dan a_9, dimana a_i adalah jumlah papan *i-ft* yang dihasilkan dengan memotong 1 buah papan 17 *ft* berdasarkan kombinasi yang diberikan, sebagai contoh : variabel x_2 ditetapkan dengan $a_3 = 4$, $a_5 = 1$, dan $a_9 = 0$.

Untuk basis ini maka sebuah kombinasi yang ditetapkan oleh a_3, a_5 dan a_9 akan memberikan nilai :

$$C_{BV} B_0^{-1} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_5 \\ a_9 \end{bmatrix} - 1 = [\ \tfrac{1}{5}\ \ \tfrac{1}{3}\ \ 1\ ] \begin{bmatrix} a_3 \\ a_5 \\ a_9 \end{bmatrix} - 1 = (\tfrac{1}{5})\, a_3 + (\tfrac{1}{3})\, a_5 + a_9 - 1$$

a_3, a_5 dan a_9 harus dipilih, sehingga papan yang digunakan tidak lebih dari 17 *ft*. a_3, a_5 dan a_9 harus bilangan bulat non negatif (positif atau nol), sehingga untuk sebarang kombinasi a_3, a_5 dan a_9 harus memenuhi :

$$3a_3 + 5a_5 + 9a_9 \le 17 \text{ dengan } a_3 \ge 0,\ a_5 \ge 0,\ a_9 \ge 0$$

$$\text{dan } a_3, a_5, a_9 \text{ bilangan bulat} \qquad (4.3.1)$$

Sekarang pola yang menguntungkan dicari dengan menyelesaikan persoalan knapsack yang ekuivalen berikut :

$$\mathit{Max}\ z = \tfrac{1}{5}a_3 + \tfrac{1}{3}a_5 + a_9 - 1$$

$$3a_3 + 5a_5 + 9a_9 \le 17$$

$$a_3, a_5, a_9 \ge 0;\ a_3, a_5, a_9 \text{ bilangan bulat} \qquad (4.3.2)$$

Meskipun secara teoritis persoalan knapsack sulit diselesaikan, namun metoda *branch and Bound* cukup efisien dan praktis untuk menyelesaikannya (Taha 1982; Winston 1991).

Tujuan utama pemakaian metode *branch and bound* adalah supaya hasil variabel yang terdiri dari 3 bilangan tersebut bernilai bulat. Dilakukan analisa terhadap fungsi tujuan maksimumkan $z = \frac{1}{5}a_3 + \frac{1}{3}a_5 + a_9 - 1$ dan batasan $3a_3 + 5a_5 + 9a_9 \leq 17$. Kemudian direncanakan masing-masing-masing bilangan (a_3, a_5, a_9) adalah bilangan bulat.

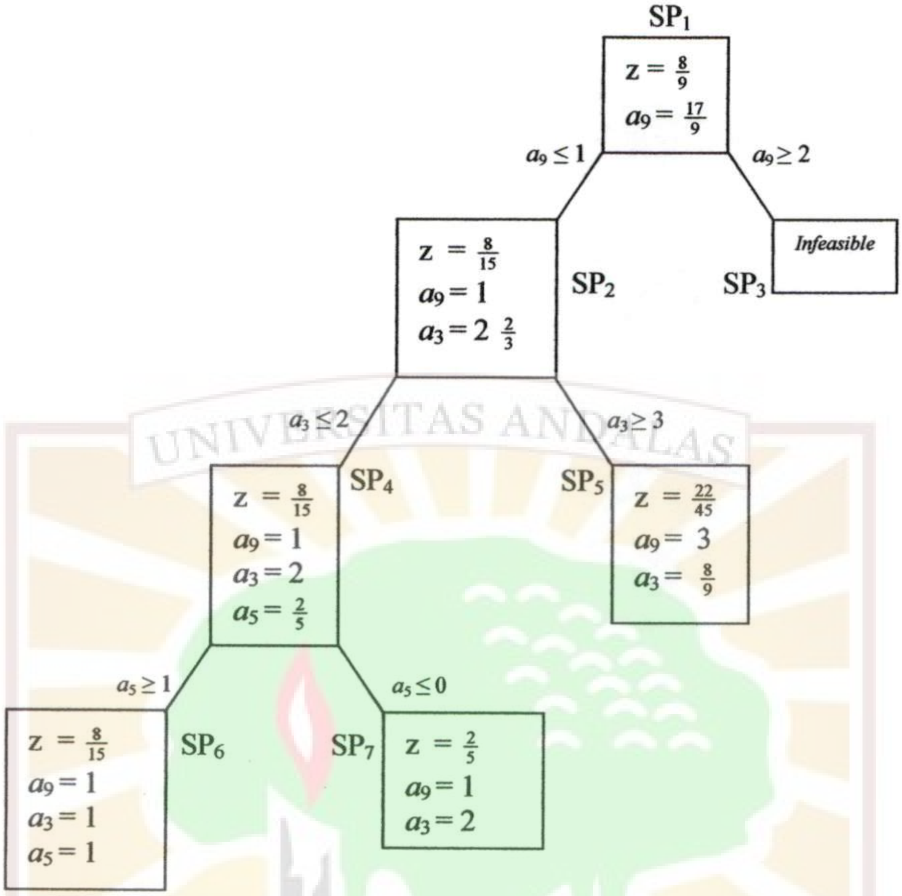
Pertama dilakukan pemberian nilai maksimal atau sebesar mungkin kepada a_9 sementara a_3 dan a_5 dianggap nol. Nilai paling besar yang mungkin untuk a_9 adalah $\frac{17}{9}$, dimasukan ke persamaan $z = \frac{1}{5}a_3 + \frac{1}{3}a_5 + a_9 - 1$, sehingga $z = \frac{17}{9} - 1$, maka diperoleh $z = \frac{8}{9}$, disebut subpersoalan 1 (SP_1).

Agar hasil optimal sesuai yang diinginkan (bilangan bulat), maka a_9 yang masih bernilai pecahan dilakuan pencabangan. Pencabangan berdasarkan nilai a_9. yaitu $1 \leq \frac{17}{9} \leq 2$. Batasan 1 disebut subpersoalan 2 (SP_2) dan batasan 2 disebut subpersoalan 3 (SP_3). Pencabangan yang layak adalah dengan SP_2. Pada SP_2 a_9 bernilai 1, selanjutnya akan dicarikan nilai untuk bilangan berikut yaitu a_3. Hasilnya akan diperoleh nilai z yang lebih optimal. Dari persamaan maksimumkan $z = \frac{1}{5}a_3 + \frac{1}{3}a_5 + a_9 - 1$, diperoleh $z = \frac{1}{5}a_3 + a_9 - 1$, sehingga $z = \frac{1}{5}(2\frac{2}{3}) + 1 - 1$, jadi hasilnya $z = \frac{8}{15}$. Dari pencabangan ini telah diperoleh nilai z yang lebih optimal, dan nilai a_9 bilangan bulat namun nilai a_3 masih bilangan pecahan.

Dengan proses yang sama dilanjutkan pencabangan berdasarkan nilai a_3 yaitu $2 \leq \frac{8}{3} \leq 3$. Pencabangan yang layak yaitu 2 (SP_4), berarti a_3 bernilai bilangan bulat 2. Maka diproses maksimumkan $z = \frac{1}{5}a_3 + \frac{1}{3}a_5 + a_9$ -1, sehingga $z = \frac{1}{5}(2)$ $+ \frac{1}{3}a_5 + 1 - 1$, maka diperolehlah $z = \frac{2}{5} + \frac{1}{3}(\frac{2}{5})$, hasilnya $z = \frac{8}{15}$. Dari pencabangan sekarang diperoleh nilai z tetap, nilai a_9 dan a_3 bilangan bulat, sementara nilai a_5 masih pecahan. Maka dilakukan pencabangan berikutnya berdasarkan nilai a_5.

Dari nilai a_5 dirumuskanlah pencabangan dengan subpersoalan $1 \leq \frac{2}{5} \leq 0$. maka pencabangan yang layak yaitu 1 (SP_6), berarti a_5 bernilai bilangan bulat 1. Sehingga setelah dimasukan ke persamaan maksimumkan $z = \frac{1}{5}a_3 + \frac{1}{3}a_5 + a_9$ -1 diperoleh $z = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1 - 1$, jadi nilai z didapatkan $= \frac{8}{15}$

Dengan menggunakan metode *branch and bound*, solusi optimal untuk persoalan knapsack ini adalah $z = \frac{8}{15}$, $a_3 = a_5 = a_9 = 1$. Ini berkorespondensi dengan kombinasi 5 dan variabel x_5. Jadi nilai z adalah $\frac{8}{15}$, dan dengan memasukkan x_5 kedalam basis akan mengurangi sisa pemotongan. Untuk memasukkan x_5 ke dalam basis, perlu dibentuk ruas kanan sekarang dan kolom x_5.



Gambar 1
***Pohon Branch and Bound untuk program bilangan bulat* (4.3.2)**

Karena hasil pohon *branch and bound* diperoleh $a_3 = a_5 = a_9 = 1$ yang berarti berkorespondensi dengan kombinasi x_5 (1-1-1), maka untuk memasukkan x_5 ke dalam basis, perlu dibentuk ruas kanan sekarang (b) dari kolom x_5. Ruas kanan dari $[x_5]$ adalah baris 1 = 25, baris 2 = 20 dan baris 3 = 15.

Kolom x_5 sekarang $= B_0^{-1}[x_5] = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

Maka, koefisien variabel masukan baris 1,2 dan 3 berturut-turut adalah $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}$ dan 1

Kemudian,

$$\text{Ruas kanan sekarang} = B_0^{-1}\,\text{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \\ 15 \end{bmatrix}$$

Maka, sisi kanan baris 1,2 dan 3 bertutur-turut adalah 5, $\frac{20}{3}$ dan 15.

B_0^{-1} b = [5, $\frac{20}{3}$, 15]

Setelah diporoleh koefisien variabel masukan baris ($B_0^{-1}[x_5]$) dan Sisi kanan baris (B_0^{-1} b) maka dilakukanlah uji rasio untuk menunjukan posisi baris dimana x_5 akan masuk basis.

Uji Rasio :

$$\frac{\text{Sisi kanan baris 1}}{\text{Koefisien variabel masukan pada baris 1}} = \frac{5}{1/5} = 25 \text{ (baris 1)}$$

$$\frac{\text{Sisi kanan baris 2}}{\text{Koefisien variabel masukan pada baris 2}} = \frac{20/3}{1/3} = 20 \text{ (baris 2)}$$

$$\frac{\text{Sisi kanan baris 3}}{\text{Koefisien variabel masukan pada baris 3}} = \frac{15}{1} = 15 \text{ (baris 3)}$$

Dari Hasil uji rasio menunjukan yang memiliki batas rasio paling kecil adalah 15 yang terletak pada baris 3 maka dapat dijelaskan bahwa x_5 akan masuk basis pada baris ke 3. Variabel dasar yang baru adalah BV(1) = $\{ x_1 , x_6 , x_5 \}$ menggunakan bentuk hasil kali dari invers, maka diperoleh:

$$B_1^{-1} = E_0\,B_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{-1}{5} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sehingga $\quad C_{BV} B_1^{-1} = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{-1}{5} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\frac{1}{5} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{7}{15}]$

$\mathbf{C_{BV} B_1^{-1} = [\frac{1}{5} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{7}{15}]}$

Selanjutny kembali digunakan teknik generasi kolom untuk menentukan pola yang akan masuk basis. Untuk nilai $c_{BV}\ B_1^{-1}$, suatu pola yang dinyatakan oleh a_3, a_5 dan a_9 ditentukan nilai z nya menjadi :

$$[\tfrac{1}{5} \quad \tfrac{1}{3} \quad \tfrac{7}{15}] \begin{bmatrix} a_3 \\ a_5 \\ a_9 \end{bmatrix} - 1 = \tfrac{1}{5} a_3 + \tfrac{1}{3} a_5 + \tfrac{7}{15} a_9 - 1$$

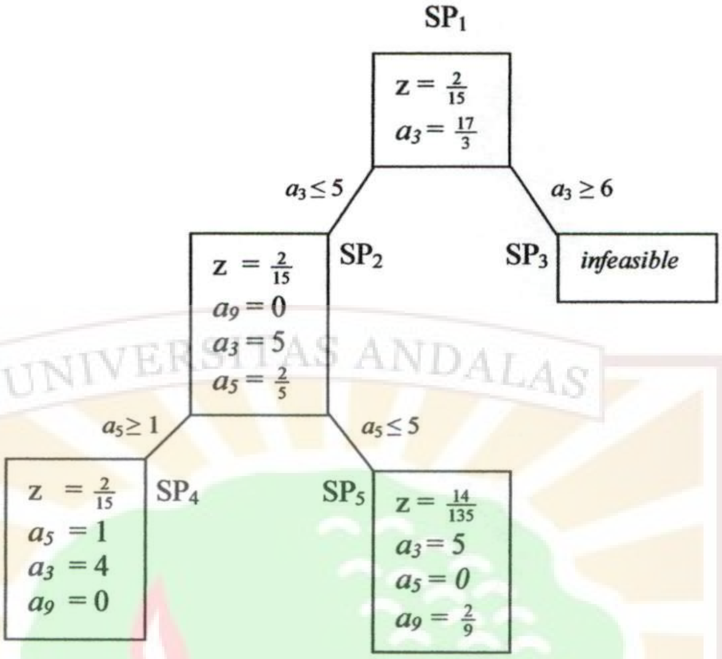
Untuk tabel sekarang prosedur generasi kolom tersebut menghasilkan masalah knapsack berikut :

Maksimumkan $z = \frac{1}{5} a_3 + \frac{1}{3} a_5 + \frac{7}{15} a_9 - 1$

$$3a_3 + 5a_5 + 9a_9 \leq 17$$

$$a_3, a_5, a_9 \geq 0;\ a_3, a_5, a_9 \text{ bilangan bulat} \qquad (4.3.3)$$

Pohon *branch and bound* untuk persamaan (4.3.3) diberikan pada gambar 2, dapat dilihat kombinasi $a_3 = 4$, $a_5 = 1$ dan $a_9 = 0$ (SP_4) akan menghasilkan atau memberikan nilai lebih baik daripada sebarang kombinasi lainnya (itu akan menghasilkan sebuah koofisien baris 0 yaitu $\frac{2}{15}$).



Gambar 2
***Pohon Branch and Bound untuk program bilangan bulat* (4.3.3)**

Karena hasil pohon *branch and bound* diperoleh $a_3 = 4$, $a_5 = 1$ dan $a_9 = 0$ yang berarti berkorespondensi dengan kombinasi x_2 (4-1-0), maka untuk memasukkan x_2 ke dalam basis, perlu dibentuk ruas kanan sekarang (b) dari kolom x_2. Ruas kanan dari $[x_2]$ adalah baris 1 = 25, baris 2 = 20 dan baris 3 = 15. Kolom untuk x_2 pada tabel sekarang adalah :

$$B_1^{-1}\begin{bmatrix}4\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 0 & \frac{-1}{5}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\ \frac{1}{3}\\ 0\end{bmatrix}$$

Maka, koefisien variabel masukan baris 1,2 dan 3 berturut-turut adalah $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{3}$ dan 0

Sisi kanan dari tabel sekarang adalah :

$$B_1^{-1}\,\mathrm{b}\quad \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{-1}{5} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{3} \\ 15 \end{bmatrix}$$

Maka, sisi kanan baris 1,2 dan 3 berturut-turut adalah 2, $\frac{5}{3}$ dan 15

$B_1^{-1}\,\mathrm{b} = [\, 2,\ \frac{5}{3},\ 15\,]$

Setelah diporoleh koefisien variabel masukan baris ($B_1^{-1}[x_2]$) dan sisi kanan baris (B_1^{-1} b) maka dilakukanlah uji rasio untuk menunjukan posisi baris dimana x_2 akan masuk basis.

Uji Rasio :

$$\frac{\text{Sisi kanan baris 1}}{\text{Koefisien variabel masukan pada baris 1}} = \frac{2}{4/5} = 2{,}5 \text{ (baris 1)}$$

$$\frac{\text{Sisi kanan baris 2}}{\text{Koefisien variabel masukan pada baris 2}} = \frac{5/3}{1/3} = 5 \text{ (baris 2)}$$

$$\frac{\text{Sisi kanan baris 3}}{\text{Koefisien variabel masukan pada baris 3}} = \frac{15}{0} = \infty \text{ (baris 3)}$$

Uji rasio menunjukan bahwa dari x_2 harus masuk basis pada baris 1. Oleh karena itu BV (2) = { x_2 , x_6 , x_5 } menggunakan bentuk hasil kali dari invers, maka diperoleh $E_1 = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ \frac{-5}{12} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$B_2^{-1} = E_1 B_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ \frac{-5}{12} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{-1}{5} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kembali digunakan teknik generasi kolom untuk menentukan pola yang akan masuk basis. Untuk nilai $c_{BV} B_2^{-1}$, suatu pola yang dinyatakan oleh a_3, a_5 dan a_9 ditentukan nilai z nya menjadi :

$$C_{BV} B_2^{-1} = [1\ \ 1\ \ 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\tfrac{1}{6}\ \ \tfrac{1}{3}\ \ \tfrac{1}{2}]$$

$$C_{BV} B_2^{-1} = [\tfrac{1}{6}\ \ \tfrac{1}{3}\ \ \tfrac{1}{2}]$$

Untuk tabel sekarang prosedur generasi kolom tersebut menghasilkan masalah berikut kanpsack :

Maksimumkan $z = \frac{1}{6}a_3 + \frac{1}{3}a_5 + \frac{1}{2}a_9 - 1$

$$3a_3 + 5a_5 + 9a_9 \leq 17$$

$$a_3, a_5, a_9 \geq 0;\ a_3, a_5, a_9 \text{ bilangan bulat} \qquad (4.3.4)$$

Pohon *branch and bound* untuk program bilangan bulat (4.3.4) dijelaskan nilai optimal z untuk (4.3.4) diproleh $z = 0$. Ini berarti bahwa tidak ada kombinasi dapat memberikan harga paling banyak, oleh karena itu solusi dasar akan menjadi solusi optimal.

Untuk memperoleh nilai-nilai dari variabel dasar untuk solusi optimal, maka diperoleh sisi kanan dari tabel sekarang :

$$B_2^{-1}\,\mathrm{b} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{6} \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$B_2^{-1}\,\mathrm{b} = [\ \tfrac{5}{2},\ \tfrac{5}{6},\ 15\ ]$$

Karena solusi optimal dari masalah pemotongan stok Woodco diberikan oleh $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_6 = \frac{5}{6}$, $x_5 = 15$, maka jika diinginkan dapat diperoleh solusi bilangan bulat layak dengan mengumpulkan x_2 dan x_6. Akan diperoleh solusi bilangan bulat $x_2 = 3, x_6 = 1, x_5 = 15$.

Harga x_2 ,x_6 dan x_5 akan dimasukan ke persamaan fungsi tujuan dari masalah Woodco (4.1.1), dimana jumlah papan yang terbuang atau sisa (*ft*) diperoleh dari pengurangan jumlah panjang papan standar dengan jumlah total permintaan pelanggan maka,

Meminimumkan $z = 17x_1 + 17x_2 + 17x_3 + 17x_4 + 17x_5 + 17x_6 - 310$, maka

$$z = 17(3) + 17(15) + 17(1) - 310$$

$$z = 323\,ft - 310\,ft = 13\,ft \text{ (kurang dari } 17\,ft)$$

Jika diperoleh sebuah solusi dasar layak/ *Basic Feasible Solution* untuk sebuah masalah pemotongan stok, maka tidak perlu merinci semua cara yang mungkin untuk memotong sebuah papan. Untuk setiap iterasi sebuah kombinasi yang baik (kombinasi yang akan meningkatkan nilai z saat dimasukkan menuju basis) dihasilkan dengan menyelesaikan masalah *Branch and Bound.*

Sesuai dengan permintaan pelanggan, sebanyak 25 batang papan 3 *ft*, 20 batang papan 5 *ft* dan 15 batang papan 9 *ft* dapat dipenuhi dengan memotong papan standar (17 *ft*) sebanyak 3 batang mengikuti kombinasi pemotongan 2 yaitu (a_3=4,a_5=1 dan a_9=0), 1 batang mengikuti kombinasi pemotongan 6 yaitu (a_3=0,a_5=3 dan a_9=0) dan 15 batang mengikuti kombinasi pemotongan 5 yaitu (a_3=1,a_5=1 dan a_9=1).

Dengan demikian semua permintaan pelanggan bisa terpenuhi dengan baik dan sekaligus operasional pekerjaan tersebut bisa menghasil sisa produksi yang sangat minimum. Berarti perusahaan Woodco telah mencapai tujuan ekonomisnya untuk mendapatkan keuntungan yang diharapkan dan pemanfaatan bahan baku usahanya yang optimal.

BAB V
KESIMPULAN

Pada persoalan pemotongan stok, tidak perlu mencari semua pola pemotongan yang mungkin, cukup menentukan sebuah pola awal yang merupakan pola pemotongan murni. Pola pemotongan yang lebih baik diawali dengan menyatakannya model matematisnya kedalam bentuk pemrograman linier. Setelah itu dilanjutkan dengan mengunakan teknik Generasi Kolom. Perkerjaan yang agak berat adalah menentukan solusi subpersoalan knapsack.

Metode yang cukup praktis untuk menyelesaikan persoalan knapsack ini adalah metoda *Branch and Bound*. Bila jumlah pesanan semakin banyak (dalam model matematis = jumlah baris semakin banyak) maka semakin banyak pula variabel yang terlibat dalam subpersoalan knapsack.

DAFTAR PUSTAKA

Anton.H and Rorres.C (2002). *Aljabar Linier Elementer*.Erlangga.Jakarta

Leon,S.J.(1998). *Aljabar Linier dan aplikasinya.* Edisi kelima.Erlangga

Optimasi Pemrograman Linier. http://luk.staff.ugm.ac.id/optimasi/pdf/SimplexHandout.pdf. Tanggal Akses : 1 September 2008

Program Linier. http://eksaktaplus.890m.com/wp-content/uploads/ 2008/04/materi_program%20linier_1.pdf. Tanggal Akses : 5 September 2008

Rao, S.S.(1995). *Optimization Theory and Aplications.* New Age. International (P). Publishers, New Delhi.

Siagian.P, (1987). *Peneliatian Operasional Teori dan Praktek.*Edisi satu.UI-Press

Supranto.J.(1983). *Linier Programing.* Edisi kedua. Iniversitas Indonesia, Jakarta

Supranto.J.(2006). *Riset Operasi untuk Pengambilan Keputusan.* Edisi Revisi. Universitas Indonesia, Jakarta

Winston.W.L.(2004). *Operation Research, Aplication and Algoritthms.* Indiana University