TEKNIK MENENTUKAN BILANGAN RAMSEY r(m, n) DENGAN m DAN n ADALAH 1,2, DAN 3

SKRIPSI

AGUS FAJARMAN ZALUKHU
07 134 064

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2011

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa, atas limpahan rahmat dan anugerahnya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul : **" TEKNIK MENENTUKAN BILANGAN RAMSEY r(m, n) DENGAN m DAN n adalah 1, 2, DAN 3 ".**

Skripsi ini disusun bertujuan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas, Padang.

Pada kesempatan yang berbahagia ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak **Dr. Syafrizal Sy** selaku pembimbing penulis yang telah membimbing dan mengarahkan serta memberikan motivasi kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak **Narwen, M.Si** dan Bapak **Zulakmal, M.Si** selaku dosen penguji sekaligus memberikan bimbingan kepada penulis untuk memperbaiki skripsi ini.
3. Bapak **Dr. Syafrizal Sy** selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNIVERSITAS ANDALAS PADANG.
4. Bapak **Prof. Dr. I Made Arnawa, M.Si** selaku koordinator Basic Science Jurusan Matematika FMIPA UNIVERSITAS ANDALAS PADANG, yang tidak henti- hentinya memberikan semangat dan arahan kepada anak-anak Basic Science, dan juga kepada seluruh Dosen dan staf Jurusan Matematika Universitas Andalas Padang yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini.

5. **Papa** dan **Mama** tercinta, yang telah membesarkan, merawat, mendidik dan sekaligus memberikan semangat kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Tidak lupa juga penulis ucapkan terimakasih banyak kepada abang, kakak dan adik-adik tercinta yang telah memberikan motivasi kepada penulis.
6. Ketua dan para staf Perpustakaan Jurusan Matematika dan Perpustakaan Pusat Universitas Andalas Padang.
7. Penulis juga mengucapkan terimakasih banyak kepada rekan-rekan mahasiswa Basic Science Jurusan Matematika angkatan 2007. Khususnya buat Michi, Angga, bang Leman, Tulus, dan teman-teman lainnya yang telah memberikan dukungan pikiran sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Semoga Tuhan Yang Maha Pengasih dan penyayang selalu melimpahkan rahmat dan karunianya kepada semua pihak baik yang telah membantu maupun yang telah memberikan dukungan dan semangat kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kesalahan-kesalahan yang tidak penulis ketahui, oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran dari pembaca untuk lebih menyempurnakan skripsi ini. Terima Kasih

Padang, Juli 2011

Penulis

ABSTRAK

Dalam kehidupan sehari-hari, senantiasa permasalahn dapat di ilustrasikan sebagai suatu garf. Teori graf merupakan cabang ilmu pengetahuan dari matematika *diskrit*. Teori graf dinyatakan dalam bentuk himpunan (V, E), dimana V (*vertex*) adalah himpunan dari titik-titik yang tak-kosong, dan E (*edge*) adalah sisi atau garis yang menghubungkan sepasang titik dalam sebuah graf tersebut.

Diberikan dua buah graf F dan graf H, bilangan Ramsey $r(F, H)$ adalah bilangan bulat positif terkecil n sedemikian hingga untuk setiap graf G dengan n titik memenuhi kondisi G memuat F sebagai subgraf, atau komplemen dari G memuat H sebagai subgraf. Dalam skripsi ini akan membahas tentang teknik untuk menentukan bilangan Ramsey $r(m, n)$ dengan m dan n adalah 1, 2, dan 3. Dari teknik tersebut, kita akan memperoleh nilai dari $r(1, n) = r(n, 1) = 1$, $r(2, n) = r(n, 2) = n$, dan $r(3, 3) = 6$.

Kata Kunci : *Aplikasi teori graf, bilangan Ramsey klasik, dan graf lengkap.*

DAFTAR ISI

Halaman

KATA PENGANTAR i

ABSTRAK iii

DAFTAR ISI iv

DAFTAR SIMBOL vi

DAFTAR GAMBAR vii

BAB I PENDAHULUAN 1

1.1 Latar Belakang Masalah 1

1.2 Rumusan Masalah 2

1.3 Tujuan Penelitian 3

1.4 Batasan Masalah 3

1.5 Manfaat Penelitian 3

1.6 Sistematika Penulisan 3

BAB II LANDASAN TEORI 4

2.1 Definisi dan Komponen Graf 4

2.2 Graf Terhubung 6

2.3 Subgraf 8

2.4 Derajat Suatu Titik 10

2.5 Graf Kosong 12

2.6 Graf Komplit 12

2.7 Komplemen Graf 13

2.8 Bilangan Ramsey 14

2.8.1 Bilangan Ramsey Klasik 14

BAB III PEMBAHASAN 16

3.1 Menentukan Bilangan Ramsey $r(1, n) = r(n, 1) = 1$ 16

3.2 Menentukan Bilangan Ramsey $r(2, n) = r(n, 2) = 2$ 19

3.3 Menentukan Bilangan Ramsey $r(3, n)$ untuk $n = 1, 2, 3$ 23

BAB IV PENUTUP 26

4.1 Kesimpulan 26

4.2 Saran 26

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR SIMBOL

1. $e = (u, v)$: Sisi yang menghubungkan titik u dan v dalam graf G
2. u : Titik di graf G
3. v : Titik di graf G
4. $G(V, E)$: Graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E
5. G : Graf G
6. E : Himpunan sisi E
7. V : Himpunan titik V
8. $|E(G)|$: Jumlah keseluruhan sisi di graf G
9. $|V(G|$: Jumlah keseluruhan titik di graf G
10. $\overline{G}$: Graf G komplemen
11. C_n : Graf sikel (*cycle*) dengan n titik
12. $\sum$: Sigma
13. r : Bilangan Ramsey
14. m : Jumlah titik dalam bilangan Ramsey
15. n : jumlah titik dalam bilangan Ramsey
16. K : Graf komplit

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 2.1.1 Graf G 5

Gambar 2.1.2 Graf G dan Multigraf H 5

Gambar 2.2.1 Graf dengan *walk*, *path*, *trail* dan *cycle* 6

Gambar 2.2.2 (a) Graf terhubung, (b) Graf tak-terhubung 7

Gambar 2.2.3 Graf *cycle* 7

Gambar 2.3.1 Graf G dan subgraf H_1 dan H_2 8

Gambar 2.3.2 Graf G dengan subgraf G-v, dan G-e 9

Gambar 2.3.3 Graf G, Subgraf terdukung (U), dan Subgraf Terdukung (F) 10

Gambar 2.4.1 Graf G dengan derajat titik 10

Gambar 2.4.2 Graf G dan derajat titik 11

Gambar 2.5.1 Graf Kosong N_4. 12

Gambar 2.6.1 Graf komplit 13

Gambar 2.7.1 Graf dengan komplemennya 14

Gambar 3.2.1 Graf G dan Graf $\overline{G}$ (k_1, k_2 20

Gambar .3.2.2 Graf G (k_1, k_2) dan $\overline{G}$ 20

Gambar 3.2.3 Graf G dan Graf $\overline{G}$ (k_1, k_2) 21

Gambar 3.2.4 Graf G dan Graf $\overline{G}$ (k_1, k_2, k_3) 21

Gambar 3.2.5 Graf G dengan sisi u,v 22

Gambar 3.2.6 Graf kosong G dan Graf $\overline{G}$ (K_n) 23

Gambar 3.2.7 Graf G dengan sisi u,v 23

Gambar 3.3.1 Graf G_5 dan Graf $\overline{G}_5$ 25

Gambar 3.3.2 Graf G dengan sisi (vv_1, vv_2, vv_3) 24

Gambar 3.3.3 Graf $\overline{G}$ dengan sisi v_1, v_2, v_3 24

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika merupakan ilmu dasar yang mempunyai peranan yang sangat penting terhadap berbagai ilmu pengetahuan yang lain. Matematika juga sangat banyak manfaaatnya dalam kehidupan sehari-hari, baik itu disadari maupun tidak. Matematika sendiri mempunyai beberapa cabang ilmu yang lebih spesifik, diantaranya adalah *statistik*, *aljabar*, *geometri*, dan matematika *diskrit*. Matematika *diskrit* adalah cabang matematika yang membahas segala sesuatu yang bersifat *diskrit*. *Diskrit* disini dapat diartikan sebagai yang saling terpisah (lawan dari kontinu). Beberapa hal yang dibahas dalam matematika *diskrit* ini adalah *teori himpunan*, *teori kombinatorial*, *permutanasi*, *relasi*, *fungsi*, *rekursif*, *teori graf* dan lain-lain [Munir, 2003].

Teori graf sebagai sub cabang dari matematika diskrit merupakan pokok bahasan yang sudah lama, namun mempunyai banyak terapan sampai saat ini. Graf digunakan untuk mempresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antar objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai titik, sedangkan hubungan antar objek dinyatakan dengan garis. Sebagai contohnya sebuah peta jaringan jalan raya yang menghubungkan sejumlah kota di Provinsi Sumatera Barat, terlihat bahwa peta tersebut merupakan sebuah graf, dimana kota dinyatakan sebagai titik sedangkan jalan dinyatakan sebagai garis. Dengan diberikannya peta tersebut, maka dapat diketahui apakah ada lintasan jalan antara dua buah kota dalam peta tersebut [Munir, 2003].

Salah satu materi yang banyak berkembang akhir-akhir ini dalam teori graf adalah *Teori Ramsey.* Teori Ramsey pertama kali diperkenalkan pada tahun 1928 dalam konteks permasalahan mencari prosedur untuk menentukan benar tidaknya suatu formula logika yang diberikan. Kemudian teori Ramsey menjadi terkenal setelah **Erdos da Szekeres** (1935) mengaplikasikannya kedalam teori graf [Surahmat, 2003].

Bilangan Ramsey ditemukan oleh **Frank Plumpton Ramsey**. Permasalahan dari bilangan Ramsey ini adalah "untuk bilangan bulat positif m dan n, tentukan bilangan bulat positif terkecil sedemikian hingga untuk setiap graf G dengan p titik akan berlaku G memuat subgraf K_m dan $\overline{G}$ memuat subgraf K_n, sehingga G memuat m titik yang saling terhubung langsung atau n titik yang saling lepas [Chantrand dan Lesniak, 1986]. Bilangan Ramsey ini sangat menarik untuk dikaji karena di Indonesia masih jarang yang mengkaji tentang bilangan Ramsey. Dalam menentukan bilangan Ramsey pada graf ini akan menghasilkan teorema dan teorema tersebut perlu pembuktian. Pada penelitian ini akan dibahas tentang teknik menentukan bilangan Ramsey $r(m, n)$ dengan m dan n adalah 1, 2, dan 3.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, permasalahan dirumuskan sebagai berikut "bagaimana teknik menentukan bilangan Ramsey $r(m, n)$ dengan m dan n adalah 1, 2, dan 3".

1.3 Tujuan Penelitian

Agar pembahasan terfokus, maka tujuan dirumuskan sebagai berikut yaitu untuk menjelaskan teknik menentukan bilangan Ramsey $r(m, n)$ dengan m, dan n adalah 1, 2, dan 3.

1.4 Batasan Masalah

Teknik penentuan bilangan Ramsey $r(m, n)$ dibatasi pada $m = 1, 2, 3$. Sedangkan n dibatasi pada bilangan 1, 2, 3 saja.

1.5 Manfaat Penelitian

1. Skripsi Merupakan sarana untuk mengaplikasikan dan mengembangkan ilmu yang selama ini menjadi bidang minat yang dipelajari.
2. Kemudian skripsi ini juga sebagai wacana dan tambahan ilmu pengetahuan dibidang matematika, khususnya tentang bilangan Ramsey.

1.6 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini dimulai dari BAB I yang membahas tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penulisan, batasan masalah, manfaat penelitian dan sistematika penulisan. BAB II berisi tentang teori dasar yang digunakan pada bab selanjutnya. BAB III berisi tentang teknik menentukan bilangan Ramsey $r(m, n)$ dimana m dan n adalah 1, 2, dan 3. Sedangkan pada BAB IV berisi tentang kesimpulan dan saran mengenai tugas akhir ini.

BAB II

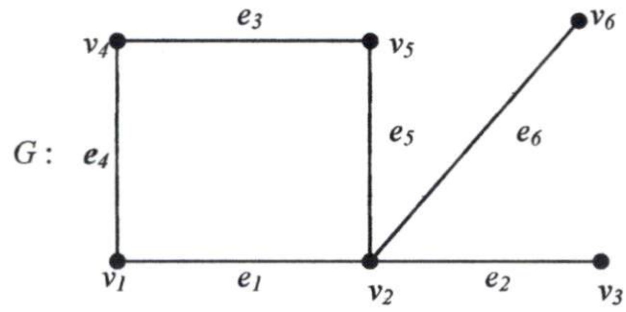
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi dan contoh yang berkaitan dengan penelitian ini, sehingga dapat mempermudah dalam hal memahami atau mengkaji hasil utama pada bab berikutnya.

2.1 Definisi dan Komponen Graf.

Graf G adalah pasangan (V, E) dengan V adalah himpunan yang tak kosong yang berhingga dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*) dan E himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik berbeda di G yang disebut sebagai **sisi**(*edge*). Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan disisi G dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di V disebut **order** dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut **ukuran** dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q saja. [Chantrand dan Lensik,1986: 4].

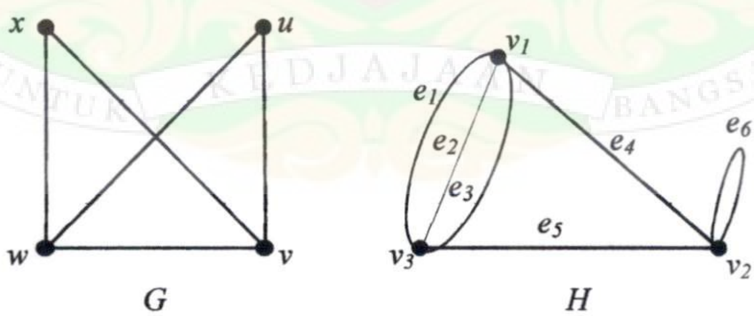
Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut **bertetangga** (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$. Sebagai contoh perhatikan gambar graf G berikut



Gambar 2.1.1 Graf G

Dari Gambar 2.1.1, diketahui titik v_1 dan v_2 bertetangga, demikian juga dengan v_1 dan v_4, v_2 dan v_3, v_2 dan v_5, v_2 dan v_6, serta v_4 dan v_5, sedangkan titik v_1 dan v_5 tidak bertetangga, demikian juga dengan v_2 dan v_4, v_4 dan v_3, serta v_1 dan v_6. Sisi e_1 terkait langsung dengan titik v_1 dan v_2, dan sisi e_2 terkait langsung dengan titik v_2 dan v_3. Satu sisi hanya dapat terkait langsung dengan dua titik yang berbeda. [Purwanto, 1998]

Jika banyaknya titik dan sisi di G berhingga, maka graf G disebut graf berhingga. Dua sisi atau lebih yang menghubungkan satu pasang titik disebut sisi rangkap (*multiple edge*). Suatu sisi yang titik ujungnya sama disebut *loop*. Graf dengan *loop* dan sisi rangkap disebut *mutltigraf*.



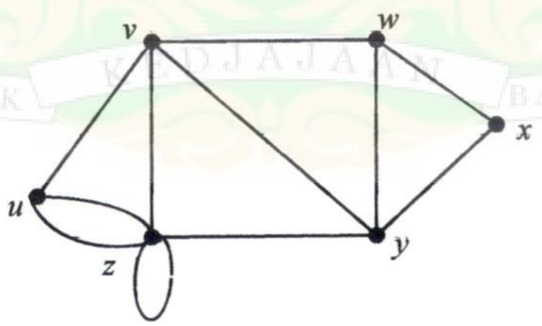
Gambar 2.1.2 Graf G dan *Multigraf* H

Pada Gambar 2.1.2 graf G adalah graf sederhana, karena tidak memuat sisi rangkap dan tidak memuat *loop*. Himpunan titik dan sisi dari graf G masing-masing adalah $V(G) = \{u,v,w,x\}$ dan $E(G) = \{uv, uw, vw, vx, wx\}$ dengan $|V(G)|$ = 4 dan $|E(G)|$ = 5. Derajat masing-masing titik adalah $d(u) = 2$, $d(v) = 3$, $d(w) = 3$, $d(x) = 2$. H adalah multigraf karena memuat sisi rangkap yaitu e_1, e_2, e_3 yang menghubungkan titik v_1 dan v_3 dan v_2 memuat *loop* e_6.

2.2 Graf Terhubung

Suatu *walk* atau jalan yang panjangnya p dalam graf G adalah urutan k sisi di G, yaitu $uv, uw, wx,..,yz$, dan *walk* ini dinotasikan dengan $uvwx...yz$, dan disebut *walk* antara u dan z. Titik kedua setiap sisi adalah sama dengan titik pertama sisi berikutnya. Semua titik dan sisi dalam *walk* tidak perlu berbeda (boleh sama).

Jika semua sisi suatu *walk* berbeda, maka *walk* ini disebut *trail*. Jika semua titiknya berbeda, maka *trail* ini disebut *path*. Suatu *walk* tertutup dalam graf G merupakan urutan sisi G berbentuk $uv, vw, wx,..,yz, zu$. Jika semua sisinya berbeda maka *walk* itu disebut *trail* tertutup, jika titik-titiknya juga berbeda maka *trail* itu disebut *sikel* (*cycle*).

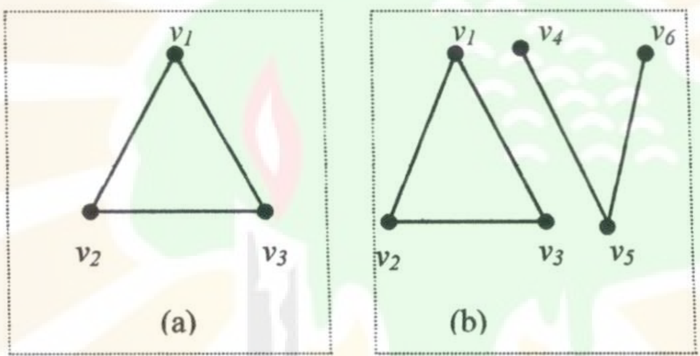


Gambar 2.2.1 Graf dengan *walk*, *path*, *trail* dan *cycle*

$uvwxywvzzy$ adalah *walk* antara u dan y. *Walk* $uvwxywvzzy$ adalah *trail* yang bukan *path* (karena titik y dan z ada dua), sedangkan pada *walk* $uwxyz$

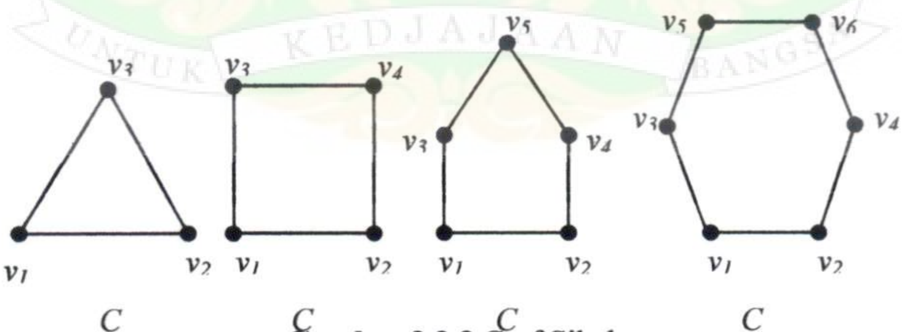
disebut *path* karena tidak ada titik yang diulang. *Walk* tertutup *uvwyvzu* adalah *trail* tertutup yang bukan *sikel* (karena titik *v* muncul dua kali), sedangkan *trail* tertutup *vwxyv* dan *vwxyzv* semua adalah *sikel*. [Wilson dan Watkins, 1990]

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G, maka titik u dan v dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan $u - v$ di G. Sedangkan suatu graf G dapat dikatakan terhubung, jika untuk setiap titik u dan v di G terhubung. Di bawah ini dapat melihat contoh gambar dari graf terhubung dan graf tak terhubung.



Gambar 2.2.2 (a) Graf Terhubung, (b) Graf tak-Terhubung

Graf *sikel* merupan graf yang terdiri dari sebuah sikel tunggal (Wilson R.J dan Watkins J.J, 1992]. Graf sikel dengan n titik dinotasikan dengan C_n, hal ini dapat dilihat pada Gambar 2.2.3.



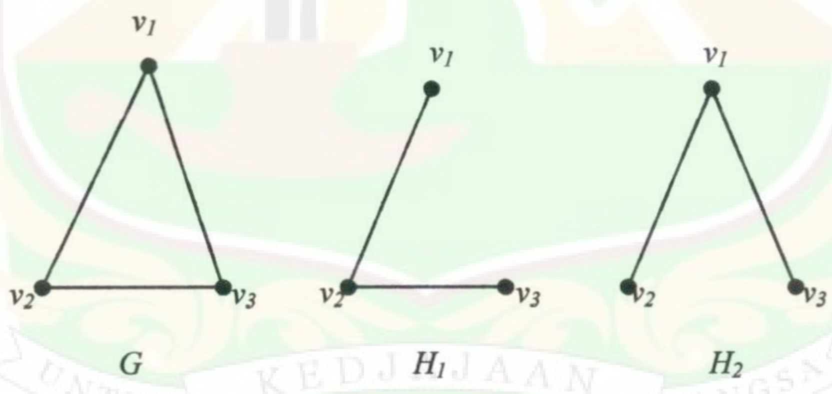
Gambar 2.2.3 Graf Sikel

Sebuah graf sikel C_n beraturan memiliki derajat 2 dan n sisi, untuk $n \geq 3$

2.3 Subgraf

Graf H disebut subgraf dari G jika himpunan titik di H adalah *subset* dari himpunan titik-titik di G, dan himpunan sisi-sisi di H adalah *subset* dari himpunan sisi di G, sehingga dapat ditulis $V(H) \subseteq V(G)$ *dan* $E(H) \subseteq E(G)$. Jika H adalah subgraf G, maka dapat ditulis $H \subseteq G$.

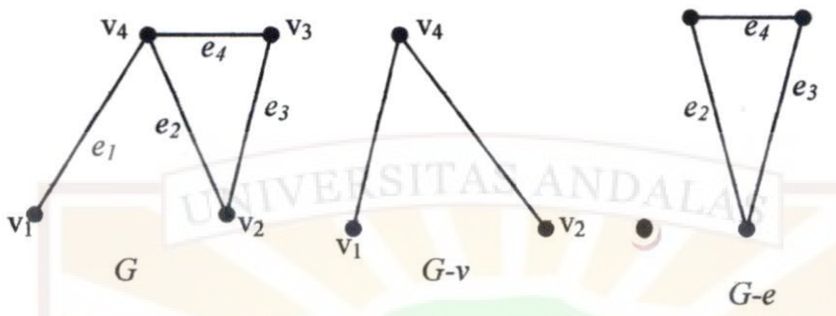
Suatu graf boleh tidak memuat sisi, tetapi minimal terdiri dari satu titik. Graf yang terdiri satu titik disebut graf *trivial*, sedangkan graf yang tidak memuat sisi disebut graf kosong. Misalkan G suatu graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Graf bagian (*subgraf*) dari G adalah suatu graf yang setiap titiknya adalah anggota $V(G)$ dan setiap sisinya adalah anggota $E(G)$. Jika H suatu graf bagian dari G dan $V(H) = V(G)$ maka H disebut graf bagian rentangan (*spanning subgraf*) dari G.



Gambar 2.3.1 Graf G dan Subgraf H_1 dan H_2

Pada Gambar 2.3.1, H_1 dan H_2 adalah graf bagian dari G karena untuk setiap titik $v \in V(H_1)$, maka $v \in V(G)$, dan untuk setiap $e \in E(H_1)$, maka $e \in E(G)$. Subgraf pada graf G dapat dibuat dengan menghilangkan titik atau sisi. Jika $v \in V(G)$ dan $|V(G)| \geq 2$ maka G-v menunjukkan subgraf dengan titik $V(G)$-$\{v\}$

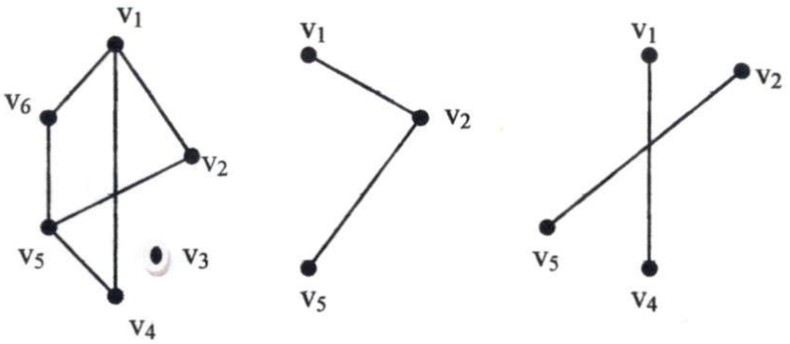
dan semua sisi di graf *G* yang tidak terhubung dengan *v*. Jika $e \in V(G)$, maka *G-e* adalah subgraf yang mempunyai titik *V(G)* dan sisi *E(G)*-{*e*}, seperti dapat dilihat pada Gambar 2.3.2.



Gambar 2.3.2 Graf *G* dengan subgraf *G-v*, dan *G-e*

Jika *u* dan *v* tidak bertetangga dengan suatu titik di graf *G*, maka *G + f*, dimana $f = uv$ ditunjukkan pada graf dengan titik *V(G)* dan sisi $E(G) \cup (f)$. Jadi $G \subseteq G + f$. Suatu graf *G-f* mempunyai titik yang sama di graf *G*, dan *G* mempunyai titik yang sama di graf *G + f*. Jika *H* subgraf dari graf *G* dan mempunyai order di *G*, maka *H* disebut *spanning* subgraf dari *G*.

Jika *U* adalah himpunan bagian yang tidak kosong dari titik *V(G)* di graf *G*, maka subgraf *(U)* dari *G* disebut subgraf terdukung oleh *U* yang mempunyai titik di *U* dan sisi yang terdiri dari sisi graf *G* yang terhubung dengan 2 elemen *U*. Subset sisi *G* dan tidak kosong, maka subgraf *F* adalah subgraf di *G* yang titiknya adalah himpunan titik-titik yang terkait langsung dengan sisi di *F*. *F* disebut subset terdukung sisi. Defenisi dari setiap subgraf di graf *G* dapat memuat dengan menghilangkan titik di *G*, maka subgraf di *G* dapat memuat dengan menghilangkan titik dan sisi. Konsep ini dapat digambarkan pada Gambar 2.3.3, untuk graf *G* dimana $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $U = \{v_1, v_2, v_5\}$ dan $F = \{v_1, v_4, v_2, v_5\}$.

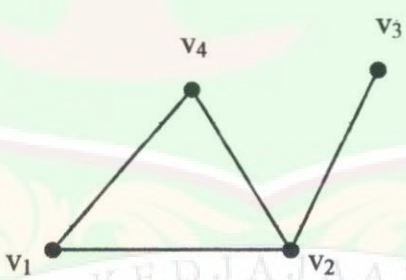


G (U) (F)

Gambar 2.3.3 Graf G, Subgraf terdukung (U), dan Subgraf Terdukung (F)

2.4 Derajat Suatu Titik

Misalkan G adalah suatu graf, dan v adalah suatu titik di G. Derajat v adalah banyaknya sisi yang terkait langsung pada v dan dinotasikan dengan $deg(v)$. Dengan kata lain jumlah sisi yang memuat v adalah titik ujung. Titik v dikatakan genap atau ganjil tergantung dari jumlah $deg(v)$ genap atau ganjil. [Chartrand dan Lesniak, 1986].



G

Gambar 2.4.1 Graf G dengan derajat titik

Dari Gambar 2.4.1 terlihat bahwa :

$$deg_G(v_1) = 2,\ deg_G(v_2) = 3,\ deg_G(v_3) = 1, \text{ dan } deg_G(v_4) = 2$$

Teorema 1 [Chartrand dan Lesniak, 1986: 7]

Jika G graf V(G) = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

Maka $\sum_{i=1}^{p} \deg_G(v_i) = 2q$

Bukti :

Setiap sisi terkait langsung dengan 2 titik jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali.

Akibat 1.

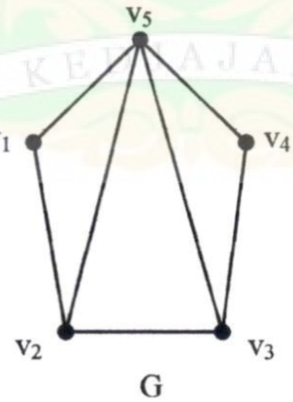
Pada sebarang graf, jumlah derajat titik ganjil adalah genap.

Bukti :

Misalkan graf G dengan ukuran q, maka ambil W yang memuat himpunan titik ganjil pada G serta U yang memuat himpunan titik genap di G. Dari Teorema 1 maka diperoleh :

$$\sum_{v \in v(G)} \deg_G v = \sum_{v \in W} \deg_G v + \sum_{v \in U} \deg_G v = 2q$$

Karena $\sum_{v \in U} \deg_G v$ genap, maka $\sum_{v \in W} \deg_G v$ juga genap, sehingga $|W|$ adalah genap.



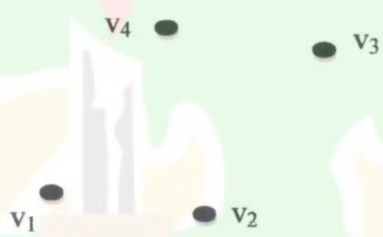
Gambar 2.4.2 Graf *G* dan derajat titik

Jumlah derajat seluruh titik pada Graf G pada Gambar 2.4.2 diatas adalah :

$$
\begin{aligned}
deg(v_1) + deg(v_2) + deg(v_3) + deg(v_4) + deg(v_5) &= 2 + 3 + 3 + 2 + 4 \\
&= 14 \\
&= 2 \text{ x jumlah sisi} \\
&= 2 \text{ x } 7 \\
&= 14
\end{aligned}
$$

2.5 Graf Kosong

Graf kosong (*null graph* atau *empty graph*) adalah graf yang hanya mempunyai himpunan titik minimal satu dan mempunyai himpunan sisi kosong. Graf kosong dengan **n** titik ditulis dengan N_n. [Munir, 2003: 302]



Gambar 2.5.1 Graf Kosong N_4

2.6 Graf Komplit

Graf komplit adalah graf sederhana yang setiap titiknya bertetangga ke semua titik lainnya. Graf komplit dengan *n* titik dilambangkan dengan K_n, setiap titik pada K_n berderajat n- 1 [Munir, 2003]. Gambar 2.6.1 memperlihatkan beberapa contoh graf komplit [Munir, 2003].

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas tentang teknik menentukan bilangan Ramsey $r(m, n)$ dimana m dan n adalah 1, 2, dan 3. Untuk menentukan bilangan Ramsey $r(m, n)$ maka akan dibatasi pada $m = 1, 2, 3$ dan $n = 1, 2, 3$ adalah bilangan asli.

3.1 Menentukan Bilangan Ramsey r(1, n) = r(n, 1) = 1

1. Untuk menenentukan $r(1, 1)$, maka dilakukan langkah-langkah sebagai berikut :

   Ambil $G = K_1$, maka $\overline{G} = \overline{K_1} = K_1$

   Perhatikan bahwa

   $G = \bullet$ $\qquad\qquad\qquad$ $\overline{G} = \bullet$

   Jadi G memuat K_1, atau $\overline{G}$ memuat K_1 sesuai dengan definisi bilangan Ramsey, maka $r(1, 1) = 1$

2. Untuk menentukan $r(1, 2)$, maka dilakukan langkah-langkah sebagai berikut :

   Ambil $G = K_1$, maka $\overline{G} = \overline{K_1} = K_1$

   Perhatikan bahwa

   $G = \bullet$ $\qquad\qquad\qquad$ $\overline{G} = \bullet$

   Jadi G memuat K_1 atau $\overline{G} = \overline{K_1} = K_1$ sesuai dengan definisi bilangan Ramsey, maka $r(1, 2) = 1$

3. Untuk menentukan $r(1, 3)$, maka dilakukan langkah-langkah sebagai berikut :

   Ambil $G = K_1$, maka $\overline{G} = \overline{K_1} = K_1$

Perhatikan bahwa

$G = \bullet$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\overline{G} = \bullet$

Jadi G memuat K_1, atau $\overline{G}$ memuat K_1 sesuai dengan definisi bilangan Ramsey, maka $r(1, 3) = 1$

4. Untuk menentukan $r(1, 4)$, maka dilakukan langkah-langkah sebagai berikut

   Ambil $G = K_1$, maka $\overline{G} = \overline{K_1} = K_1$

   Perhatikan bahwa

   $G = \bullet$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\overline{G} = \bullet$

   Jadi G memuat K_1, atau $\overline{G}$ memuat K_1 sesuai dengan definisi bilangan Ramsey, maka $r(1, 4) = 1$

5. Untuk menentukan $r(1, 5)$, maka dilakukan langkah-langkah sebagai berikut

   Ambil $G = K_1$, maka $\overline{G} = \overline{K_1} = K_1$

   Perhatikan bahwa

   $G = \bullet$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\overline{G} = \bullet$

   Jadi G memuat K_1, atau $\overline{G}$ memuat K_1 sesuai dengan definisi bilangan Ramsey, maka $r(1, 5) = 1$

6. Untuk menentukan $r(1, 6)$, maka dilakukan langkah-langkah sebagai berikut

   Ambil $G = K_1$, maka $\overline{G} = \overline{K_1} = K_1$

   Perhatikan bahwa

   $G = \bullet$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\overline{G} = \bullet$

   Jadi G memuat K_1, atau $\overline{G}$ memuat K_1 sesuai dengan definisi bilangan Ramsey, maka $r(1, 6) = 1$.

7. Untuk menentukan $r(1, 7)$, maka dilakukan langkah-langkah sebagai berikut

Ambil $G = K_1$, maka $\overline{G} = \overline{K_1} = K_1$

Perhatikan bahwa

$G = \bullet$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\overline{G} = \bullet$

Jadi G memuat K_1, atau $\overline{G}$ memuat K_1 sesuai dengan definisi bilangan Ramsey, maka $r(1, 7) = 1$

8. Untuk menentukan $r(1, 8)$, maka dilakukan langkah-langkah sebagai berikut

Ambil $G = K_1$, maka $\overline{G} = \overline{K_1} = K_1$

Perhatikan bahwa

$G = \bullet$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\overline{G} = \bullet$

Jadi G memuat K_1, atau $\overline{G}$ memuat K_1 sesuai dengan definisi bilangan Ramsey, maka $r(1, 8) = 1$

9. Untuk menentukan $r(1, 9)$, maka dilakukan langkah-langkah sebagai berikut

Ambil $G = K_1$, maka $\overline{G} = \overline{K_1} = K_1$

Perhatikan bahwa

$G = \bullet$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\overline{G} = \bullet$

Jadi G memuat K_1, atau $\overline{G}$ memuat K_1 sesuai dengan definisi bilangan Ramsey, maka $r(1, 9) = 1$.

10. Untuk menentukan $r(1, 10)$, maka dilakukan langkah-langkah sebagai berikut

Ambil $G = K_1$, maka $\overline{G} = \overline{K_1} = K_1$

Perhatikan bahwa

$G = \bullet$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\overline{G} = \bullet$

Jadi G memuat K_1, atau $\overline{G}$ memuat K_1 sesuai dengan definisi bilangan Ramsey, maka $r(1, 10) = 1$.

Dari beberapa contoh di atas, diperoleh bahwa :

$r(1, 1) = 1$	$r(1, 3) = 1$	$r(1, 5) = 1$	$r(1, 7) = 1$	$r(1, 9) = 1$
$r(1, 2) = 1$	$r(1, 4) = 1$	$r(1, 6) = 1$	$r(1, 8) = 1$	$r(1, 10) = 1$

Dari data-data di atas maka terlihat bahwa $r(1, 10) = 1$, sehingga menghasilkan teorema $r(1, n) = 1$

Teorema 3.1.1

Bilangan Ramsey $r(1, n) = 1$ *untuk n bilangan bulat positif*

Bukti :

$r(1, n) = 1$, karena setiap graf G hanya berorder 1,

maka G memuat K_1 atau $\overline{G}$ memuat K_n.

3.2 Menentukan Bilangan Ramsey r(2, n) = r(n, 2)

Cara untuk menentukan $r(2, n)$, maka dilakukan beberapa langkah sebagai berikut :

1. Menentukan $r(2, 1) = 1$

   Karena $r(1, 2) = r(2, 1) = 1$, ini berlaku untuk setiap graf G berorder 1, maka G dan $\overline{G}$ memuat K_1.

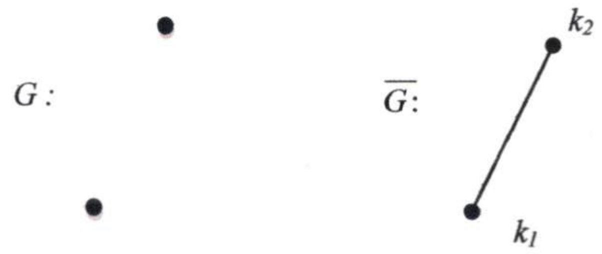
2. Menentukan $r(2, 2) = 2$

   Karena K_1 dan $\overline{K_1}$ tidak memuat K_2 sebagai subgraf, maka $r(2, 2) \geq 2$.

   Misalkan G sebarang graf berorder 2.

   Jika G tidak terhubung, maka $\overline{G}$ adalah K_2.

   Sebagai contoh dapat dilihat pada gambar di bawah ini :

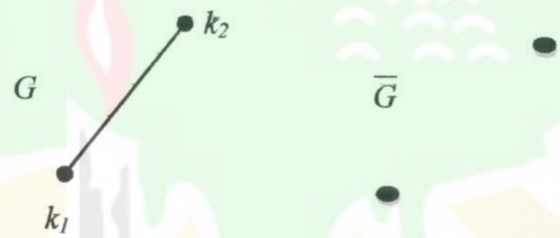


Gambar 3.2.1 Graf G dan Graf $\overline{G}$ (k_1, k_2)

Dari gambar di atas terlihat bahwa $\overline{G}$ adalah K_2.

Jadi $\overline{G}$ memuat K_2 sebagai subgraf.

Jika G terhubung, maka G memuat K_2 seperti pada gambar di bawah ini.



Gambar 3.2.2 Graf G (k_1, k_2) dan $\overline{G}$

Sehingga $r(2, 2) \leq 2$

Karena $r(2, 2) \geq 2$ dan $r(2, 2) \leq 2$, maka nilai dari $r(2, 2) = 2$.

3. Menentukan r(2, 3) = 3

Misalkan $r(2, 3) = m$, ini berarti setiap graf di G berorder m sehingga graf G memuat K_3 atau $\overline{G}$ memuat K_2.

Tetapi dalam hal ini $m \neq 2$, sebab jika graf $G = 2$ maka $\overline{G} = K_2$. Sebagai contohnya dapat dilihat pada gambar di bawah ini.

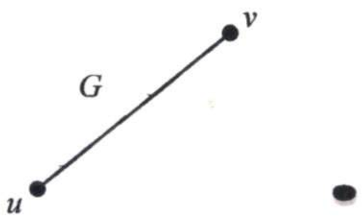
Gambar 3.2.3 Graf G dan Graf $\overline{G}$ (k_1, k_2)

Dari gambar di atas terlihat jelas bahwa graf G tidak memuat K_2 dan $\overline{G}$ tidak memuat K_3, sehingga $r(2, 3) \geq 3$.

Misalkan G sebarang graf berorder 3, jika G adalah sebuah graf kosong maka $\overline{G} = K_3$, hal ini terlihat pada gambar berikut :

Gambar 3.2.4 Graf G dan Graf $\overline{G}$ (k_1, k_2, k_3)

Dari gambar di atas terlihat bahwa $\overline{G} = K_3$, ini berarti $\overline{G}$ memuat K_3 sebagai subgraf. Jika G bukanlah sebuah graf kosong, maka minimal ada satu sisi di G yang disebut uv. Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar berikut ini :



Gambar 3.2.5 Graf G dengan sisi u,v

Karena G bukan sebuah graf kosong, maka G memuat K_2 sebagai subgraf, sehingga diperoleh $r(2, 3) \leq 3$.

Karena $r(2, 3) \geq 3$ dan $r(2, 3) \leq 3$, maka menghasilkan $r(2, 3) = 3$.

Dari beberapa contoh di atas, maka dapat disimpulkan bahwa :

$r(2,\ 1) = 1$

$r(2,\ 2) = 2$

$r(2,\ 3) = 3$

Dari kesimpulan di atas, maka terlihat jelas bahwa $r(2, n) = r(n, 2) = n$ sehingga menghasilkan teorema $r(2, n) = n$.

Teorema 3.2.1

Bilangan Ramsey $r(2, n) = n,\ \forall n \in N$

Bukti :

Miasalkan G sebagai subgraf berorder n,

Jika G adalah sebuah graf kosong, maka $\overline{G} = K_n$, jadi $\overline{G}$ memuat K_n sebagai subgraf. Untuk lebih jelas perhatikan Gambar 3.2.6 berikut ini.

Gambar 3.2.6 Graf kosong G dan Graf $\overline{G}$ (K_n)

Jika G bukan sebuah graf kosong, maka minimal ada satu sisi di G, yaitu uv. Jadi G memuat K_n sebagai subgraf. Ini terlihat seperti pada gambar berikut :

Gambar 3.2.7 Graf G dengan sisi u,v.

Dari bukti diatas, maka dapat disimpulkan bahwa :

$r(2, n) = r(n, 2) = n.$

3.3 Menentukan Bilangan Ramsey r(3, n), untuk n = 1, 2, 3,

Untuk menentukan $r(3, n)$, maka akan dilakukan beberapa langkah pembuktian sebagai berikut :

1. Akan dibuktikan nilai dari $r(3, 1) = 1$

   Untuk membuktikan nilai $r(3, 1) = 1$ ini, telah diperoleh dari $r(1, 3) = r(3, 1) = 1$.

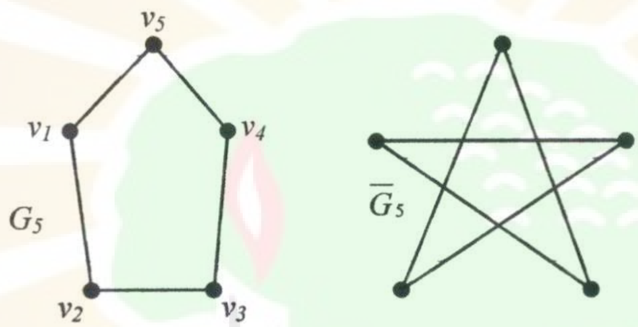
2. Akan dibuktikan nilai dari $r(3, 2) = 3$

Untuk membuktikan nilai $r(3, 2) = 3$ ini, telah diperoleh dari $r(2, 3) = r(3, 2) = 3$.

3. Akan dibuktikan nilai dari $r(3, 3) = 6$.

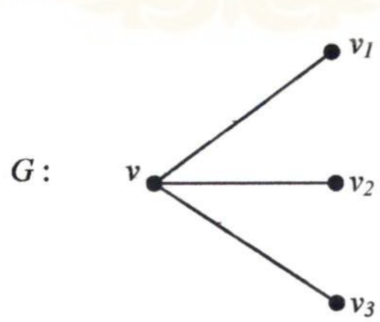
Bukti :

Untuk membuktikan nilai dari $r(3, 3) = 6$, maka perhatikan gambar graf G dan $\overline{G}_5$ berikut ini :



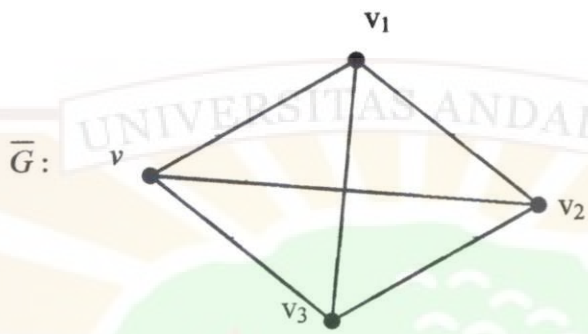
Gambar 3.3.1 Graf G_5 dan Graf $\overline{G}_5$

Karena G_5 dan $\overline{G}_5$ pada gambar diatas tidak memuat K_3, maka $r(3, 3) \geq 6$. Misalkan G sebarang graf berorder 6 dan v dititik G, maka v harus terkait langsung minimal tiga sisi di G atau tiga sisi di $\overline{G}$. Misalkan vv_1, vv_2, dan vv_3 adalah sisi-sisi yang terdapat di graf G, dengan kata lain v_1, v_2, dan v_3 terhubung langsung di graf G. Ini terlihat seperti pada gambar berikut ini :



Gambar 3.3.2 Graf G dengan sisi (vv_1, vv_2, vv_3)

Jika v_1v_2, v_1v_3, dan v_2v_3 adalah sisi-sisi di graf G, maka graf G memuat K_3 sebagai subgraf. Sebaliknya jika v_1v_2, v_1v_3, dan v_2v_3 bukan sisi-sisi di graf G, maka v_1, v_2, v_3 terhubung langsung di $\overline{G}$, jadi $\overline{G}$ memuat K_3 sebagai subgraf. Untuk lebih jelas perhatikan gambar graf berikut :



Gambar 3.3.3 Graf $\overline{G}$ dengan sisi v_1, v_2, v_3

Karena v_1, v_2, v_3 terhubung langsung di graf $\overline{G}$, maka $\overline{G}$ memuat K_3 sebagai subgraf, maka didapatkan nilai dari $r(3, 3) \leq 6$.

Karena $r(3, 3) \geq 6$ dan $r(3, 3) \leq 6$, maka dapat disimpulkan bahwa nilai dari bilangan Ramsey $r(3, 3) = 6$.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan pada bab III sebelumnya, maka penulis menarik beberapa kesimpulan tentang langkah-langkah menentukan bilangan Ramsey $r(m, n)$ dimana m dan n adalah 1, 2, dan 3.

1. Untuk menentukan bilangan Ramsey harus melalui contoh-contoh (perhitungan dan gambar graf).
2. Mencari pola bilangan Ramsey.
3. Menyatakan pola tersebut sebagai teorema dan membuktikan teorema tersebut.

Berdasarkan langkah-langkah di atas, diperoleh kesimpulan bahwa :

a. Bilangan Ramsey $r(1, n) = r(n, 1) = 1$

b. Bilangan Ramsey $r(2, n) = r(n, 2) = n$

c. Bilangan Ramsey $r(3, 3) = 6$.

4.2. Saran

Untuk penenlitian selanjutnya, penulis menyarankan agar mengembangkan metode-metode teknik penentuan bilangan Ramsey ini dalam bentuk graf-graf lainnya. Penulis juga menyarankan untuk pembahas selanjutnya agar menerapkan metode bilangan Ramsey ini pada bidang studi lain yang berkaitan dengan teori graf dan matematika diskrit.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Baskoro, Edy T. dan Imron, C. 2005. *Bilangan Ramsey Sisi dari $r(P_3,P_n)$*. Departemen Matematika FMIPA ITB.

[2] Chartrand, Gary dan Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Diagraphs*. California: Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & softwere.

[3] Greenwod R. E. dan Gleason A. M. 1955. *Combinatorial Relations and Chromatic Graph*. Canadian Journal of Mathematics.

[4] Grinstead C. dan Roberts S. 1982. *On the Ramsey Numbers* $R(3, 8)$ and $R(3, 9)$. Journal of Combinatorial Theory.

[5] Kalbfleish J. G. 1965. *Constructions of Special Edge-Chromatic graph*. Canadian Mathematical Bulletin.

[6] Kéry G. 1964. *On a Theorem of Ramsey* (*in hungarian*). Matematikai Lapok.

[7] McKay B. D dan Radziszowski S.P. 1995. R(4, 5) = 25, *Journal of Graph Theory.*

[8] Munir, Rinaldi. 2003. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika.

[9] Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: Institut Keguruan dan Ilmu Pendidikan Malang.

[10] Surahmat. 2003. *Bilangan Ramsey Untuk Graph Roda*. Departemen Matematika FMIPA ITB.

[11] Wilson, R.J. & Watkin, J.J. 1990. *Graph and Introductory Approach a Firs Course in Discrate Mathematics*. Canada: John Wiley and Sons, Inc.

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis lahir di Gunungsitoli pada tanggal 01 Agustus 1988, anak ke-2 dari empat bersaudara, dan dari ayah yang bernama Fiktorianus Zalukhu dengan ibu bernama Yuniamin Hulu. Penulis menamatkan Sekolah Dasar pada tahun 2001 di SD Negeri 070979 Sifalaete Kec. Gunungsitoli, kemudian pada tahun 2004 penulis menyelesaikan Pendidikan Lanjutan Tingkat Pertama di SMP Negeri 5 Gunungsitoli, pada tahun 2007 penulis menyelesaikan Pendidikan Lanjutan Tingkat Atas di SMA Negeri 1 Gunungsitoli. Pada tahun 2007, penulis diterima sebagai Mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan IPA Universitas Andalas Padang melalui jalur Beasiswa Program *Basic Science* guru berasrama Dikti Pusat. Selama menjadi mahasiswa, penulis aktif dalam kegiatan BEM KM UNAND (BPU KM UNAND).