PEMANGKATAN PADA MATRIK BUJURSANGKAR

SKRIPSI

SUTRI YOGI
07134060

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG,
2011

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah segala puji bagi Allah SWT atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul : **"PEMANGKATAN PADA MATRIK BUJUR SANGKAR".**

Skripsi ini disusun bertujuan untuk memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (Strata 1) di jurusan matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas, Padang.

Dengan selesainya skripsi ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada pihak – pihak yang telah membantu penulis dalam penyelesaian naskah ini :

1. Ayahanda Gapur Ali dan Ibunda Eri Yati selaku orang tua penulis yang selalu mendo'akan dan mengajari penulis tentang apa itu perjuangan.
2. Tuti susianti dan lesti haryani selaku saudara kandung, yang telah mengajari aku untuk menjadi kakak yang bertanggung jawab.
3. Bapak Dr. Syafrisal Sy selaku Ketua Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Andalas.
4. Bapak Prof. Dr I Made Arnawa, M.Si selaku pembimbing I sekaligus koordinator Basic Science yang telah mengarahkan dan membimbing serta memberi motivasi dan mengajari kedisiplinan kepada penulis, sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
5. Bapak Budi Rudianto, M.Si dan Narwen, M.Si yang telah bersedia menguji sekaligus membimbing untuk perbaikan skripsi ini.
6. Ketua dan staf perpustakan FMIPA Universitas Andalas.

7. Dosen dan staf jurusan matematika Universitas Andalas yang telah membantu penyelesaian skripsi ini.
8. Rekan-rekan dari Basic Science terutama Rodi Virwiro, Agus Miyanto, Andris, Markas, Subrata, Desi Yana, Septi, Elva, Ila, Maria Susanti, Suji Astuti, Binti Sholekhah, Dodi dan yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, terima kasih

   telah membantu penulis selama penyusunan skripsi ini.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat beserta karunia-Nya kepada semua pihak baik yang membantu maupun telah memberi support dan motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Mungkin dalam penulisan banyak terdapat kesalahan yang tidak penulis ketahui, karena kesalahan adalah kekurangan penulis, maka dari itu penulis sangat mengharapkan perbaikan dan kritik terhadap isi skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat membantu dan bermanfaat.

Padang, juli 2011

Sutri Yogi

ABSTRAK

Pemangkatan pada matrik sering dilakukan dengan mengalikan matrik tersebut berulang ulang, yaitu $A^m = A \times A \times A \ldots \times A$ sebanyak m kali dengan m bilangan asli, sehingga cukup sulit jika harus mengalikan matrik A berkali-kali, apalagi jika matrik berukuran besar. Jika matriks bujur sangkar A adalah matriks yang dapat didiagonalkan maka A^m dapat dinyatakan dengan $A^m = P^{-1}D^mP$, dimana P adalah matriks bujur sangkar yang kolom vektornya terdiri dari vektor eigen yang bebas linear dari matriks A dan D adalah matriks diagonalisasi dari A.

Kata kunci : **Matrik bujursangakar, diagonalisasi, determinan.**

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar linear merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika yang aplikasinya banyak di pakai diberbagai ilmu terapan. Matrik merupakan salah satu bagian dari aljabar linear. Apabila A adalah suatu matriks bujursangkar $n \times n$ dan m adalah bilangan bulat positif maka A^m didefinisikan sebagai $A \times A \times .. \times A$ sebanyak m kali (Anton, 1990). Coba bayangkan betapa sulitnya jika memangkatkan matrik A dengan mengalikan matrik A berkali-kali dengan bilangan bulat yang cukup besar, maka dari itu membutuhkan formula yang lebih sederhana sehingga penyelsaiannya lebih mudah dan efisien.

Apabila A adalah matrik diagonal $n \times n$ maka dapat ditunjukkan bahwa,

$A^m = \begin{bmatrix} {a_1}^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & {a_2}^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & {a_m}^m \end{bmatrix}$, m adalah suatu bilangan bulat positif. Jika A matrik bujur sangkar $n \times n$ yang bukan matrik diagonal, maka matrik A dapat dijadikan matrik diagonal melalui operasi-operasi tertentu.

Salah satu cara untuk menyelesaikan masalah matrik yang bukan matrik diagonal yaitu dengan diagonalisasi matrik bujursangkar, yaitu dengan mencari matrik diagonal dari matrik A sehingga didapat bentuk $A^m = PD^mP^{-1}$ dengan m bilangan bulat positif , D adalah matriks diagonal yang berisi nilai eigen dari matrik A, P adalah matrik tak singular, dimana posisi kolom yang terdiri dari vektor eigen

$p_1, p_2,\ldots,p_n$ yang bebas linear dari matrik A. Telah diberikan karakterisasi dan cara-cara untuk mendiagonalisasikan matriks bujursangkar $n \times n$. Karakterisasi tersebut adalah matriks bujursangkar $n \times n$ dapat dididiagonalkan jika dan hanya jika A mempunyai n vektor eigen yang bebas linear. Jadi apabila matriks bujursangkar A dapat didiagonalkan maka A^m dapat dihitung dengan menggunakan sifat diagonal dari matrik A. Pada skripsi ini akan ditunjukkan bahwa cara menentukan A^m pada matrik yang dapat didiagonalkan.

1.2 **Perumusan masalah**

Dari latar belakang diatas, masalah yang dibahas adalah bagaimana cara menyatakan pemangkatan matrik bujursangkar pada matrik bujursangkar yang dapat didiagonalkan.

1.3 **Pembatasan Masalah**

Dalam pembahasan ini penulis membataskan masalah ini pada matrik bujur sangkar yang dapat didiagonalkan.

1.4 Manfaat Penulisan

Penulisan ini diharapkan dapat memberikan manfaat pada pengetahuan dan ilmu tentang pemangkatan matrik bujursangkar. Dapat memberikan manfaat khususnya matrik yang dapat didiagonalkan.

1.5 Tujuan Penulisan

Penelitian ini bertujuan untuk memudahkan dalam proses penghitungan hasil pemangkatan matrik bujur sangkar terhadap bilangan bulat positif yang cukup besar.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas beberapa konsep dasar dan teorema - teorema penting yang digunakan untuk pembahasan masalah pemangkatan matrik pada matrik bujursangkar.

2.1 Ruang vektor, subruang, basis, dan dimensi pada ruang vektor.

Defenisi 2.1.1 (Anton dan Rorres, 1990)

Suatu ruang vektor V atas lapangan F adalah himpunan V, yang unsur-unsurnya disebut vektor - vektor, **0** disebut vektor nol, bersama dengan operasi biner penjumlahan (+) dan perkalian (.) dengan semua skalar r dan s yang memenuhi :

a. Untuk setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ berlaku,

   a) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$,

   b) $\mathbf{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$,

   c) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$,

   d) $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$.

b. Untuk semua $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ dan untuk setiap $r, s \in F$ berlaku,

   a) $r.\boldsymbol{v} \in V$,

   b) $1.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$,

   c) $0.\boldsymbol{v} = 0$,

   d) $r.(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = r.\boldsymbol{u} + r.\boldsymbol{v}$,

   e) $(r + s).\boldsymbol{v} = r.\boldsymbol{v} + s.\boldsymbol{v}$,

   f) $r.(s.\boldsymbol{v}) = (r.s).\boldsymbol{v}$.

Contoh 2

Buktikan bahwa $R^2 = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) | \boldsymbol{x} \in R, \boldsymbol{y} \in R\}$, merupakan ruang vektor atas lapangan *R*.

Bukti

Misalkan $\boldsymbol{u} = (x_1, y_1)$, $\boldsymbol{v} = (x_2, y_2)$ dan $\boldsymbol{w} = (x_3, y_3) \in R$ akan di buktikan bahwa $R^2 = \{(x, y) | \boldsymbol{x} \in R,\ \boldsymbol{y} \in R\}$ memenuhi sifat-sifat ruang vektor.

a) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

Perhatikan bahwa,

$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$

$= (x_1 + x_2), (y_1 + y_2)$

$= (y_1 + x_1, y_2 + x_2)$

$= (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$

$= \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (terbukti)

b) $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$

Perhatikan bahwa,

$\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (x_1, y_1) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)]$

$= (x_1, y_1) + [(x_2 + x_3), (y_2 + y)]$

$= (x_1 + x_2 + x_3), (y_1 + y_2 + y_3)$

$= [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3)$

$= (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$ (terbukti)

c) ada elemen $\mathbf{0}$ di V sehingga $\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u}$

Perhatikan bahwa,

$$\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = (x_1, y_1) + (0, 0)$$

$$= (x_1 + 0,\ y_1 + 0)$$

$$= \boldsymbol{u} \text{ (terbukti)}$$

d) Ada elemen $\boldsymbol{u}^{-1} \in V$ sehingga $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^{-1} = \mathbf{0}$

Perhatikan bahwa,

$$\boldsymbol{u} = (x_1, y_1)$$

$$\boldsymbol{u}^{-1} = -(x_1, y_1)$$

$$= (-x_1, -y)$$

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^{-1} = (x_1, y_1) + (-x_1, y_1)$$

$$= (x_1 + (-x_1)), (y_1 + (-y_1))$$

$$= (0, 0)$$

$$= \mathbf{0} \text{ (terbukti)}$$

e) $r.(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = r.\boldsymbol{u} + r.\boldsymbol{v}$

Perhatikan bahwa,

$$r.(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = r.((x_1, y_1) + (x_2, y_2))$$

$$= r.((x_1 + y_1), (x_2 + y_2))$$

$$= r.(x_1 + x_2), r(y_1 + y_2)$$

$$= (r.\,x_1 + r.\,x_2, r.\,y_1 + r.\,y_2)$$

$$= (r., x_1 r.\,y_1) + (r.\,x_2, r.\,y_2)$$

$$= r.(x_1, y_1) + r(x_2, y_2)$$

$$= r.\boldsymbol{u} + r.\boldsymbol{v} \text{ (terbukti)}$$

f) $(r + s).\boldsymbol{u} = r.\boldsymbol{u} + s.\boldsymbol{u}$

Perhatikan bahwa,

$(r + s).\boldsymbol{u} = (r + s)(x_1 + y_1)$

$= r. (x_1 + y_1) + s .(x_1 + y_1)$

$= r.\boldsymbol{u} + s.\boldsymbol{u}$ (terbukti)

g) $r.(s.\boldsymbol{u}) = (r.s).\boldsymbol{u}$

Perhatikan bahwa,

$r.(s.\boldsymbol{u}) = r.(s.(x_1 + y_1))$

$= (r.s.(x_1 + y_1))$

$= r.s.(x_1 + y_1)$

$= (r.s).\boldsymbol{u}$ (terbukti)

h) $1.(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u})$

Perhatikan bahwa,

$1. (\boldsymbol{u}) = 1.(x_1 + y_1)$

$= (1. x_1 + 1. y_1)$

$= (x_1 + y_1)$

$= \boldsymbol{u}$ (terbukti)

Jadi $R^2 = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) | \boldsymbol{x} \in R, \boldsymbol{y} \in R\}$, merupakan ruang vektor.

Definisi 2.1.2 (Jacob, 1990)

Misalkan V ruang vektor atas lapangan F, $U \subseteq V$ dan $U \neq \emptyset$. U disebut subruang dari V, jika U membentuk ruang vektor atas lapangan F terhadap operasi penjumlahan (+) dan perkalian (.) di V.

Lemma 2.1.3 (Jacob, 1990)

Misalkan V ruang vektor atas lapangan F, $U \subseteq V$ dan $U \neq \emptyset$, U subruang dari V jika dan hanya jika,

1. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$, maka $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$,
2. $k \in F$ dan $\boldsymbol{u} \in U$, maka $k.\boldsymbol{u} \in U$.

Bukti

($\Longrightarrow$) Misalkan U subruang dari V.

Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$ dan $k \in F$ berlaku,

1. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$,
2. $k.\boldsymbol{u} \in U$.

Ambil $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$ dan $k \in F$

karena U subruang dari V maka menurut definisi 2.1.2 U membentuk ruang vektor atas lapangan F. Karena U ruang vektor, maka berlaku,

1. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$ (U tertutup pada penjumlahan),
2. $k\boldsymbol{u} \in U$ (U terutup pada perkalian).

($\Longleftarrow$) Misalkan V ruang vektor atas lapangan F, $U \subseteq V$ dan $U \neq \emptyset$

Ambil $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$ dan $k \in F$, berlaku :

1. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$.. (2.1.1)
2. $k.\boldsymbol{u} \in U$..(2.1.2)

Akan di tunjukkan bahwa U subruang dari V, yaitu :

1. Untuk setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in U$, berlaku,

a. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$

Ambil $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$. Akan ditunjukkan $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$ pernyataan ini di jamin oleh persamaan (2.1.1)

b. $0 + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

Ambil $\boldsymbol{v} \in U$ dan $0 \in F$, maka berdasarkan persamaan (2.1.2)

$0.\boldsymbol{v} = 0 \in$ U sehingga menurut persamaan (2.1.1)

$0 + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

c. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

Ambil $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$. akan ditunjukkan $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

karena $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$, $U \subseteq V$ dan V ruang vektor maka $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

d. $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$

Ambil $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in U$ akan ditunjukkan $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$

karena $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in U$, $U \subseteq V$ dan V ruang vektor,

maka $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$

2. Untuk setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$ dan $r, s \in F$, berlaku

a. $\boldsymbol{k.u} \in U$

Ambil $u \in U$ dan $k \in F$. Akan ditunjukkan $k\boldsymbol{u} \in U$. Dijamin oleh persamaan (2.1.1)

b. $\boldsymbol{u}.1 = \boldsymbol{u}$

Ambil $\boldsymbol{u} \in U$ dan $1 \in F$. Akan ditunjukkan $\boldsymbol{u}.1 = \boldsymbol{u}$

karena $\boldsymbol{u} \in U$, $U \subseteq V$ dan V ruang vektor, maka $\boldsymbol{u}.1 = \boldsymbol{u}$

c. $0.\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

Ambil $\boldsymbol{u} \in U$ dan $0 \in F$. Akan ditunjukkan $0.\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

karena $\boldsymbol{u} \in U$, $U \subseteq V$ dan V ruang vektor, maka $0.\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

d. $r.(\boldsymbol{u} + v) = r.\boldsymbol{u} + r.v$

Ambil $\boldsymbol{u}, v \in U$ dan $r \in F$. Akan ditunjukkan $r.(\boldsymbol{u} + v) = r.\boldsymbol{u} + r.v$

karena $\boldsymbol{u}, v \in U$, $U \subseteq V$ dan V ruang vektor, maka $r.(\boldsymbol{u} + v) = r.\boldsymbol{u} + r.v$

e. $\boldsymbol{u}.(r + s) = \boldsymbol{u}.r + \boldsymbol{u}.s$

Ambil $\boldsymbol{u} \in U$ dan $r, s \in F$. Akan ditunjukkan $\boldsymbol{u}.(r + s) = \boldsymbol{u}.r + \boldsymbol{u}.s$

karena $\boldsymbol{u} \in U$ dan $r, s \in F$, $U \subseteq V$ dan V ruang vektor, maka

$\boldsymbol{u}.(r + s) = \boldsymbol{u}.r + \boldsymbol{u}.s$

f. $r.(s.\boldsymbol{u}) = (r.s).\boldsymbol{u}$

Ambil $\boldsymbol{u} \in U$ $r, s \in F$. Akan ditunjukkan $r.(s.\boldsymbol{u}) = (r.s).\boldsymbol{u}$

karena $\boldsymbol{u} \in U$ dan $r, s \in F$, $U \subseteq V$ dan V ruang vektor, maka

$r.(s.\boldsymbol{u}) = (r.s).\boldsymbol{u}$

Contoh 2

Buktikan bahwa $U = \{(x, 2x),\ x \in R\}$ subruang dari R^2

Bukti

1. Ambil $\boldsymbol{u} = (x_1, 2x_1)$ dan $\boldsymbol{v} = (x_2, 2x_2)$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$. akan ditunjukkan $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$

   Perhatikan bahwa,

   $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (x_1, 2x_1) + (x_2, 2x_2)$

   $= (x_1 + x_2), 2(x_1 + x_2)$

   $= (x_3, 2x_3)$ dengan $x_3 = (x_1, x_2)$, untuk suatu $x_3 \in R$

2. Ambil $\boldsymbol{u} = (x_1, 2x_1)$ dan $k \in F$. Akan ditunjukkan $k\boldsymbol{u} \in U$

   Perhatikan bahwa,

   $k.\boldsymbol{u} = k(x_1, 2x_1)$

   $= (kx_1, 2kx_1)$

$= (x_2, 2x_2)$ dengan $x_2 = kx_1$, untuk suatu $x_2 \in R$

Karena (1) dan (2) terpenuhi maka U subruang dari R^2.

Definisi 2.1.4 (Jacob, 1990)

Misalkan V ruang vektor atas lapangan F, $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$ dan $w \in V$ disebut kombinasi linear dari vektor – vektor $v_1, v_2, \ldots, v_r$, jika dapat dinyatakan dalam bentuk $w = k_1v_1 + k_2v_2 +, \ldots, k_rv_r$, dimana $k_1, k_2, \ldots, k_r$ adalah skalar.

Contoh 3

Misalkan vektor – vektor $\boldsymbol{u} = (1,2,-1)$ dan $\boldsymbol{v} = (6,4,2)$ di R^3. Tunjukkan bahwa

$\boldsymbol{w} = (9,2,7)$ adalah kombinasi linear dari $\boldsymbol{u} = (1,2, -1)$ dan $\boldsymbol{v} = (6,4,2)$

Misalkan $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in R^3$ dan k_1, k_2 skalar.

Akan diperiksa bahwa $\boldsymbol{w} = k_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2$

maka $(9,2,7) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$

$= (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$

Sehingga diperoleh,

$k_1 + 6k_2 = 9$

$2k_1 + 4k_2 = 2$

$-k_1 + 2k_2 = 7$

Dengan mensubtitusikan ketiga persamaan diatas kita peroleh $k_1 = -3$, $k_2 = 2$. Karena $\boldsymbol{w} = k_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2$ maka $\boldsymbol{w}$ kombinasi linear terhadap $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$.

Definisi 2.1.5 (Anton, 1991)

Misalkan V ruang vektor atas lapangan F dan $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dapat dinyatakan kombinasi linear dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pernyataan ini disebut sebagai

span$(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Definisi 2.1.6 (Anton dan Rorres, 1994)

Misalkan V ruang vektor atas lapangan F dan $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ dikatakan bebas linear jika terdapat skalar $r_1, r_2, \ldots, r_n$ dan $r_1\boldsymbol{v}_1 + r_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + r_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ hanya dipenuhi oleh $r_1 = 0, r_2 = 0, \ldots, r_n = 0$. Jika $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ tidak bebas linear, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ dikatakan bergantung linear.

Contoh 4

Misalkan $V = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ adalah vektor – vektor di R^2, apakah V bebas linear ?

Jawab

Misalkan $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ dan $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in R^2$

Pandang kombinasi linear $r_1\boldsymbol{v}_1 + r_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$, maka

$r_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + r_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, diperoleh:

$r_1 - r_2 = 0$ dan……………………………………………………………………(2.1.3)

$r_1 + r_2 = 0$………………………………………………………………………(2.1.4)

dengan mensubtitusikan persamaan (2.1.3) dan persamaan (2.1.4), sehingga

$2r_1 = 0$ atau $r_1 = 0$…………………...……………………………………..(2.1.5)

Dari persamaan (2.1.3) dan (2.1.5) diperoleh,

$r_1 = 0$, maka kombinasi linear hanya di peroleh $r_1 = 0$ dan $r_2 = 0$.

Jadi $\boldsymbol{v}_1$ dan $\boldsymbol{v}_2$ bebas linear.

Lemma 2.1.7 (Wijayanti, 1997)

Misalkan V ruang vektor atas lapangan F dan $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ bebas linear di V dan misalkan $\boldsymbol{w} \in V$. maka, $\boldsymbol{w}$ bebas linear jika dan hanya jika $\boldsymbol{w}$ bukan kombinasi linear dari $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$.

Bukti

($\Rightarrow$) Misalkan V ruang vektor atas lapangan F dan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bebas linear di V, $w \in V$

Akan ditujukkan $w \notin span(v_1, v_2, \ldots, v_n)$

Andaikan $w \in span(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ atau $w = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$, maka

$0 = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n - w$ ....(2.1.6)

Diketahui $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bebas linear artinya persamaan (2.1.6) hanya dipenuhi skalar – skalar yang sama dengan 0 yaitu -1, jadi kontradiksi $v_1, v_2, \ldots, v_n, w$ bebas linear di V. Jadi pengandaian salah, sehigga $w \notin span(v_1, v_2, \ldots, v_n)$

($\Leftarrow$) Misalkan V ruang vektor atas lapangan F dan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bebas linear di ruang vektor V dan $w \in V$. $w \notin span(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Akan ditunjukkan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bebas linear di V

Andaikan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tidak bebas linear di V, artinya ada skalar yang tidak sama dengan 0 dan $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n + bw = 0$ ....(2.1.7)

Jika $b \neq 0$, persamaan (2.1.7) di bagi b sehingga di peroleh

$\frac{a_1}{b}v_1 + \frac{a_2}{b}v_2 + \ldots + \frac{a_n}{b}v_n + \frac{a_1}{b}w$ atau $w = \frac{a_1}{b}v_1 - \frac{a_2}{b}v_2 - \ldots - \frac{a_n}{b}v_n$ artinya w bukan kombinasi linear dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$ atau $w \notin span\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

jadi pengandaian salah, sehingga $v_1, v_2, \ldots, v_n, w$ bebas linear di V

Definisi 2.1.8 (Anton, 2004)

Misalkan V suatu ruang vektor atas lapangan F dan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah suatu himpunan vektor – vektor pada V, maka S disebut basis untuk V jika dua syarat tersebut berlaku,

a) S bebas linear di V,

b) S membangun di V.

Contoh 5

Misalkan $V = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ adalah vektor – vektor di R^2, apakah V merupakan basis di R^2 ?

Jawab

Misalkan $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ dan $v_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, v_1, $v_2 \in R$

Akan di cari apakah a) v_1, v_2 bebas linear di R^2

b) v_1, v_2 membangun di R^2

a) Akan dicari v_1, v_2 bebas linear di R^2

Pandang kombinasi linear $r_1v_1 + r_2v_2 = \mathbf{0}$ maka,

$r_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + r_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ diperoleh,

$r_1 - r_2 = 0$ dan……………………………………………………………(2.1.8)

$r_1 + r_2 = 0$………………………………………………………………(2.1.9)

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.1.8) dan persamaan (2.1.9) sehingga,

$2r_1 = 0$ atau $r_1 = 0$………………………………………………………(2.1.10)

dari persamaan (2.1.8) dan (2.1.10) diperoleh,

$r_2 = 0$, maka kombinasi linear hanya di peroleh $r_1 = 0$ dan $r_2 = 0$.

Jadi v_1 dan v_2 bebas linear.

b) Akan dicari v_1, v_2 membagun di R^2

Ambil $w \in R^2$ sebarang.

Karena $w \in R^2$ maka terdapat $w = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

Perhatikan bahwa,

$r_1\binom{1}{1} + r_2\binom{-1}{1} = \binom{a}{b}$ diperoleh,

$r_1 - r_2 = a$ dan ....(2.1.11)

$r_1 + r_2 = b$..(2.1.12)

dengan mensubtitusikan persamaan (2.1.11) dan persamaan (2.1.12) sehingga,

$2r_1 = a + b$ atau $r_1 = \frac{a+b}{2}$ ....(2.1.13)

dari persamaan (2.1.11) dan (2.1.13) diperoleh,

$r_2 = \frac{b-a}{2}$,

Jadi terdapat r_1 dan r_2 sehingga $r_1v_1 + r_2v_2 = w$, dengan kata lain v_1 dan v_2 membangun di R^2.

Karena (a) dan (b) terpenuhi maka V merupakan basis di R^2.

Definisi 2.1.9 (Jacob, 1990)

Misalkan V ruang vektor atas lapangan F dan banyaknya basis dengan unsurnya n, dengan n bilangan asli. Maka dikatakan ruang vektor berdimensi hingga. Jika V tidak berdimensi hingga dikatakan V ruang vektor berdimensi tak hingga.

Definisi 2.1.10 (Anton, 2004)

Misalkan V ruang vektor atas lapangan F, V disebut berdimensi berhingga jika terdiri dari himpunan terhingga vektor - vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ yang membentuk suatu basis. Jika tidak terdapat himpunan semacam ini, V disebut sebagai berdimensi tak berhingga .

Contoh 6

Misalkan $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Himpunan $S = \{ M_1, \; M_2, \; M_3, \; M_4 \}$ adalah sebuah basis untuk ruang vektor $M_{2\times 2}$ dari matrik – matrik 2×2.

Bukti

Ambil sebarang matrik $W = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $a, b, c, d \in R$. Akan ditunjukkan

1) S Membangun di V
2) S Bebas linear di V

Perhatikan bahwa,

1) S membangun di V

   Pandang kombinasi linear $W = aM_1 + b\,M_2 + c\,M_3 + d\,M_4$, maka akan diperoleh,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

   Jadi S membangun di V

2) S bebas linear

   Pandang kombinasi linear $aM_1 + b\,M_2 + c\,M_3 + d\,M_4 = \mathbf{0}$

$$a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Sehingga di peroleh $a = b = c = d = 0$

   Jadi S bebas linear.

Teorema 2. 1. 10 (Jacob, 1990)

Misalkan V ruang vektor atas lapangan F dan $\{ v_1, v_2,..., v_n \}$basis di ruang vektor V, maka untuk setiap vektor $w \in V$ terdapat barisan skalar $a_1, a_2,....,a_n$. yang tunggal sehingga $\mathbf{w} = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$

Bukti

Diketahui $v_1, v_2,..., v_n$ bebas linear

$$W \in span\{ v_1, v_2,..., v_n \}$$

Akan ditunjukkan $\mathbf{w}$, ditulis dengan tunggal sebagai kombinasi linear dari $v_1, v_2,..., \mathbf{v}_n$.

Andaikan $\mathbf{w}$ dapat di tulis dengan 2 cara, yaitu

$$\mathbf{w} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\, v_2 + ...+ a_n\mathbf{v}_n$$

$$\mathbf{w} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\, v_2 + ...+ b_n\mathbf{v}_n$$

maka $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\, v_2 + ...+ a_n\mathbf{v}_n = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\, v_2 + ... + b_n\mathbf{v}_n$

$$(a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + ...+ (a_n - v_n) = \mathbf{0}$$

Karena $v_1, v_2,....., v_n$ bebas linear, berarti persamaan di atas hanya di penuhi oleh

$a_1 - b_1 = \mathbf{0}$ sehingga $a_1 = b_1$

$a_2 - b_2 = \mathbf{0}$ sehingga $a_2 = b_2$

$\vdots$ $\vdots$

$A_n - b_n = \mathbf{0}$ sehingga $a_n = b_n$

Jadi $\mathbf{w}$ kombinasi linear dari $v_1, v_2,..., v_n$, sehinga barisan skalar $a_1, a_2,..., a_n$ tunggal.

2.2 Transformasi Linear

definisi 2.2.1 (Jacob, 1990)

Misalkan V dan W suatu ruang vektor atas lapangan F. T suatu transformsi linear dari V ke W adalah suatu fungsi $T : V \rightarrow W$ yang memenuhi,

i. jika $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$, maka $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$,

ii. jika $\boldsymbol{v} \in V$ dan $k \in F$, maka $T(k\boldsymbol{v}) = kT(\boldsymbol{v})$.

Contoh 7

Diberikan suatu fungsi dari R^2 ke R^2 yaitu $T(x_1,x_2) = (x_2, x_1)$, tunjukan bahwa fungsi tersebut suatu transformasi linear ?

Bukti

Misalkan $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{v} = (y_1, y_2)$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in R^2$ dan $k \in F$, akan ditunjukkan

1) $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$, untuk setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in R$

2) $T(k\boldsymbol{v}) = kT(\boldsymbol{v})$, untuk setiap $\boldsymbol{v} \in R$ dan $k \in F$

- $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2)$

  $= (x_1 + y_1), (x_2 + y_2)$

- $k\boldsymbol{u} = k(x_1, x_2)$

  $= (kx_1, kx_2)$

Akibatnya,

1) $T(\boldsymbol{u}) = T(x_1, x_2)$

$= (x_2, x_1)$

$T(\boldsymbol{v}) = T(y_1, y_2)$

$= (y_2, y_1)$

$T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}) \quad = T((x_1, x_2) + (y_1, y_2))$

$= ((x_2, x_1) + (y_2, y_1))$

$= ((x_2, + y_2), (x_1 + y_1))$

$T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \quad = T((x_1, y_1) + (x_2, y_2))$

$= ((x_2 + x_1), (y_2 + y_1))$

$= ((x_2, y_2) + (x_1, y_1))$

Jadi $T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\mathbf{v})$ ....(2.2.1)

2) $T(k\boldsymbol{u}) = T(k(x_1, x_2))$

$= k(x_2, x_1)$

$= (kx_2, kx_1)$

$kT(\boldsymbol{u}) = kT(x_1 + x_2)$

$= k(x_2 + x_1)$

$= (kx_2, kx_1)$

Jadi $T(k\boldsymbol{u}) = kT(\boldsymbol{u})$..(2.2.2)

Karena (2.2.1) dan (2.2.2) maka transformasi linear.

Defenisi 2.2.2 (Jacob, 1990)

Misalkan V dan W suatu ruang vektor atas lapangan F dan misalkan $T : V \rightarrow W$ suatu transformasi linear.

1. *Kernel* dari T, ditulis *ker*(T) didefinisikan sebagai,

   $Ker(T) = \{ \boldsymbol{v} \in V \mid T(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \}$

2. *Image* dari T ditulis *Im*(T), didefenisikan sebagai,

   $Im(T) = \{ T(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in V \}$

Definisi 2.2.3 (Jacob, 1990)

Misalkan $T : V \rightarrow W$ adalah transformasi linear.

Dimensi dari *ker*(T) disebut *nullitas* T, ditulis *null*(T).

Dimensi dari *image* T disebut *rank* T, dituls *rk*(T).

Teorema 2.2.4 (Anton, 2004)

jika A adalah suatu matrik dengan n kolom, maka *rank*(A) + *nullitas*(A) = n

bukti

karena A memiliki n kolom, maka sistim linear homogen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ memiliki n faktor yang tidak diketahui (variabel). Variabel ini terbagi dalam dua kategori, variabel utama dan variabel bebas, sehingga

$$\begin{bmatrix} \text{banyaknya variabel} \\ \text{utama} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{banyaknya variabel} \\ \text{bebas} \end{bmatrix} = n$$

Tetapi banyaknya variabel utama sama dengan banyaknya 1 utama didalam bentuk eselon baris tereduksi dari A dan angka ini merupakan rank dari A, jadi

$$rank(A) + \begin{bmatrix} \text{banyaknya variabel} \\ \text{bebas} \end{bmatrix} = n$$

Banyaknya variabel adalah sama dengan *nullitas* dari A. Hal terjadi karena *nullitas* dari A dimensi ruang solusi dari $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, yang sama dengan banyaknya variabel bebas.

Jadi *rank*(A) + *nullitas*(A) = n

Definisi 2.2.5 (Anton, 2004)

Sebuah matrik dapat diubah ke dalam bentuk eselon baris yang di reduksi (*reduced row-echelon form*) harus memiliki sifat,

1. Jika satu baris tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka bilangan tak nol pertama pada baris itu adalah 1. (dinamakan 1 utama)

2. Jika ada suatu baris yang terdiri dari seluruhnya nol, maka semua baris seperti itu dikelompokkan bersama pada bagian paling bawah dari matrik.
3. Jika terdapat dua baris berurutan yang tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat pada kolom yang lebih kanan dari 1 utama pada baris yang lebih tinggi.
4. Setiap kolom yang memiliki 1 utama memiliki nol pada tempat-tempat lainnya.

Sebuah matrik yang memiliki tiga sifat pertama diatas disebut bentuk dalam eselon baris (*row-echelon form*)

Definisi 2.2.6 (Anton, 2004)

Metoda untuk memecahkan sistem – sistem persamaan linear dengan mereduksi matrik yang diperbesar menjadi bentuk eselon baris yang dinamakan dengan eliminasi Gauss.

Definisi 2.2.7 (Anton, 20004)

Metoda untuk memecahkan sistim – sistim persamaan linear dengan mereduksi matrik yang diperbesar menjadi bentuk eselon baris tereduksi yang dinamakan dengan elimiasi Gauss Jordan.

Contoh 8

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Dan T_A suatu transformasi linear dari R^3 ke R^2 sebagai berikut

$T_A : R^3 \to R^2$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Tentukan

a. *Kernel* dari T_A

b. Dimensi *ker*(T_A)

c. *Image* dari T_A

d. Dimensi *image* T_A

Jawab

a. $Ker(\mathrm{T_A}) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in R \mid T_A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in R \mid \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in R \mid \begin{matrix} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \end{matrix} \right\}$

Masukkan solusi dari solusi SPL (Sistim Persamaan Linear) diatas

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 4x + 5y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

OBE (Operasi Baris Elementer), dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Diperoleh,

(i) x – z = 0, maka x = z

(ii) y + 2z = 0, maka y = -2z

dari persamaan (i) dan (ii), misalkan $z = t$, $t \in R$ diperoleh

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ t \end{bmatrix}, t \in R$$

Jadi $ker(T_A) = \left\{\begin{bmatrix} t \\ -2t \\ t \end{bmatrix}, t \in R\right\}$

b. $ker(T_A) = \left\{\begin{bmatrix} t \\ -2t \\ t \end{bmatrix}, t \in R\right\}$

$$= \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t,\ t \in \mathrm{R}\right\}$$

$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ merupakan basis dari $ker(T_A)$

jadi dimensi $ker(T_A) = nullitas(T_A) = 1$

c. $Im(T_A) = \left\{T_A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in R\right\}$

$$= \left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in R\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} z \mid x, y, z \in R\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} y + \left[-1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\right] z \mid x, y, z \in R\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} (x - z) + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} (y + 2z) \mid x, y, z \in R\right\}$$

$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\right\}$ merupakan basis dari *image*(T_A)

d. Dimensi $im(T_A) = Rank(T_A) = 2$

Atau $null(T_A) + rank(T_A) = n$

$1 + rank(T_A) = 3$

$rank(T_A) = 3 - 1$

$= 2$

Definisi 2.2.8 (Jacob, 1990)

Diberikan sebarang matrik, suatu baris elementer dikenakan ke matrik jika satu dari yang berikut berlaku di matrik tersebut, yaitu:

a) Mengalikan sebarang baris dengan skalar tak nol .

b) Menjumlahkan suatu kelipatan suatu baris dengan baris yang lain dengan membiarkan baris yang lain tetap.

c) Menukar tempatkan baris.

Definisi 2.2.8 (Anton, 2004)

Jika A adalah matrik bujursangkar, dan jika terdapat matrik B yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut dapat di balik dan B disebu sebagai invers (*inverse*) dari A. jika matrik B tidak dapat didefinisikan , maka A disebut matrik singular.

Contoh 9

Diketahui matrik $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, apakah A dapat di balik ?

Jawab

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ invers dari matrik A

Perhatikan bahwa,

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Jadi $AB = BA = I$, sehngga matrik A dapat di balik.

Definisi 2.2.9 (Soemartoyo dan naipospos, 1983)

Matrik bujursangkar A dikatakan singular jika $|A| = 0$, tidak singular jika $|A| \neq 0$

Definisi 2.2.10 (Anton, 1991)

Jika matrik P mempunyai invers maka matrik P disebut matrik *invertible* (dapat dibalik) atau juga disebut matrik *non* singular.

Definisi 2.2.11 (Anton, 1991)

matrik bujursangkar A dikatakan dapat didiagonalisasi jika terdapat matrik P yang dapat dibalik sehingga $P^{-1}AP$ diagonal, matrik P dikatakan mendiagonalisasi A.

Definisi 2.2.12 (Jacob, 1990)

Misalkan A dan B adalah matrik $n \times n$. Jika terdapat matrik P yang dapat di balik sehingga $A = PDP^{-1}$ maka A dan B dikatakan similar.

2.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.3.1 (Anton, 1990)

Jika A adalah sebuah matrik kuadrat, maka minor entri a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan didefenisikan sebagai determinan dari submatrik yang tinggal setelah baris ke i dan kolom ke j dicoret dari A. Bilangan $(-1)^{i+j} M_{ij}$ dinyatakan oleh C_{ij} dinakan kofaktor entri a_{ij}.

Definisi 2.3.2 (Anton dan Rorres, 1994)

Jika A adalah matrik n x n, maka sebuah vektor tak nol x pada R^n disebut vektor eigen dari A jika Ax adalah sebuah kelipatan skalar dari x , yaitu $Ax = \lambda x$

Untuk skalar sembarang λ. skalar λ disebut nilai eigen dari A, dan x disebut sebagai vektor eigen dari A yang terkait dengan λ.

Teorema 2.3.3 (Seymour dan Marc, 2002)

Jika A adalah matrik beroder n x n dan $c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \ldots + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_n\lambda^n = 0$ adalah persamaan karakteristik dari A, maka $c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + .. + c_{n-1} A^{n-1} + c_n A^n = 0$

Teorema 2.3.3 (Soemartoyo, 1983)

Jika A adalah matrik berukuran n x n, maka skalar λ adalah nilai eigen, maka

$det(A - I\lambda)$ singular artinya $det(A - I\lambda) = 0$

Bukti

Misalkan λ nilai eigen dari A, artinya $\exists\ x \ni Ax = \lambda x, \forall\ x \neq 0$, karena $Ax = \lambda x$, maka

$Ax = \lambda Ix$

$Ax - \lambda Ix = 0(A - I\lambda)x = 0$..(2.3.1)

Dari persamaan (2.3.1) akan mempunyai penyelsaian nontrivial (tak nol) jika dan hanya jika $det(A - I\lambda)$ singular. Maka diperoleh $det(A - \lambda I) = 0$.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Diagonalisasi pada matrik

Definisi 3.1.1 (Gunawan, 1987)

Sebuah matrik bujursangkar A dikatakan dapat didiagonalisasi jika terdapat sebuah matrik P yang dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matrik diagonal , matrik P dikatakan mendiagonalisasi A.

Teorema 3.1.2 (Anton, 1990)

Jika A adalah sebuah matrik $n \times n$, maka kedua pernyataan berikut ini adalah equivalen,

a) A dapat didiagonalisasi,

b) A memiliki n vektor eigen yang bebas linear.

Bukti

(a) $\Longrightarrow$ (b)

Karena A diasumsikan dapat didiagonalisasi, maka terdapat sebuah matrik yang dapat dibalik misalkan matrik P, sehingga $A = PDP^{-1}$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah diagonal, katakanlah $P^{-1}AP = D$, dimana

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Berdasarkan rumus $P^{-1}\,AP = D$ bahwa $AP = PD$, yaitu

$$AP = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_{11}p_{11} & \lambda_{22}p_{12} & \cdots & \lambda_{nn}p_{1n} \\ \lambda_{11}p_{21} & \lambda_{22}p_{22} & \cdots & \lambda_{nn}p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{11}p_{n1} & \lambda_{22}p_{n2} & \cdots & \lambda_{nn}p_{nn} \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ 3.1.1)$$

Jika ditetapkan bahwa $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ menotasikan vektor - vektor kolom dari matrik P maka dari (3.1.1) urutan kolom-kolom AP adalah $\lambda_1\boldsymbol{p}_1, \lambda_2\boldsymbol{p}_2, \ldots., \lambda_n\boldsymbol{p}_n$.

Karena P dapat dibalik, maka vektor – vektor kolomnya semuanya taknol, jadi dari (3.1.1) didapatkan bahwa $\lambda_1, \lambda_2, \ldots., \lambda_n$ adalah nilai eigen dari A dan $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \ldots., \boldsymbol{p}_n$ adalah bebas linear .

Jadi A mempunyai n vektor eigen yang bebas linear.

(a) $\Leftarrow$ (b)

Misalkan A mempunai n vektor eigen yang bebas linear yaitu $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots., \boldsymbol{p}_n$ yang berpadanan dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots., \lambda_n$, misalkan

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

adalah matrik yang vektor kolomnya adalah $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots., \boldsymbol{p}_n$, vektor – vektor kolom dari hasil kali matrik A dengan matrik yang masing – masing adalah

$A\boldsymbol{p}_1, A\boldsymbol{p}_2, \ldots, A\boldsymbol{p}_n$

Perhatikan bahwa,

$A\boldsymbol{p}_1 = \lambda\boldsymbol{p}_1, A\boldsymbol{p}_2 = \lambda\boldsymbol{p}_2, \ldots, A\boldsymbol{p}_n = \lambda\boldsymbol{p}_n$

Sehingga,

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Dimana D adalah matrik diagonal yang mempunyai nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ pada diagonal utamanya. Karena vektor – vektor kolom dari P bebas linear maka P dapat di balik jadi persamaan di atas dapat di tulis $P^{-1}AP = D$ ini berarti A dapat didiagonalisasi.

Contoh 10

Tentukan sebuah matrik P yang mendiagonalisasi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

Polinomial karateristik matrik A adalah

$$\text{Det}(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3-\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)[(3-\lambda)(4-\lambda) - 0] - 0 + 0$$

$$= (2-\lambda)(12 - 7\lambda + \lambda^2)$$

$$= 24 - 14\lambda + 2\lambda^2 - 12\lambda + 7\lambda^2 - \lambda^3$$

Sehingga nilai eigen dari matrik A, yaitu

$$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 26\lambda + 24 = 0$$

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 26\lambda - 24 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 7\lambda + 12) = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0$$

Maka persamaan karakteristiknya adalah

$(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0$

Diperoleh $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ dan $\lambda_3 = 4$ merupakan nilai eigen dari matrik A.

Misalkan $\boldsymbol{x} = (\ x_1,\ \ x_2,\ \ x_3\ )$ adalah vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan niai eigen λ maka $(\ A - \lambda I\ )\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ 3.1.2\ )$$

Untuk $\lambda = 2$, maka persamaan (3.1.2) diperoleh,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan eliminasi gauss jordan, sehingga

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Diperoleh,

$x_2 = 0$, $2x_3 = 0$ atau $x_3 = 0$

Misalkan $x_1 = s,\ s \in R$

sehingga ruang eigen yang berkaitan dengan nilai eigen $\lambda = 2$

berdimensi satu, yaitu : $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s, s \epsilon R\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ 3.1.3\ )$

Untuk $\lambda = 3$, maka persamaan (3.1.2)

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss Jordan, diperoleh

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga,

$x_3 = 0$

$x_1 - 2x_3 = 0$, maka $x_1 = 2x_3$. Akibatnya dengan mensubtitusikan $x_3 = 0$ dipenuhi

$x_1 = 0$

Misalkan $x_2 = s$

sehingga ruang eigen yang berkaitan dengan nilai eigen $\lambda = 3$

berdimensi satu, yaitu $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s, s \in R \right\}$..(3.1.4)

Untuk $\lambda = 4$, maka persamaan (3.1.2)

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss Jordan diperoleh,

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$-2x_1 - 2x_3 = 0$, maka $-x_1 = x_3$ atau $x_1 = -x_3$

$-x_2 = 0$ atau $x_2 = 0$

misalkan $x_3 = s$, maka $x_1 = -s$ dan $x_2 = 0$

sehingga ruang eigen yang berkaitan dengan nilai eigen $\lambda = 4$

berdimensi satu, yaitu $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s, s \in R \right\}$..(3.1.5) dari persamaan (3.1.3), (3.1.4) dan (3.1.5) diperoleh basis- basis berikut ini untuk ruang eigen,

untuk $\lambda = 2$: $\quad \boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$

untuk $\lambda = 3$: $\quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$

untuk $\lambda = 4$: $\quad \boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Terdapat tiga vektor basis secara keseluruhan, sehingga matrik A dapat didiagonalisasi dan

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya ditentukan matrik P^{-1} dari matrik P dengan operasai baris elementer, yaitu : [P I $\boldsymbol{I}$] = [$\boldsymbol{I}$ I P^{-1}]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh ,

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh bahwa,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Jadi,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = D$$

Teorema 3.1.3 (Anton, 1991)

Jika $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,..., \boldsymbol{v}_n$ adalah vektor eigen dari matrik A yang terkait dengan nilai- nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n$ maka $\{ \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,..., \boldsymbol{v}_n \}$ adalah himpunan bebas linear.

Bukti

Misalkan $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,..., \boldsymbol{v}_n$ adalah vektor - vektor eigen dari matrik A yang bersesuaian dengan nilai - nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2,...,\lambda_n$.

asumsikan bahwa $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,..., \boldsymbol{v}_n$ tidak bebas linear dan menimbulkan suatu kotradiksi. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,..., \boldsymbol{v}_n$ bebas linear karena nilai eigen tak nol maka $\{ \boldsymbol{v}_1 \}$ adalah bebas linear.

Misalkan ada suatu r bilangan integer terbesar sehingga $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,..., \boldsymbol{v}_n$ bebas linear. Karena diasumsikan bahwa $\{ \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,..., \boldsymbol{v}_n \}$tidak bebas linear, maka r memenuhi

$1 \leq r < k$ akibatnya $\{ \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,...,\boldsymbol{v}_{r+1} \}$ juga tidak bebas linear. Jadi terdapat skalar – skalar $c_1, c_2,..., c_{r+1}$ yang tidak semuanya nol.

Pandang kombinasi linier

$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + ... + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$……………………….………………………………(3.1.6)

Dengan mengalikan kedua ruas pada persamaan (3.1.6) dengan matrik A dan dengan menggunakan fakta bahwa

$A\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2\boldsymbol{v}_2,...,A\boldsymbol{v}_{r+1} = \lambda_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1}$

Maka didapatkan

$c_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\lambda_2\boldsymbol{v}_2 + ...+ c_{r+1}\lambda r_{+1}\boldsymbol{v}_{r+1} = \boldsymbol{0}$……………………..………………(3.1.7)

Dengan mengalikan kedua ruas pada persamaan (3.1.6) dengan λ_{r+1} dan dengan mengurangkan persamaan yang dihasilkan dari persamaan (3.1.7) maka akan menghasilkan

$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_2 + \ldots + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$……………………(3.1.8)

karena { $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ } bebas linear, maka persamaan ini menyatakan bahwa

$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_1 = c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_2 = \ldots = c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$

karena $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r+1}$ berbeda satu sama lain,maka diperoleh bahwa

$c_1 = c_2 = \ldots = c_r$……………………………………………………………..(3.1.9)

dengan mensubtitusikan nilai – nilai ini ke persamaan (3.1.6) maka akan menghasilkan $c_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{0}$

karena vektor eigen $\mathbf{v}_{r+1}$ taknol maka diperoleh bahwa

$c_{r+1} = 0$……………………………………………………………………(3.1.10)

persamaan (3.1.8) dan (3.1.9) bertentangan dengan kontradiksi dengan kenyataan bahwa $c_1, c_2, \ldots, c_{r+1}$ tidak semuanya nol.

Prosedur - prosedur untuk mendiagonalkan matrik bujursangkar adalah sebagai berikut (Anton, 2004)

1. Cari vektor yang bersesuaian dengan nilai eigen yang yang bebas linear
2. Cari $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ yang merupakan basis dari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen sehingga terbentuk suatu matrik P.
3. Jika P terdiri dari n vektor yang bebas linear maka buktikan apakah $P^{-1}AP = D$, jika $P^{-1}AP = D$,dengan D adalah matrik diagonal dari A maka matriks tersebut dapat didiagonalkan

3.2 Pemangkatan matrik

Definisi 3.2 (Anton, 1990)

Jika A adalah matrik kuadrat dan n adalah sebuah bilangan bulat positif, maka

$A^m = A \times A \times A \ldots\ldots \times A$ sebanyak m kali, m adalah bilangan bulat positif.

Pemangkatan matrik A^m menurut definisi 3.2 diatas merupakan pemangkatan matrik yang sering digunakan setiap ada penyelsaian tentang pemangkatan matrik. Ada cara lain yang digunakan untuk menyelesaikan pemangkatan matriks yang akan memberikan kemudahan dalam mengerjakannya, terutama untuk matrik dengan pangkat yang lebih besar.

Jika matrik bujur sangkar $n \times n$ yang dapat didiagonalkan, maka dari definisi 3.1.1 dikatakan bahwa $P^{-1}AP = D$ artinya A dapat didiagonalkan apabila terdapat matrik P yang dapat dibalik.

Dari defenisi 3.1.1 dikatakan bahwa $P^{-1}AP$ artinya matrik A dapat didiagonalkan apabila terdapat matrik yang dapat di balik, yaitu

$$P^{-1}AP = D$$

$$P(P^{-1}AP)P^{-1} = PDP^{-1}$$

$$(P\,P^{-1})A(PP^{-1}) = PDP^{-1}$$

$$IAI = PDP^{-1}$$

$$A = PDP^{-1}$$

Sehingga untuk A^n dapat ditentukan dengan,

$A^n = AA\ldots.A$, sampai n faktor.

$$= (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1})\ldots.(PDP^{-1})$$

$$= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D(P^{-1}P)\ldots.(P^{-1}P)DP^{-1}$$

$$= PD(I)D(I)D(I)\ldots.(I)DP^{-1}$$

$= PDDD....DP^{-1}$

$= PD^nP^{-1}$

Contoh 11

Hitunnglah A^{10} jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Penyelesaian

Cara 1 dengan menggunakan program SWP (*Scientific WordPlace*)

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{10} = \begin{bmatrix} 1024 & 0 & -1047552 \\ 0 & 59049 & 0 \\ 0 & 0 & 1048576 \end{bmatrix}$$

Cara 2

Dari contoh 10 di peroleh

Polinomial karateristik matrik A adalah

$$Det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3-\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)[(3-\lambda)(4-\lambda) - 0] - 0 + 0$$

$$= (2-\lambda)(12 - 7\lambda + \lambda^2)$$

$$= 24 - 14\lambda + 2\lambda^2 - 12\lambda + 7\lambda^2 - \lambda^3$$

Sehingga nilai eigen dari matrik A, yaitu

$$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 26\lambda + 24 = 0$$

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 26\lambda - 24 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 7\lambda + 12) = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0$$

Maka persamaan karakteristiknya adalah

$(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0$

Diperoleh $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ dan $\lambda_3 = 4$ merupakan nilai eigen dari matrik A.

Misalkan $\boldsymbol{x} = (\ x_1,\ \ x_2,\ \ x_3\ )$ adalah vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan niai eigen λ maka $(\ A - \lambda I\ )\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\ 3.2.1\ )$$

Untuk $\lambda = 2$, maka persamaan (3.2.1) diperoleh,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan eliminasi gauss Jordan, sehingga

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Diperoleh,

$x_2 = 0$ dan

$2x_3 = 0$ atau $x_3 = 0$

misalkan $x_1 = s,\ s \in R$

sehingga ruang eigen yang berkaitan dengan nilai eigen $\lambda = 1$

berdimensi satu, yaitu : $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s, s \epsilon R\right\}$ (3.2.2)

untuk $\lambda = 3$, maka persamaan (3.2.1)

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss Jordan, diperoleh

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga,

$x_3 = 0$ dan

$x_1 - 2x_3 = 0$, maka $x_1 = 2\,x_3$ atau $x_1 = 0$

Misalkan $x_2 = s$

sehingga ruang eigen yang berkaitan dengan nilai eigen $\lambda = 3$

berdimensi satu, yaitu : $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s, s \in R \right\}$……………………………………(3.2.3)

untuk $\lambda = 4$, maka persamaan (3.2.1)

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss Jordan, diperoleh

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga,

$-2x_1 - 2\,x_3 = 0$, maka $-x_1 = x_3$ atau $x_1 = -\,x_3$

$-x_2 = 0$ atau $x_2 = 0$

misalkan $x_3 = s$, maka $x_1 = -\,s$ dan $x_2 = 0$

sehingga ruang eigen yang berkaitan dengan nilai eigen $\lambda = 4$

berdimensi satu, yaitu : $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s, s \in R \right\}$……………………………………(3.2.4)

dari persamaan (3.2.2) dan (3.2.3) diperoleh basis- basis berikut ini untuk ruang eigen untuk $\lambda = 2$: $\quad \boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

untuk $\lambda = 3$: $\quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

untuk $\lambda = 4$: $\quad \boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Terdapat tiga vektor basis secara keseluruhan , sehingga matrik A dapat didiagonalisasi dan

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya ditentukan matrik P^{-1} dari matrik P dengan operasai baris elementer, yaitu : $[\, P \mathrel{I} \boldsymbol{I} \,] = [\, \boldsymbol{I} \mathrel{I} P^{-1} \,]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh bahwa

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= D$$

Terbukti bahwa A dapat didiagonalkan dengan matrik diagonalnya D, yang entri – entri diagonalnya merupakan nilai eigen dari matrik A. dengan demikian, maka

$A^{10} = PD^{10}P^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1024 & 0 & 0 \\ 0 & 59049 & 0 \\ 0 & 0 & 1048576 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1024 & 0 & -1048576 \\ 0 & 59049 & 0 \\ 0 & 0 & 1048576 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1024 & 0 & -1047552 \\ 0 & 59049 & 0 \\ 0 & 0 & 1048576 \end{bmatrix}$$

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari penjabaran dan pembahasan diatas maka dapat ditarik suatu kesimpulan bahwa untuk menghitung pemangkatan matrik bujursangkar, selain dengan mengalikan suatu matrik sebannyak m kali , dapat juga dengan menggunakan rumus $A^m = PD^mP^{-1}$ dengan syarat matrik yang di pangkatkan haruslah matriks bujursangkar yang dapat didiagonalisasi dan memenuhi prosedur untuk mendiagonalisasikan matriks.

DAFTAR KEPUSTAKAAN

Anton,H. 2004. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi kedelapan/ Jilid 1. Jakarta : Erlangga.

Anton, Howard. 1991. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi kelima. Jakarta : Erlangga.

Anton,H.1990. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi ketiga. Jakarta : Erlangga.

Anton,H. and Rorres,C.1994. *Elementary Linear Algebra* (7th ed.), John Wile & Sons,Inc. New York.

Cullen G. Charles.1993. *Aljabar Linear Dengan Penerapannya*.Jakarta : PT Gramedia pustaka Utama.

Gunawan,Wibisono.1987. Peubah *Komplek Untuk ilmuan dan Insinyur*. Jakarta : Erlangga.

Jacob,B.1990. *Linier Algebra*. New York : W.H Freeman and company.

Lipschutz, seymour dan Marc Lars. 2002. *Aljabar Linear*. Jakarta : Erlangga.

Soemartoyo, Noniek dan Naipospos. 1983. *Aljabar Linier*. Jakarta : Erlangga.

Wijayanti,K.1997. *Penerapan Diagonalisasi Matriks dalam Genetika Terapan*. Cakrawala Pendidikan.Vol.3, 93 – 104

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 14 november 1987 di batu kalug tepatnya di provinsi Bengkulu, Kab. kepahiang, dari ayah yang bernama Gapur Ali dan ibu Iri Yati. Penulis tamat SD 47 batu kalung pada tahun 2000, tamat di SMPN 2 kepahiang pada tahun 2003, dan tamat di SMA PGRI 1 curup pada tahun 2006, setelah tamat SMA penulis bekerja di Dinas Diknas Kab. Curup sebagai honorer sampai tahun 2007. Dan tahun 2007 itu juga penulis melanjutkan ke jenjang Universitas dan alhamdulilah penulis adalah salah satu penerima beasiswa program S1 Basic Science ikatan dinas guru berasrama, kemudian penulis lulus di Universitas Andalas Padang pada bulan juli.