BILANGAN KROMATIK LOKASI UNTUK GRAF G DENGAN $G\backslash\{v\}$ MERUPAKAN GRAF MULTIPARTIT LENGKAP

SKRIPSI

TIKA SUCI PRAMANA

07 134 039

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

PADANG

2011

KATA PENGANTAR

Assalammu'alaikum Wr. Wb.

Syukur Alhamdulillah penulis ucapkan kehadiran Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-NYA, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "BILANGAN KROMATIK LOKASI UNTUK GRAF G DENGAN $G \setminus \{v\}$ MERUPAKAN GRAF MULTIPARTIT LENGKAP". Penulisan skripsi ini merupakan salah satu syarat untuk menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Andalas Padang.

Penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada kedua orang tua serta kakak dan adik-adik yang selalu memberikan semangat dan motivasi kepada penulis. Tidak lupa pula penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penulisan skripsi ini terutama sekali kepada :

1. Bapak Dr. Syafrizal Sy, selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas Padang sekaligus pembimbing yang telah banyak memberikan bimbingan, pengarahan dan saran kepada penulis sampai selesainya tugas akhir ini.
2. Bapak Narwen, M.Si dan Bapak Efendi, M.Si selaku penguji yang telah banyak meluangkan waktu, memberikan bimbingan, pengarahan dan saran dalam penulisan skripsi ini.

3. Ibu Ir. Hazmira Yozza, M.Si selaku Penasehat Akademik yang telah memberikan motivasi kepada penulis.
4. Ibu Monika Rianti Helmi, M.Si selaku koordinator pendidikan Jurusan Matematika Universitas Andalas.
5. Seluruh staf pengajar Jurusan Matematika Universitas Andalas yang telah banyak memberikan ilmu yang bermanfaat bagi penulis. Dan seluruh staf tata usaha Jurusan Matematika yang telah banyak membantu selama penulis melaksanakan studi di Jurusan Matematika Universitas Andalas.
6. Seluruh teman-teman yang telah mendukung dan memberikan semangat kepada penulis terutama teman-teman angkatan 2007, serta senior-senior dan junior-junior di Jurusan Matematika Universitas Andalas.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih banyak kekurangannya. Untuk itu penulis sangat mengharapkan sekali kritik dan saran atas kekurangan tersebut. Akhir kata semoga skripsi ini bermanfaat bagi kita semua. Amin

Padang, Februari 2011

Penulis

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi dari suatu graf terhubung G yang memuat subgraf yang diinduksi H dari graf G sedemikian sehingga $H = G - v$ berupa graf multipartit lengkap dengan $v \in V(G)$. Konsep yang digunakan dalam penelitian ini adalah konsep himpunan lokasi (*locating set*), dengan konsep ini memungkinkan setiap titik $v \in V$ mempunyai representasi yang berbeda.

Untuk suatu pewarnaan c pada graf terhubung G, misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah partisi terurut dari $V(G)$ ke dalam kelas-kelas warna yang dihasilkan. Untuk suatu titik v di G, kode warna $c_\Pi(v)$ dari titik $v \in (G)$ adalah k-vektor terurut

$$(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k)),$$

dimana $d(v, C_i) = min\{d(v, x) | \, x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik yang berbeda di G memiliki kode warna yang berbeda terhadap Π, maka c disebut pewarnaan lokasi (*locating coloring*) bagi G. Hal ini menunjukkan bahwa, jika G adalah graf terhubung dengan orde $n \geq 3$ dan $v \in V(G)$ sedemikian sehingga $G - v$ adalah graf multipartit lengkap, maka untuk setiap bilangan bulat k dengan $\frac{(n+1)}{2} \leq k \leq n$, terdapat suatu graf G dengan orde n dan $\chi_L(G) = k$.

Kata kunci : *Bilangan kromatik lokasi, Himpunan lokasi, Pewarnaan lokasi,*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

No. Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_{2,} \dots, w_k\}$ dari titik-titik pada graf terhubung G dan misal $v \in V(G)$. K-vektor (k-tupel terurut) $c_W(v)$ dari v yang berkaitan dengan W didefinisikan oleh

$$c_W(v) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k)),$$

dimana $d(v, w_i)$ adalah jarak antara v dan w_i $(1 \leq i \leq k)$. Himpunan W disebut himpunan lokasi (*locating set*) jika k-vektor $c_W(v)$, $v \in V(G)$ saling berbeda.

Pada tahun 1993, Johnson, seorang kimiawan pada perusahaan farmasi, menggunakan konsep *locating set* ini untuk menyelesaikan masalah representasi dan klasifikasi senyawa kimia [7]. Dengan konsep ini, senyawa kimia direpresentasikan secara unik sebagai obyek matematis. Senyawa kimia direpresentasikan dalam bentuk graf, titik - titik graf menyatakan atom dan sisi-sisi graf menyatakan ikatan valensi antara dua atom. Jika V adalah himpunan semua titik pada graf G, dan W adalah himpunan terurut sejumlah titik dimana $W \subseteq V$, dengan menghitung jarak setiap titik $v \in V$ terhadap setiap titik $w \in W$, konsep *locating set* memungkinkan setiap titik $v \in V$ mempunyai representasi berbeda. Jika dua senyawa kimia mempunyai jarak v ke w yang sama, untuk setiap $v \in V$ dan $w \in W$, maka senyawa tersebut dalam satu klasifikasi.

Di samping dalam bidang kimia, konsep *locating set* juga diimplementasikan pada sistem navigasi, perancangan sensor pada suatu gedung, navigasi robot dan jaringan.

Chartrand dkk [2] melakukan pengelompokan titik - titik pada suatu graf G dengan mempartisi semua titik di G menjadi dua partisi atau lebih berdasarkan pewarnaan titik dari graf G tersebut, untuk merepresentasikan titik - titik pada graf G. Jika $v \in V(G)$ dan $C_i \subseteq V(G)$ merupakan himpunan titik di G yang berwarna i, maka jarak antara v dan C_i didefinisikan sebagai $\min\{d(v,x)|x \in C_i\}$. Jika $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah partisi terurut dari $V(G)$ berdasarkan suatu pewarnaan titik dan $v \in V$, maka representasi v terhadap Π (disebut kode warna dari v, dengan notasi $c_\Pi(v)$, adalah vektor panjang-k $(d(v,C_1), d(v,C_2), \dots, d(v,C_k))$. Jika setiap titik yang berbeda mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π, maka c disebut pewarnaan lokasi (*locating coloring*) bagi G (atau secara ekivalen, Π disebut himpunan lokasi (*locating set*) bagi G). Pewarnaan lokasi yang memuat sebanyak minimum warna disebut pewarnaan lokasi minimum, dan kardinalitasnya disebut bilangan kromatik lokasi (*locating chromatic number*) dari G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

1.2 Perumusan Masalah

Misalkan diberikan suatu graf terhubung G. Permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana menentukan bilangan kromatik lokasi dari suatu graf G yang memuat subgraf yang diinduksi H dari graf G.

1.3 Pembatasan Masalah

Dalam skripsi ini, masalah penentuan bilangan kromatik lokasi dari suatu graf terhubung G yang memuat subgraf yang diinduksi H dari graf G ini dibatasi hanya untuk $H = G - v$ berupa graf multipartit lengkap dengan $v \in V(G)$.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk menentukan bilangan kromatik lokasi dari suatu graf terhubung G yang memuat subgraf yang diinduksi H dari graf G sedemikian sehingga $H = G - v$ berupa graf multipartit lengkap dengan $v \in V(G)$.

1.5 Sistematika Penulisan

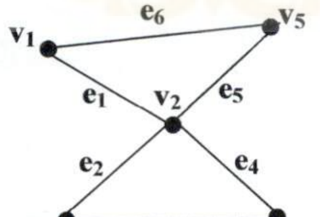
Skripsi ini dibagi menjadi empat bab. Bab I, pendahuluan, berisi latar belakang, permasalahan, pembatasan masalah, tujuan dan sistematika penulisan skripsi ini. Pada Bab II dijelaskan mengenai definisi dan terminologi dalam teori graf, konsep tentang bilangan kromatik lokasi, dan juga dicantumkan beberapa teorema pendukung. Bab III memuat pembahasan mengenai bilangan kromatik lokasi dari suatu graf terhubung G yang memuat subgraf yang diinduksi H dari graf G, dimana H adalah graf multipartit lengkap. Kesimpulan dan saran dari hasil pembahasan terdapat pada Bab IV.

BAB II
LANDASAN TEORI

Dalam bab ini akan diperkenalkan beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan permasalahan yang telah dikemukakan di Bab I. Definisi dan terminologi dalam teori graf disajikan pada Subbab 2.1, kemudian pada Subbab 2.2 diuraikan tentang bilangan kromatik lokasi. Teorema-teorema pendukung untuk menyelesaikan permasalahan skripsi ini diberikan pada Subbab 2.3.

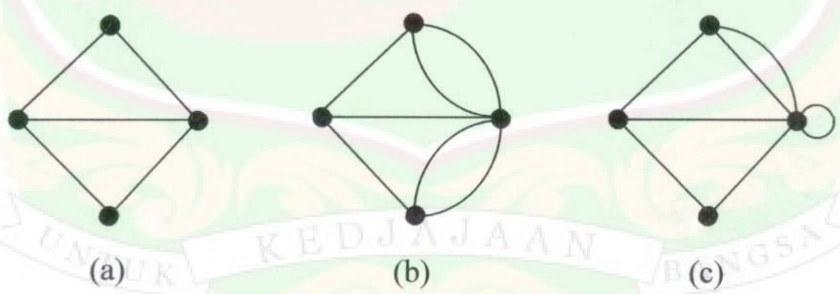
2.1 Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf

Definisi-definisi berikut merujuk pada [1], [4] dan [5]. Suatu **graf** G adalah himpunan tak kosong berhingga V yang disebut **titik** (atau **noktah**) dan himpunan E yang terdiri dari 2 elemen dari subhimpunan dari $V(G)$, disebut **sisi** (atau **garis**). Himpunan titik dari G dinotasikan dengan $V(G)$, sedangkan himpunan sisinya dinotasikan dengan $E(G)$. Banyaknya titik di G , dinotasikan dengan $|V(G)|$, disebut **orde** (***order***) dari G dan banyaknya sisi di G, dinotasikan dengan $|E(G)|$, disebut **ukuran** (***size***) dari G. Dapat dilihat pada **Gambar 2.1.1** bahwa $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, sehingga orde G adalah 5 dan ukuran G adalah 6.



Gambar 2.1.1 Graf G dengan orde 5 dan ukuran 6

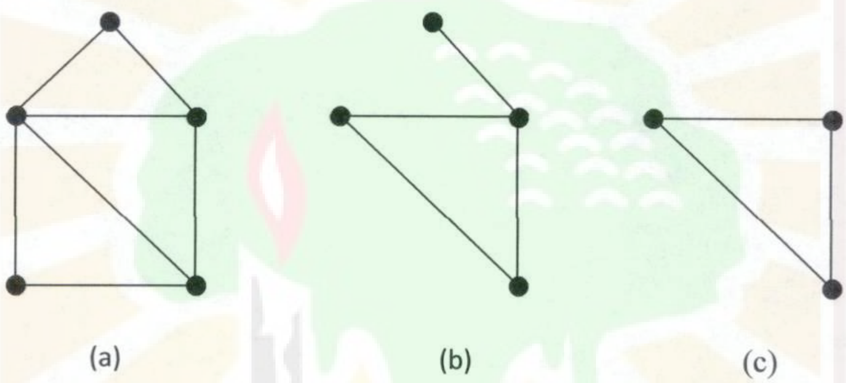
Jika sisi $e = uv$ dengan $u, v \in V(G)$, maka titik u disebut **bertetangga** dengan titik v dan demikian sebaliknya. Dalam hal ini, sisi e dikatakan **terkait** dengan titik u dan v. Sebaliknya, titik u dan v juga dikatakan terkait dengan sisi e. Misalkan $x \in V(G)$, **lingkungan** dari x adalah $N(x) = \{v \in V(G) \mid xv \in E(G)\}$. Suatu sisi e disebut ***loop*** jika $e = vv$ untuk suatu $v \in V(G)$. Jika dua sisi atau lebih terkait dengan sepasang titik yang sama, maka sisi-sisi tersebut disebut **sisi ganda**. Graf disebut **graf sederhana** jika $E(G)$ tidak memuat *loop* maupun sisi ganda. **Graf tidak sederhana** adalah graf yang memuat *loop* atau sisi ganda. **Graf ganda (*multigraph*)** adalah graf yang memuat sisi ganda, sedangkan graf yang memuat *loop* (termasuk bila memuat sisi ganda sekalipun) disebut **graf semu (*pseudograph*)**. Banyak sisi yang terkait dengan suatu titik $x \in V(G)$ disebut **derajat** (***degree***) titik x dan dinotasikan dengan $deg(x)$. Jika $deg(x) = 0$, maka x dikatakan **titik terisolasi**.



Gambar 2.1.2 (a) Graf Sederhana, (b) & (c) Graf Tidak Sederhana

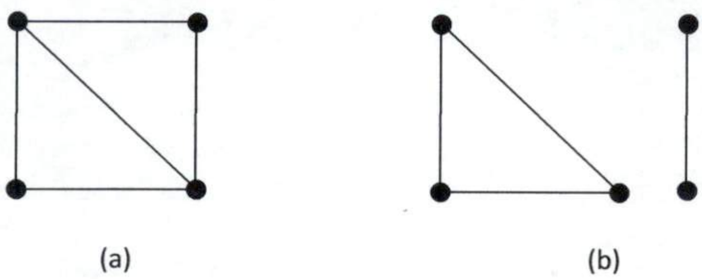
Jalan (***walk***) dari titik u_0 ke titik u_n di G adalah barisan hingga $u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, \dots, u_{n-1}, e_n, u_n$ dari titik-titik dan sisi-sisi di G sedemikian sehingga, $u_{i-1}u_i \in E(G)$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$. **Panjang** (***length***) dari jalan adalah banyaknya sisi dari barisan tersebut. **Lintasan** (***path***) adalah jalan yang semua titik dan sisinya berbeda. Misalkan G graf, x dan y titik-titik di G. **Jarak (*distance*)** dari x ke y, dinotasikan oleh $d(x, y)$ adalah panjang dari lintasan terpendek dari x ke y.

Suatu graf H disebut **subgraf** dari G jika $E(H) \subseteq E(G)$ dan $V(H) \subseteq V(G)$. Jika $E(H) = \{xy \in E(G) | x, y \in V(H)\}$, maka H dikatakan **subgraf yang diinduksi** (***induced subgraph***) oleh $V(H)$ dari G.



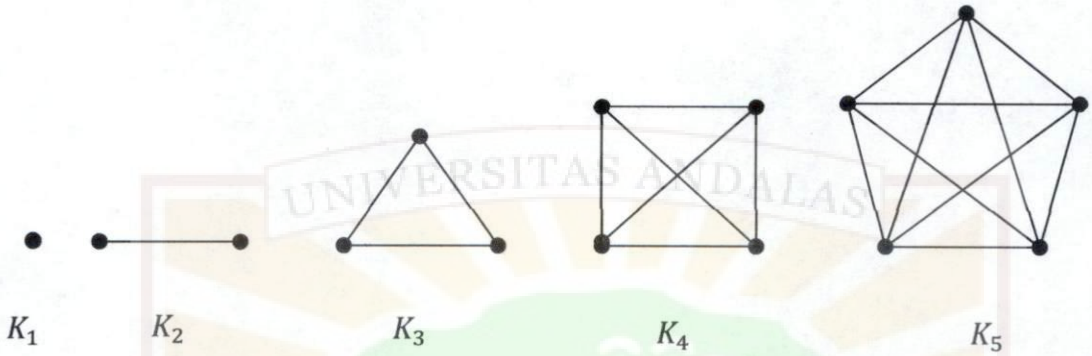
Gambar 2.1.3 (a) Graf G, (b) Subgraf dari graf G, (c) Subgraf yang Diinduksi dari graf G

Suatu graf G dikatakan **graf terhubung** (***connected graph***) jika untuk setiap pasang titik $u, v \in V(G)$ terdapat suatu lintasan yang menghubungkan u dan v. Jika tidak demikian, maka G adalah **graf tidak terhubung** (***disconnected graph***).



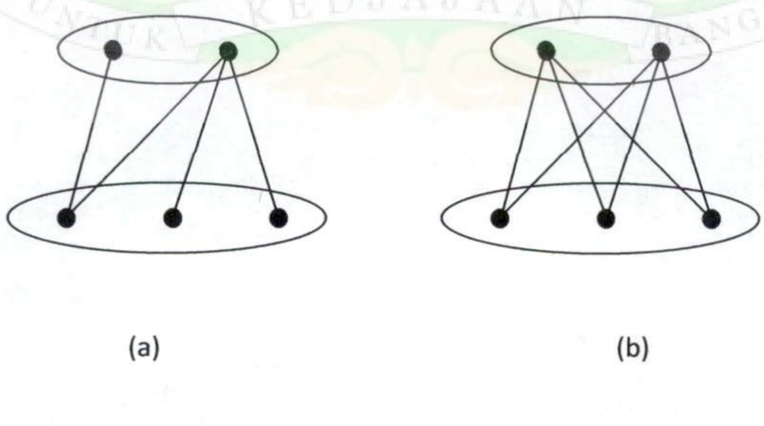
Gambar 2.1.4 (a) Graf Terhubung, (b) Graf Tidak Terhubung

Suatu graf dikatakan **graf trivial** jika graf tersebut hanya terdiri dari sebuah titik. **Graf lengkap** (***complete graph***) dengan n titik, dinotasikan dengan K_n, adalah suatu graf yang setiap titiknya saling bertetangga.



Gambar 2.1.5 Graf Lengkap

Sebuah graf disebut **graf multipartit** (***multipartite graph***) jika himpunan titik pada graf tersebut dapat dikelompokkan ke dalam subset-subset tak kosong yang disebut himpunan partit, sehingga tidak ada sisi yang menghubungkan setiap pasang titik yang berada dalam satu himpunan partit yang sama. Graf multipartit dengan n himpunan partit disebut **partit-n**, graf dengan 2 buah himpunan partit (*partit*-2) disebut juga **bipartit**, sedangkan graf dengan 3 buah himpunan partit (*partit*-3) disebut juga **tripartit**.



Gambar 2.1.6 (a) Graf Bipartit , (b) Graf Bipartit Lengkap $K_{2,3}$

Graf multipartit lengkap dengan n buah himpunan partit, dinotasikan dengan $K_{m_1,m_2,\dots,m_n}$ dengan m_i menyatakan banyak titik pada himpunan partit ke$-i$, adalah graf multipartit yang setiap pasang titiknya yang berbeda himpunan partit bertetangga.

Pewarnaan titik (***vertex coloring***) pada graf $G = (V, E)$ adalah suatu pemetaan $c: V \to N$ sehingga $c(v) \neq c(w)$ jika v dan w bertetangga. Jika $|Peta(c)| = k$ maka G dikatakan ***k*-pewarnaan**. **Bilangan kromatik** (***chromatic number***) dari G adalah bilangan asli terkecil k sedemikian sehingga, jika titik-titik di G diwarnai dengan k warna, maka tidak ada titik yang bertetangga mempunyai warna yang sama. Bilangan kromatik dari G dinotasikan dengan $\chi(G)$.

2.2 Bilangan Kromatik Lokasi

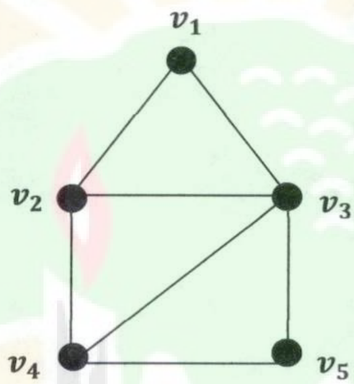
Misalkan c sebuah pewarnaan titik pada graf terhubung G dengan menggunakan warna-warna $1, 2, \dots, k$ untuk bilangan bulat positif k. Maka $c(u) \neq c(v)$, jika titik u dan v bertetangga di G. Secara ekivalen, c merupakan suatu partisi $\prod$ dari $V(G)$ ke dalam kelas-kelas warna yang saling bebas C_1, C_2, ...,dan C_k , dimana titik-titik pada C_i diberi warna i , $1 \leq i \leq k$.

Kode warna (***color code***) $c_{\prod}(v)$ dari suatu titik $v \in (G)$ didefinisikan sebagai k-vektor :

$$c_{\prod}(v) = (d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k)),$$

dimana $d(v, C_i) = min\{d(v, x) | \, x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$.

Jika setiap titik yang berbeda di G memiliki kode warna yang berbeda terhadap $\prod$, maka c disebut **pewarnaan lokasi** (***locating coloring***) bagi G. Oleh karena itu, **suatu pewarnaan lokasi** bagi G adalah pewarnaan yang membedakan setiap titik di G berdasarkan jaraknya terhadap kelas warna yang dihasilkan. **Bilangan kromatik lokasi** (***locating chromatic number***) dari graf G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$, adalah bilangan terkecil k sehingga terdapat pewarnaan lokasi dengan kardinalitas k untuk graf G. Karena setiap pewarnaan lokasi merupakan suatu pewarnaan, maka $\chi(G) \leq \chi_L(G)$ untuk setiap graf terhubung G. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut, misalkan graf G seperti pada **Gambar 2.2.1.**

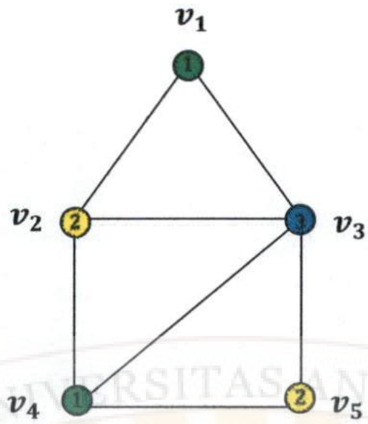


Gambar 2.2.1 Graf G dengan orde $n = 5$

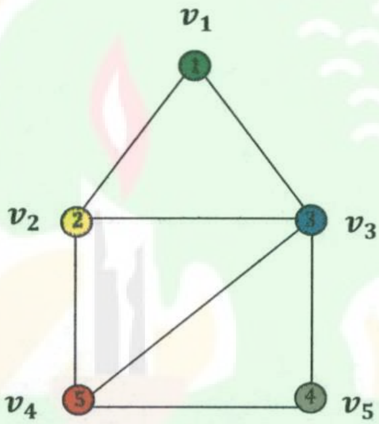
Misalkan pula $c = \{1, 2, 3\}$ suatu pewarnaan pada graf G seperti terlihat pada **Gambar 2.2.2**, kode warna dari titik-titik G terhadap $\Pi = \{C_1, C_2, C_3\}$ adalah sebagai berikut :

- $c_\Pi(v_1) = (d(v_1, C_1), d(v_1, C_2), d(v_1, C_3)) = (0,1,1)$
- $c_\Pi(v_2) = (d(v_2, C_1), d(v_2, C_2), d(v_2, C_3)) = (1,0,1)$
- $c_\Pi(v_3) = (d(v_3, C_1), d(v_3, C_2), d(v_3, C_3)) = (1,1,0)$
- $c_\Pi(v_4) = (d(v_4, C_1), d(v_4, C_2), d(v_4, C_3)) = (0,1,1)$
- $c_\Pi(v_5) = (d(v_5, C_1), d(v_5, C_2), d(v_5, C_3)) = (1,0,1)$.

Karena $c_\Pi(v_1) = c_\Pi(v_4)$ dan $c_\Pi(v_2) = c_\Pi(v_5)$, maka c bukan pewarnaan lokasi.



Gambar 2.2.2 Pewarnaan $c = \{1, 2, 3\}$ pada graf G (3 warna)



Gambar 2.2.3 Pewarnaan $c' = \{1, 2, 3,4,5\}$ pada graf G (5 warna)

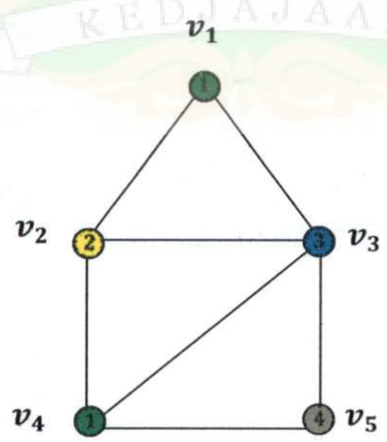
Sebaliknya, pewarnaan $c' = \{1, 2, 3,4,5\}$ seperti terlihat pada **Gambar 2.2.3**, merupakan pewarnaan lokasi pada graf G, karena setiap titik pada G memiliki kode warna yang unik atau berbeda terhadap $\prod' = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$, yaitu :

- $c'_{\prod'}(v_1) = (d(v_1, C_1), d(v_1, C_2), d(v_1, C_3), d(v_1, C_4), d(v_1, C_5)\,) =$ $(0,1,1,2,2)$
- $c'_{\prod'}(v_2) = (d(v_2, C_1), d(v_2, C_2), d(v_2, C_3), d(v_2, C_4), d(v_2, C_5)\,) =$ $(1,0,1,2,1)$

- $c'_{\prod'}(v_3) = (d(v_3, C_1), d(v_3, C_2), d(v_3, C_3), d(v_3, C_4), d(v_3, C_5)) =$ (1,1,0,1,1)
- $c'_{\prod'}(v_4) = (d(v_4, C_1), d(v_4, C_2), d(v_4, C_3), d(v_4, C_4), d(v_4, C_5)) =$ (2,1,1,0,1)
- $c'_{\prod'}(v_5) = (d(v_5, C_1), d(v_5, C_2), d(v_5, C_3), d(v_5, C_4), d(v_5, C_5)) =$ (2,2,1,1,0)

Meskipun demikian, c' bukanlah pewarnaan lokasi yang minimum karena terdapat pewarnaan $c'' = \{1, 2, 3, 4\}$ seperti yang terlihat pada **Gambar 2.2.4** yang juga merupakan pewarnaan lokasi bagi graf G dengan kardinalitas lebih sedikit dibandingkan kardinalitas c'. Kode warna dari titik-titik G terhadap $\prod'' = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ adalah sebagai berikut :

- $c''_{\prod''}(v_1) = (d(v_1, C_1), d(v_1, C_2), d(v_1, C_3), d(v_1, C_4)) = (0,1,1,2)$
- $c''_{\prod''}(v_2) = (d(v_2, C_1), d(v_2, C_2), d(v_2, C_3), d(v_2, C_4)) = (1,0,1,2)$
- $c''_{\prod''}(v_3) = (d(v_3, C_1), d(v_3, C_2), d(v_3, C_3), d(v_3, C_4)) = (1,1,0,1)$
- $c''_{\prod''}(v_4) = (d(v_4, C_1), d(v_4, C_2), d(v_4, C_3), d(v_4, C_4)) = (2,1,1,1)$
- $c''_{\prod''}(v_5) = (d(v_5, C_1), d(v_5, C_2), d(v_5, C_3), d(v_5, C_4)) = (1,2,1,0)$



Gambar 2.2.4 Pewarnaan $c'' = \{1, 2, 3, 4\}$ pada graf G (4 warna)

Lebih lanjut, tidak ada pewarnaan pada G dengan kardinalitas lebih kecil dari c'' yang merupakan pewarnaan lokasi, karena $\chi_L(G) \geq \chi(G) = 3$ dan telah diperlihatkan bahwa pewarnaan c'' yang menggunakan 5 macam warna pada G bukanlah pewarnaan lokasi. Oleh karena itu, bilangan kromatik lokasi dari G, $\chi_L(G) = 4$.

2.3 Teorema Pendukung

Teorema-teorema berikut, dari Chartrand dkk (tahun 2002) [2], yang mendukung penyelesaian permasalahan pada skripsi ini.

Teorema 2.3.1 [2]. *Misal c sebuah pewarnaan lokasi pada graf terhubung G. Jika u dan v adalah titik-titik yang berbeda pada G sedemikian sehingga, d(u,w) = d(v,w) untuk setiap* $w \in V(G) - \{u, v\}$ *maka* $c(u) \neq c(v)$*. Dalam hal khusus, jika u dan v adalah titik-titik yang tidak bertetangga pada G sehingga N(u) = N(v), maka* $c(u) \neq c(v)$*.*

Teorema 2.3.2 [2]. *Misal G sebuah graf terhubung dengan orde* $n \geq 3$*. Maka,* $\chi_L(G) = n$ *jika dan hanya jika G adalah graf multipartit lengkap.*

Teorema 2.3.3 [2]. *Untuk setiap graf terhubung G dengan orde* $n \geq 3$*,* $3 \leq \chi_L(G) \leq n$*.*

BAB III
BILANGAN KROMATIK LOKASI UNTUK GRAF G DENGAN $G \setminus \{v\}$ MERUPAKAN GRAF MULTIPARTIT LENGKAP

Jika suatu graf G memuat subgraf yang diinduksi H dengan orde k dan $\chi(G) = k$, maka H adalah subgraf lengkap dengan orde k di G dan $\chi(G) \geq k$. Sebaliknya, jika G memuat subgraf yang diinduksi H dengan orde k dan $\chi_L(H) = k$, maka berdasarkan Teorema 2.3.2, H adalah subgraf multipartit lengkap dengan orde k.

Misalkan $\mathscr{H}$ adalah koleksi semua graf terhubung G dengan orde paling sedikit 3 sedemikian sehingga $H = G - v$ adalah graf multipartit lengkap untuk suatu titik v pada G. Untuk graf $H = G - v$, dimana $G \in \mathscr{H}$, misalkan $V_1, V_2, \ldots, V_k$, $k \geq 2$, masing-masing merupakan himpunan partit dari H, dimana $|V_i| = n_i$ $(1 \leq i \leq k)$. Misalkan a_i $(1 \leq i \leq k)$ adalah banyaknya titik-titik pada V_i yang bertetangga di G dengan v. Didefinisikan fungsi σ: $\mathscr{H} \rightarrow \mathbf{N}$ oleh

$$\sigma(G) = \sum_{i=1}^{k} max\{a_i, n_i - a_i\}.$$

Karena $\sum_{i=1}^{k} max\{a_i, n_i - a_i\} \geq \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{2} = \frac{n-1}{2}$, (1)

hal ini menunjukkan, jika $G \in \mathscr{H}$ dan G berorde n maka $\frac{(n-1)}{2} \leq \sigma(G) \leq n - 1$. Hubungan antara $\sigma(G)$ dan $\chi_L(G)$ untuk $G \in \mathscr{H}$ akan ditunjukkan pada teorema berikut.

Teorema 3.1 *Misalkan G adalah graf terhubung berorde $n \geq 3$ dan $v \in V(G)$. Jika $G - v$ adalah graf multipartit lengkap, maka $\chi_L(G) = \sigma(G)$ atau $\chi_L(G) = \sigma(G) + 1$.*

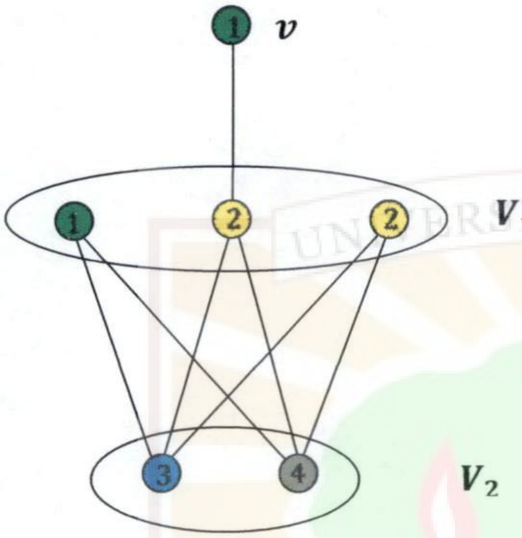
Bukti :

Misalkan $\sigma = \sigma(G)$. Akan ditunjukkan $\chi_L(G) \geq \sigma$. Misalkan c adalah sebuah pewarnaan lokasi di G. Karena setiap dua titik pada himpunan-himpunan partit yang berbeda di $G - v$ adalah bertetangga, maka titik-titik tersebut harus diwarnai dengan warna yang berbeda. Berdasarkan Teorema 2.3.1, tiap pasang titik-titik yang berbeda pada V_i $(1 \leq i \leq k)$ yang bertetangga dengan v harus diwarnai dengan warna yang berbeda. Jadi, banyaknya warna yang dibutuhkan untuk mewarnai titik-titik pada V_i adalah paling sedikit $max\{a_i, n_i - a_i\}$, maka $\chi_L(G) \geq \sigma$.

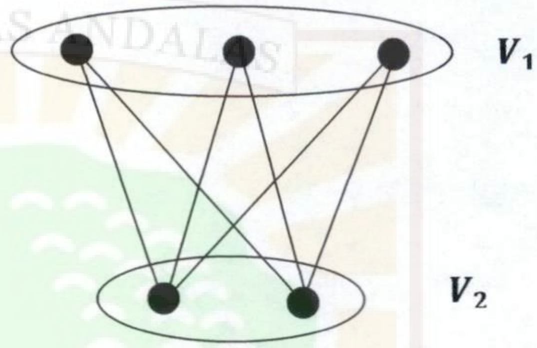
Selanjutnya akan ditunjukkan $\chi_L(G) \leq \sigma + 1$. Jika untuk setiap i $(1 \leq i \leq k)$, $a_i = 0$ atau $a_i = n_i$, maka warnai titik-titik di V_i dengan warna $(i,1),(i,2),\ldots,(i,n_i)$; sementara itu jika $0 < a_i < n_i$, maka warnai titik-titik di V_i yang bertetangga ke v dengan warna $(i,1),(i,2),\ldots,(i,a_i)$, dan warnai titik-titik di V_i yang tidak bertetangga dengan v dengan warna $(i,1),(i,2),\ldots,(i,n_i - a_i)$, maka diperoleh sebuah pewarnaan $G - v$ dengan $\sigma(G)$ warna.

Selanjutnya, warnai titik v dengan warna $\sigma(G) + 1$. Misalkan c' adalah sebuah pewarnaan yang menggunakan $\sigma(G) + 1$ warna. Kemudian, akan ditunjukkan warna-warna dari c' adalah sebuah pewarnaan lokasi di G. Misalkan u dan u' adalah titik-titik berbeda yang ditandai dengan warna yang sama oleh c'. Oleh karena itu, $u, u' \in V_i$ untuk suatu i dengan $1 \leq i \leq k$. Dapat diasumsikan bahwa $uv \in E(G)$ dan $u'v \notin E(G)$. Karena $d(u,v) = 1$, $d(u',v) = 2$ dan v adalah satu-satunya titik di dalam kelas warnanya sendiri, maka c' adalah sebuah pewarnaan lokasi di G yang menggunakan $\sigma + 1$ warna. ∎

Sebagai contoh, perhatikan **Gambar 3.1**, graf terhubung G memuat subgraf yang diinduksi $H = G - v = K_{2,3}$ sehingga diperoleh $\chi_L(G) = 4 = \sigma(G)$.

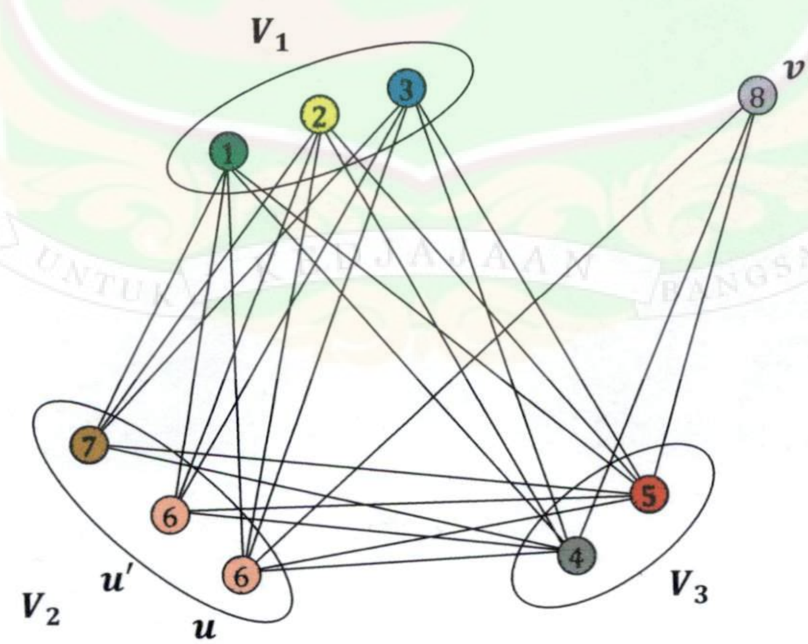


Gambar 3.1 Contoh Graf G dengan $\chi_L(G) = \sigma(G) = 4$

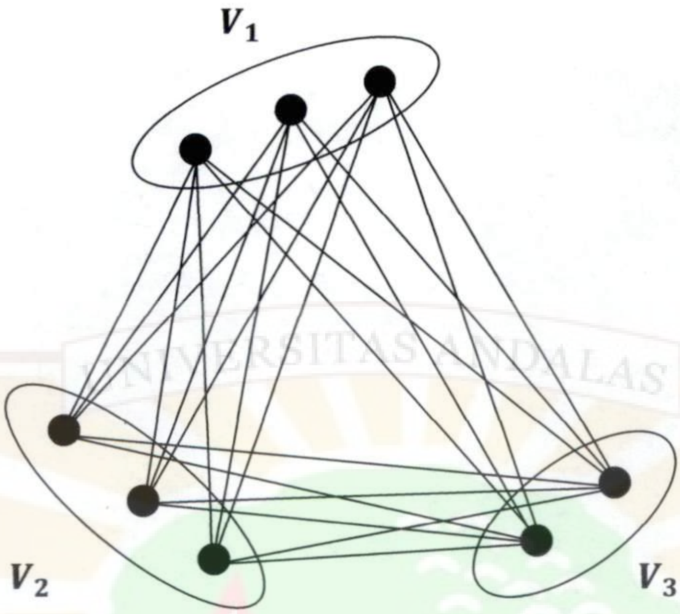


Gambar 3.2 Subgraf yang Diinduksi $H = G - v = K_{2,3}$ dari Graf G

Ilustrasi pewarnaan lokasi c' pada graf terhubung G yang memuat subgraf yang diinduksi $H = K_{2,3,3}$.



Gambar 3.3 Ilustrasi pewarnaan lokasi c' pada graf terhubung G



Gambar 3.4 Subgraf yang Diinduksi $H = G - v = K_{2,3,3}$ dari Graf G

Jadi, terdapat graf G dengan $\chi_L(G) = \sigma(G)$ atau graf G dengan $\chi_L(G) = \sigma(G) + 1$. Jelas bahwa, jika G graf multipartit lengkap, maka $\chi_L(G) = \sigma(G) + 1$. Selanjutnya, akan ditunjukkan syarat perlu dan syarat cukup untuk suatu graf $G \in \mathscr{H}$ yang mempunyai $\chi_L(G) = \sigma(G)$ (atau $\chi_L(G) = \sigma(G) + 1$).

Teorema 3.2 *Misalkan $G \in \mathscr{H}$. Maka $\chi_L(G) = \sigma(G)$ jika dan hanya jika satu dari dua syarat berikut terpenuhi :*

1. *Untuk setiap bilangan bulat i dengan $1 \leq i \leq k$, $a_i \in \{0, n_i\}$ dan terdapat paling sedikit dua bilangan bulat yang berbeda j, j' dengan $1 \leq j, j' \leq k$ untuk $a_j = a_{j'} = 0$.*
2. *Terdapat tepat satu bilangan bulat j dengan $1 \leq j \leq k$ sehingga $0 < a_j < n_j$, dan $a_j < \lceil n_j/2 \rceil$ untuk bilangan bulat j.*

Bukti :

Misalkan $\sigma = \sigma(G)$. Akan ditunjukkan jika Syarat 1 atau Syarat 2 terpenuhi, maka graf G memiliki sebuah pewarnaan lokasi dengan σ warna. Asumsikan Syarat 1 terpenuhi. Misalkan $u \in V_j$. Misalkan c_1 adalah suatu pewarnaan G yang diperoleh dari pewarnaan c' pada bukti Teorema 3.1, dengan mengatur pewarnaan $c_1(x) = c'(x)$ untuk $x \neq v$ dan $c_1(v) = c'(u)$. Karena $a_i \in \{0, n_i\}$ untuk setiap bilangan bulat i dengan $1 \leq i \leq k$, maka tidak ada dua titik yang berbeda di H yang diberi warna sama oleh c_1. Oleh karena itu, hanya u dan v titik-titik yang berbeda di G yang saling bertukar warna. Akibatnya, $uv \notin E(G)$ dan jika $w \in V_j'$, maka $d(u, w) = 1$ dan $d(v, w) = 2$. Jadi, c_1 adalah sebuah pewarnaan lokasi di G yang menggunakan σ warna dan $\chi_L(G) = \sigma$.

Untuk selanjutnya, diasumsikan Syarat 2 terpenuhi. Misalkan $V_j = \{v_1, v_2, \dots, v_{aj}, v_{aj+1}, \dots, v_{nj}\}$ sedemikian sehingga $v_i \in V_j$ bertetangga ke v jika $(1 \leq i \leq a_j)$ dan v_i tidak bertetangga ke v untuk selainnya. Warnai titik-titik di $G - v$ dengan pewarnaaan c' yang digambarkan pada bukti Teorema 3.1. Karena $0 < a_j < \left\lceil \frac{n_j}{2} \right\rceil$, maka titik v_{n_j} tidak bertetangga ke v dan v_{n_j} adalah satu-satunya titik di H yang ditandai dengan warna $c'\left(v_{n_j}\right)$. Misalkan c_2 adalah pewarnaan yang diperoleh dari c' dengan menetapkan $c_2(x) = c'(x)$ untuk $x \neq v$ dan $c_2(v) = c'\left(v_{n_j}\right)$. Karena $vv_{n_j} \notin E(G)$, c_2 adalah sebuah pewarnaan sejati di G yang menggunakan σ warna.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa c_2 adalah sebuah pewarnaan lokasi di G. Misalkan Π adalah partisi dari $V(G)$ yang memuat kelas-kelas warna yang dihasilkan dari c_2. Untuk menunjukkan kontradiksi, asumsikan terdapat titik-titik berbeda x dan y di G sedemikian sehingga $c_{\prod}(x) = c_{\prod}(y)$, maka $c_2(x) = c_2(y)$. Berdasarkan definisi c_2, hal ini menunjukkan bahwa $x, y \in V_j \cup \{v\}$. Jika $x, y \in V_j$, maka $c_{\prod}(x) \neq c_{\prod}(y)$ karena tepat satu dari x dan y yang bertetangga ke v, tetapi tidak pernah bertetangga dengan v_{n_j}. Jadi, satu dari x dan y adalah v, sebut $x = v$. Karena $c_2(x) = c_2(y)$, ini menunjukkan bahwa $y = v_{n_j}$. Misalkan C_1 adalah himpunan titik-titik yang diwarnai dengan warna $c_2(v_1)$ pada pewarnaan c_2 di G. Maka $C_1 \subseteq V_j$ dan $d(y, C_1) = 2$. Di sisi lain, karena x bertetangga ke v_1, ini menunjukkan bahwa $d(x, C_1) = 1$. Oleh karena itu, $c_{\prod}(x) \neq c_{\prod}(y)$, hal ini kontradiksi dengan asumsi bahwa $c_{\prod}(x) = c_{\prod}(y)$. Jadi, c_2 adalah sebuah pewarnaan lokasi di G.

Sebaliknya, akan ditunjukkan jika graf G memiliki sebuah pewarnaan lokasi dengan σ warna maka Syarat 1 atau Syarat 2 terpenuhi. Untuk menunjukkan hal ini, digunakan kontradiksi yaitu dengan mengasumsikan bahwa terdapat suatu graf $G \in \mathscr{H}$ yang tidak memenuhi Syarat 1 ataupun Syarat 2, dan terdapat sebuah pewarnaan lokasi c_3 di G yang menggunakan σ warna. Jadi, untuk setiap bilangan bulat i dengan $1 \leq i \leq k$, ada tepat $max\{a_i, n_i - a_i\}$ warna yang digunakan untuk mewarnai titik-titik di V_i dan terdapat suatu bilangan bulat $t\ (1 \leq t \leq k)$ dan suatu titik $u \in V_t$ yang tidak bertetangga dengan v, yang memiliki $c_3(u) = c_3(v)$. Karena tidak ada titik di V_t yang berbeda dengan u yang ditandai dengan warna $c_3(u)$. Hal ini menunjukkan bahwa $a_t < \lceil n_t/2 \rceil$.

Selanjutnya, misalkan untuk setiap bilangan bulat i dengan $(1 \leq i \leq k)$, $a_i \in \{0, n_i\}$. Karena $uv \notin E(G)$, hal ini menunjukkan bahwa $a_t = 0$. Karena Syarat 1 tidak terpenuhi, maka untuk setiap bilangan bulat s dengan $1 \leq s \leq k$

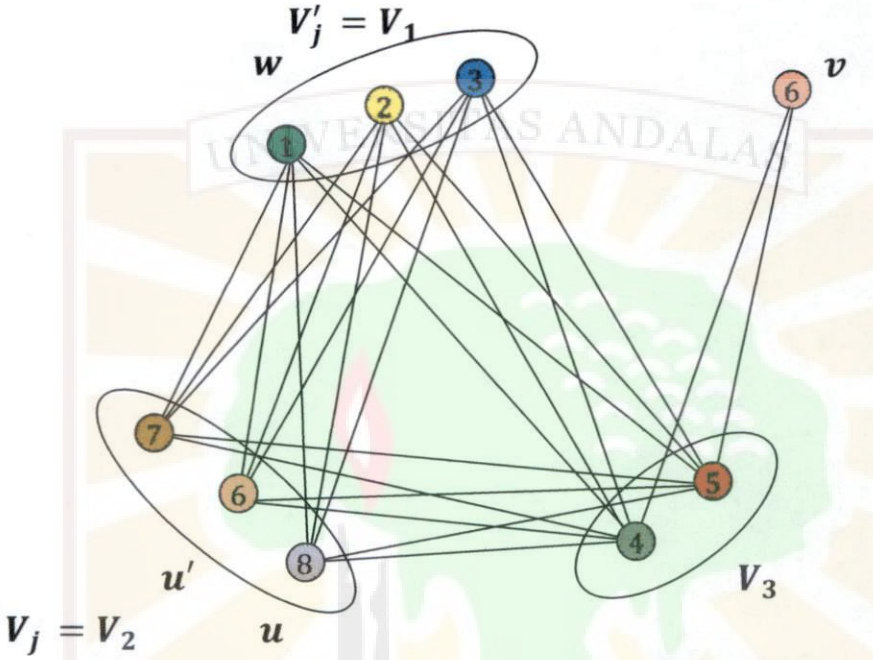
dan $s \neq t$ maka $a_s = n_s$. Jadi, v bertetangga ke setiap titik di H kecuali yang ada di V_t, tidak ada titik di V_t yang bertetangga ke v. Maka $N(u) = N(v)$ dan u dan v tidak memiliki kode warna yang berbeda. Konsekuensinya, harus ada bilangan bulat r yang memenuhi $0 < a_r < n_r$.

Karena syarat 2 tidak terpenuhi, maka ada r adalah satu-satunya bilangan bulat sedemikian sehingga $0 < a_r < n_r$ dan $a_r \geq \lceil n_r/2 \rceil$, atau terdapat suatu bilangan bulat p yang berbeda dengan r, dengan $1 \leq p \leq k$ sedemikian sehingga $0 < a_p < n_p$. Oleh karena itu, perhatikan dua kasus berikut.

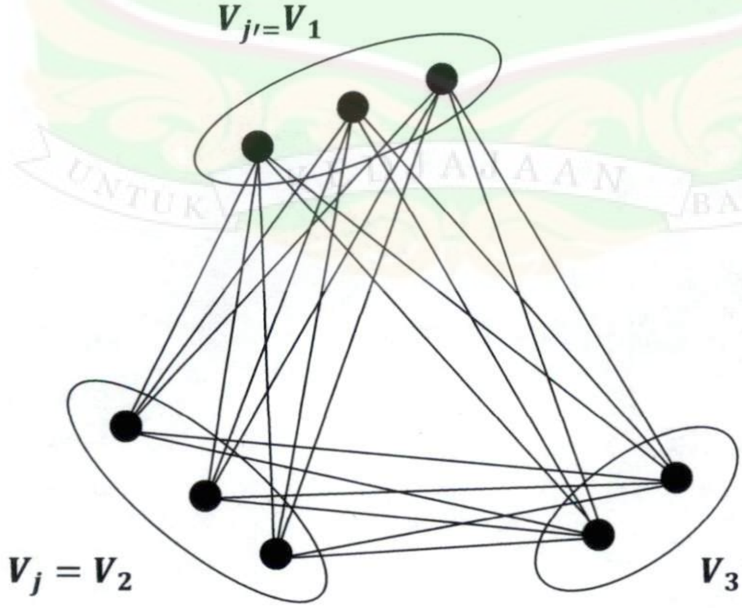
Kasus 1: r adalah bilangan bulat yang memenuhi $0 < a_r < n_r$ tetapi $a_r \geq \lceil n_r/2 \rceil$ karena $a_t < \lceil n_t/2 \rceil$, hal ini menunjukkan bahwa $t \neq r$. Misalkan $z' \in V_r$ sedemikian sehingga $z'v \notin E(G)$. Karena $a_r \geq \lceil n_r/2 \rceil$, maka terdapat $z \in V_r$ sedemikian sehingga $zv \in E(G)$ dan $c_3(z) = c_3(z')$. Karena $c_3(u) = c_3(v)$, hal ini menunjukkan bahwa $c_\Pi(z) = c_\Pi(z')$, sebuah kontradiksi.

Kasus 2: terdapat suatu bilangan bulat p dengan $1 \leq p \leq k$ dan $p \neq r$ sedemikian sehingga $0 < a_p < n_p$. Pertama, akan ditunjukkan bahwa $t = r$. Untuk menunjukkan hal ini, akan digunakan kontradiksi yaitu dengan mengasumsikan $t \neq r$. Misalkan x dan x' adalah titik-titik yang berbeda di V_r sedemikian sehingga $xv \in E(G)$ dan $x'v \notin E(G)$. Karena $c_3(u) = c_3(v)$, hal ini menunjukkan bahwa $c_\Pi(x) = c_\Pi(x')$ kontradiksi dengan asumsi. Di sisi lain, jika $t \neq p$, maka terdapat titik-titik y dan y' di V_p sedemikian sehingga $yv \in E(G)$ dan $y'v \notin E(G)$. Karena $c_3(u) = c_3(v)$, hal ini menunjukkan bahwa $c_\Pi(y) = c_\Pi(y')$, sebuah kontradiksi. Maka $t = r = p$, yang kontradiksi dengan asumsi $t \neq r$. ■

Perhatikan Ilustrasi **Gambar 3.5.** Pewarnaan lokasi c_1 pada graf terhubung G yang memuat subgraf yang diinduksi $H = K_{2,3,3}$ sedemikian sehingga Syarat 1 terpenuhi, maka diperoleh $\chi_L(G) = \sigma(G) = 8$.



Gambar 3.5 Ilustrasi pewarnaan lokasi c_1 pada graf terhubung G dengan $\chi_L(G) = \sigma(G) = 8$



Gambar 3.6 Subgraf yang Diinduksi $H = G - v = K_{2,3,3}$ dari Graf G

Dua hasil berikut adalah konsekuensi dari Teorema 3.2

Akibat 3.3 *Misalkan* G *adalah graf terhubung dengan orde* $n \geq 3$ *dan* $v \in V(G)$. *Jika* $G - v$ *adalah graf multipartit lengkap, maka* $\frac{n+1}{2} \leq \chi_L(G) \leq n$.

Bukti:

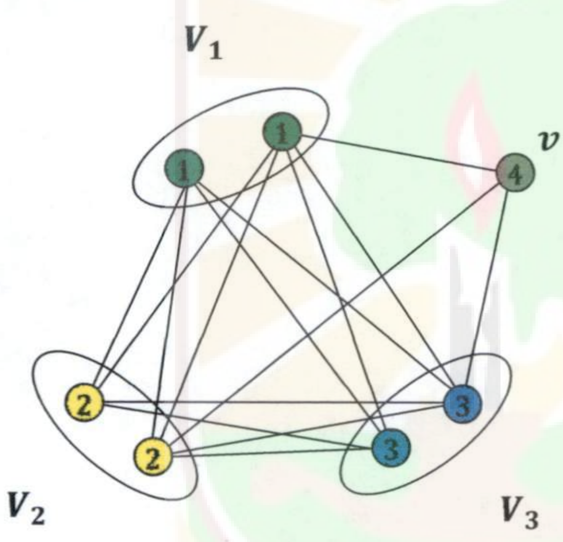
Benar untuk $\chi_L(G) \leq n$. Selanjutnya, akan ditunjukkan jika G graf terhubung dengan *orde* $n \geq 3$ dan $v \in V(G)$ sedemikian sehingga $G - v$ adalah graf multipartit lengkap, maka $\chi_L(G) \geq \frac{n+1}{2}$. Misalkan $G - v$ adalah graf multipartit lengkap berorde $n - 1$ dengan himpunan partit $V_1, V_2, \dots, V_k$, dimana $k \geq 2$. Untuk setiap bilangan bulat i dengan $1 \leq i \leq k$, misalkan $n_i = |V_i|$ dan misalkan a_i adalah banyaknya titik-titik di V_i yang bertetangga ke v di G. Karena $max\{a_i, n_i - a_i\} \geq n_i/2$ untuk semua $1 \leq i \leq k$, (1) dan $\sigma(G) \geq \frac{n-1}{2}$. Berdasarkan Teorema 3.2, maka $\chi_L(G) \geq \frac{(n-1)}{2}$. Hal ini menunjukkan bahwa jika $\sigma(G) = \frac{(n-1)}{2}$ atau $\sigma(G) = \frac{n}{2}$ maka $\chi_L(G) = \sigma(G) + 1$. Perhatikan 2 kasus berikut.

Kasus 1: $\sigma(G) = (n-1)/2$. Maka n adalah ganjil dan $max\{a_i, n_i - a_i\} = n_i/2$ untuk semua $1 \leq i \leq k$. Selain itu, setiap n_i $(1 \leq i \leq k)$ adalah genap dan v bertetangga tepat ke setengah dari titik-titik di tiap V_i. Berdasarkan Teorema 3.2, $\chi_L(G) = \sigma(G) + 1$.

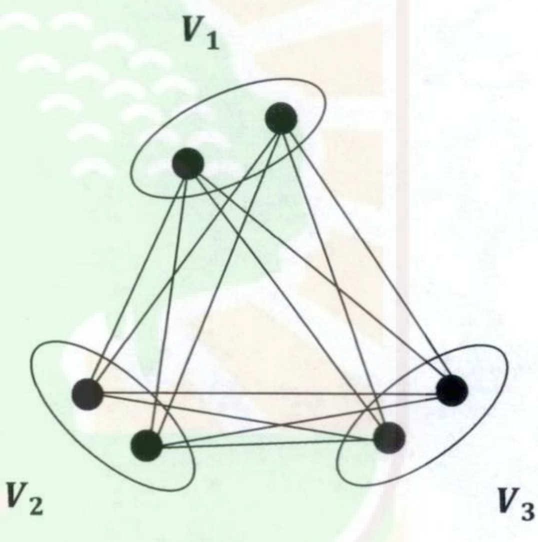
Kasus 2: $\sigma(G) = n/2$. Maka n adalah genap dan $n - 1$ adalah ganjil . Maka n_i adalah ganjil untuk tepat satu i, dimana $1 \leq i \leq k$, sebut n_j adalah ganjil, dan $max\{a_i, n_i - a_i\} = (n_j + 1)/2$. Dan juga, $max\{a_i, n_i - a_i\} = n_i/2$ untuk semua i dengan $1 \leq i \leq k$ dan $i \neq j$. Maka, v bertetangga tepat ke setengah dari titik-titik di tiap V_i untuk semua $1 \leq i \leq k$ kecuali V_j, dimana v bertetangga ke $\frac{n_j+1}{2}$ atau $\frac{n_j-1}{2}$ titik di V_j. Berdasarkan Teorema 3.2, $\chi_L(G) = \sigma(G) + 1$. ■

Berikut ini akan diberikan contoh untuk Kasus 1 dan Kasus 2.

Contoh Kasus 1: misalkan G adalah graf terhubung berorde $n = 7$ yang memuat subgraf yang diinduksi $H = K_{2,2,2}$ dengan $\sigma(G) = \frac{(n-1)}{2} = \frac{7-1}{2} = 3$, maka $\chi_L(G) = \sigma(G) + 1 = 3 + 1 = 4$.

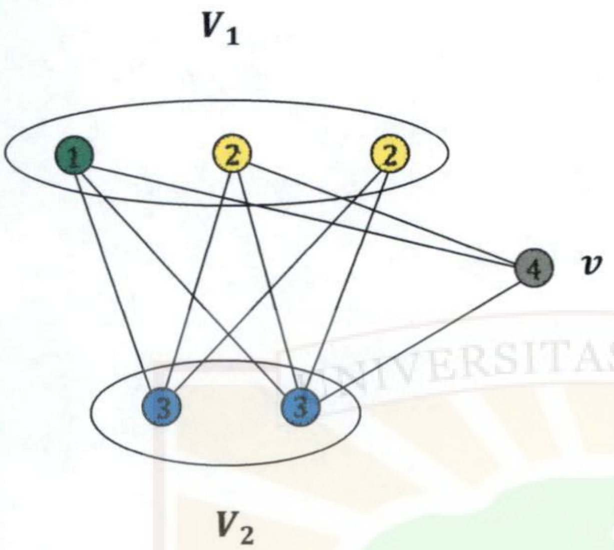


Gambar 3.7 Graf terhubung G berorde $n = 7$ dengan $\chi_L(G) = \sigma(G) + 1 = 4$

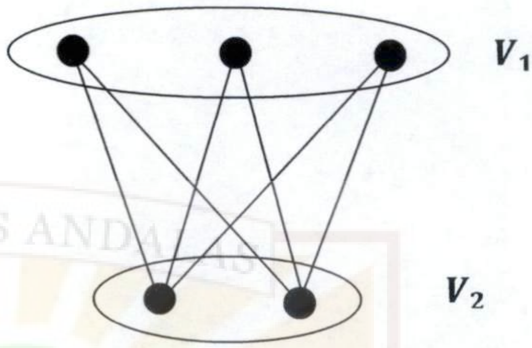


Gambar 3.8 Subgraf yang Diinduksi $H = G - v = K_{2,2,2}$ dari Graf G

Contoh Kasus 2: misalkan G adalah graf terhubung berorde $n = 6$ yang memuat subgraf yang diinduksi $H = K_{2,3}$ dengan $\sigma(G) = \frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3$, maka $\chi_L(G) = \sigma(G) + 1 = 3 + 1 = 4$.



Gambar 3.9 Graf terhubung G berorde $n = 6$ dengan $\chi_L(G) = \sigma(G) + 1 = 4$



Gambar 3.10 Subgraf yang Diinduksi $H = G - v = K_{2,3}$ dari Graf G

Akibat 3.4 *Untuk setiap bilangan bulat* $n \geq 3$ *dan setiap bilangan bulat* k *dengan* $(n+1)/2 \leq k \leq n$, *terdapat suatu graf terhubung* G *dengan orde* n *dan* $v \in V(G)$ *sedemikian sehingga* $G - v$ *adalah graf multipartit lengkap dan* $\chi_L(G) = k$.

Bukti:

Berdasarkan Teorema 2.3.2, hasilnya adalah benar untuk $k = n$. Untuk $k = n - 1$, misalkan $H = K_{n_1,n_2,n_3}$ adalah graf tripartit lengkap dengan himpunan partit V_1, V_2, V_3 , dimana $|V_i| = n_i$ untuk $1 \leq i \leq 3$. Misalkan G adalah suatu graf yang diperoleh dari graf H dengan menambahkan satu titik baru v dan menghubungkan v ke tiap titik di V_1 tetapi tidak ke titik-titik di V_2 dan V_3. Berdasarkan Teorema 3.2 $\chi_L(G) = \sigma(G) = n - 1$.

Misalkan $\frac{n+1}{2} \leq k \leq n - 2$ dan $n \geq 5$. Perhatikan dua kasus berikut.

Kasus 1: n adalah genap. Misalkan $H = K_{2,n-3}$ dengan himpunan partit V_1 dan V_2, dimana $|V_1| = 2$ dan $|V_2| = n - 3$. Untuk setiap bilangan bulat l dengan $\frac{n-2}{2} \leq l \leq n-4$, misalkan G_l adalah graf yang diperoleh dengan menambahkan satu titik baru v ke graf H dan menggabungkan v ke tepat satu titik di V_1 dan ke tepat l titik-titik di V_2, maka $\sigma(G_l) = l + 1$. Berdasarkan Teorema 3.2., $\chi_L(G_l) = \sigma(G_l) + 1 = l + 2$. Maka terdapat suatu graf $G \in \mathscr{H}$ sedemikian sehingga $\chi_L(G_l) = k$ untuk setiap $k \in \left\{\frac{n+2}{2}, \frac{n+4}{2}, \dots, n-2\right\}$.

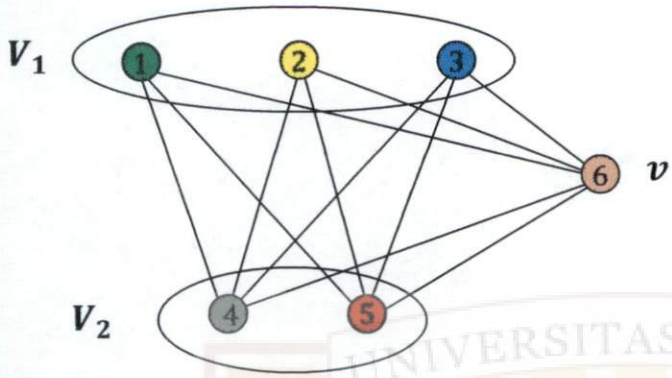
Kasus 2: n adalah ganjil. Misalkan $H = K_{2,n-3}$ dengan himpunan partit V_1 dan V_2, dimana $|V_1| = 2$ dan $|V_2| = n - 3$. Untuk setiap bilangan bulat l dengan $\frac{n-3}{2} \leq l \leq n-4$, misalkan G_l adalah graf yang diperoleh dengan menambahkan satu titik baru v ke graf H dan menghubungkan v ke tepat satu titik di V_1 dan ke tepat l titik di V_2, maka $\sigma(G_l) = l + 1$. Berdasarkan Teorema 3.2, $\chi_L(G_l) = \sigma(G_l) + 1 = l + 2$. Maka terdapat suatu graf $G \in \mathscr{H}$ sedemikian sehingga $\chi_L(G_l) = k$ untuk setiap $k \in \left\{\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}, \dots, n-2\right\}$.

Oleh karena itu, untuk setiap pasang k, n bilangan bulat dengan $n \geq 3$ dan $\frac{n+1}{2} \leq k \leq n$, maka terdapat suatu graf terhubung G berorde $n \geq 3$ dengan $\chi_L(G) = k$. ■

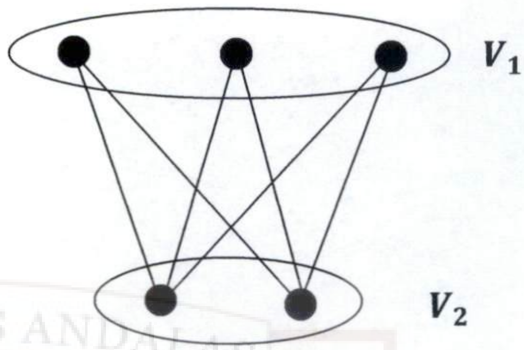
Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut :

- untuk $k = n$

  misalkan $k = n$ dengan $n = 6$, maka terdapat suatu graf G berorde $n = 6$ dan $v \in V(G)$ sedemikian sehingga $H = G - v = K_{2,3}$ adalah graf multipartit lengkap dengan $\chi_L(G) = k = n = 6$.



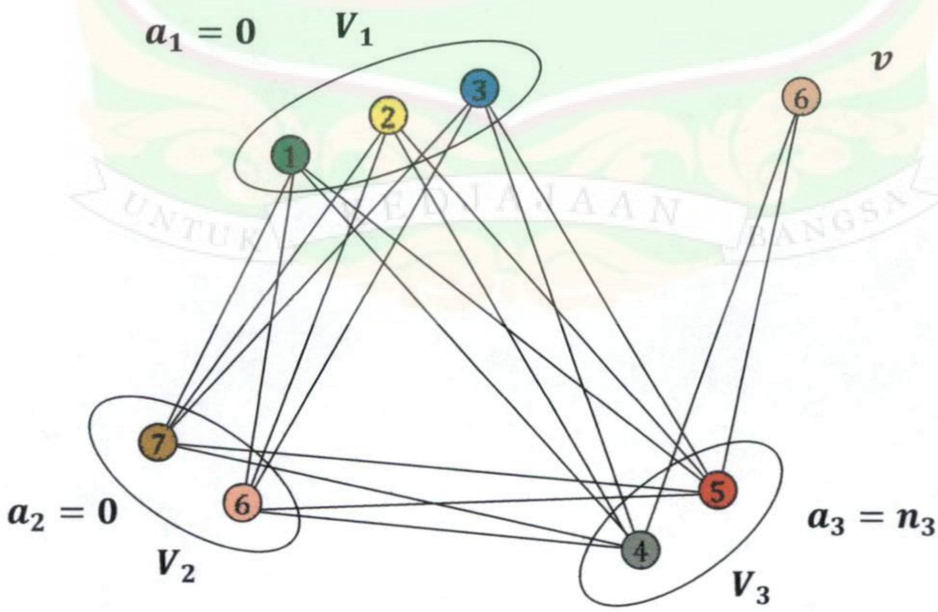
Gambar 3.11 Graf terhubung G berorde $n = 6$ dengan $\chi_L(G) = k = n = 6$



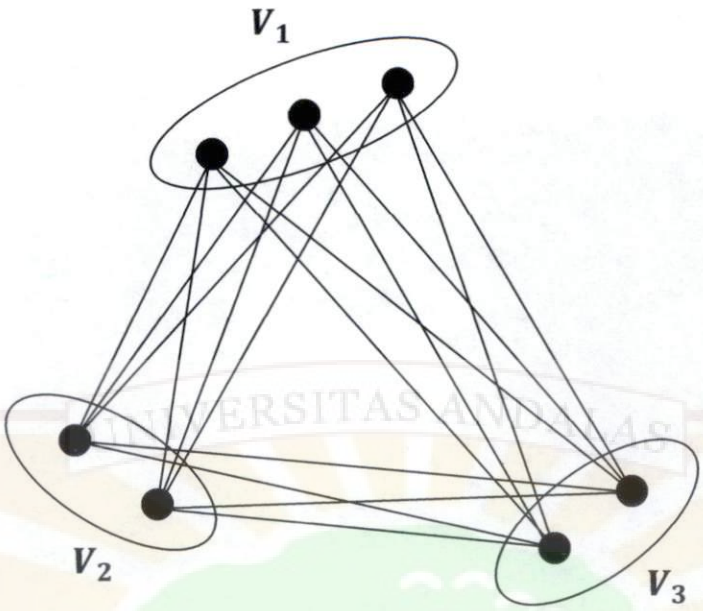
Gambar 3.12 Subgraf yang Diinduksi $H = G - v = K_{2,3}$ dari Graf G

- untuk $k = n - 1$

  misalkan $k = n - 1$ dengan $n = 8$, maka terdapat suatu graf G berorde $n = 8$ dan $v \in V(G)$ sedemikian sehingga $H = G - v = K_{2,2,3}$ adalah graf multipartit lengkap dengan $\chi_L(G) = k = n - 1 = 7$.



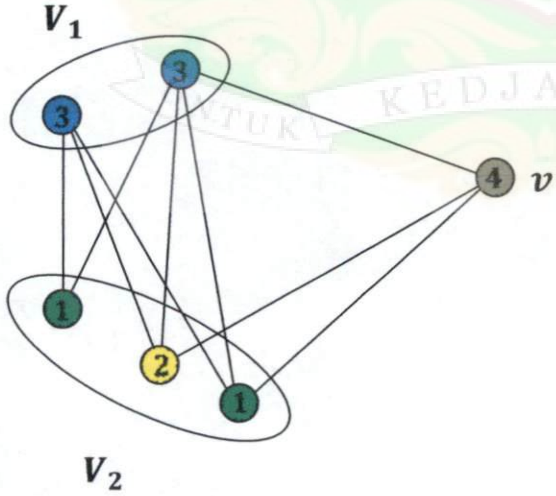
Gambar 3.13 Graf terhubung G berorde $n = 8$ dengan $\chi_L(G) = k = n - 1 = 7$



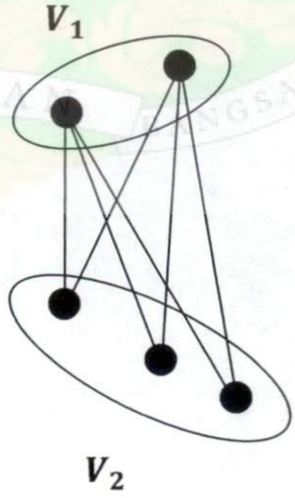
Gambar 3.14 Subgraf yang Diinduksi $H = G - v = K_{2,2,3}$ dari Graf G

- untuk $\frac{n+1}{2} \leq k \leq n - 2$ dan $n \geq 5$

  Kasus 1: n genap dengan $n = 6$. Misalkan $\frac{n-2}{2} \leq l \leq n - 4$, maka terdapat suatu graf G_l berorde $n = 6$ dan $v \in V(G)$ sedemikian sehingga $H = G - v = K_{2,3}$ adalah graf multipartit lengkap dengan $\chi_L(G_l) = \sigma(G_l) + 1 = 4$.

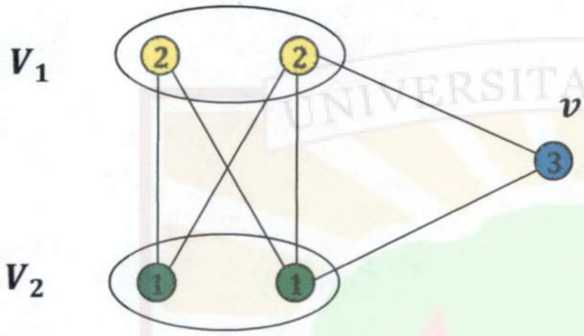


Gambar 3.15 Graf G_l dengan $\chi_L(G_l) = \sigma(G_l) + 1 = 4$

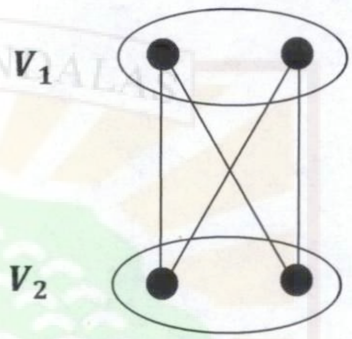


Gambar 3.16 Subgraf yang Diinduksi $H = G - v = K_{2,3}$ dari G

Kasus 2: n ganjil dengan $n = 5$. Misalkan $\frac{n-3}{2} \leq l \leq n-4$, maka terdapat suatu graf G_l berorde $n = 5$ dan $v \in V(G)$ sedemikian sehingga $H = G - v = K_{2,2}$ adalah graf multipartit lengkap dengan $\chi_L(G_l) = \sigma(G_l) + 1 = 3$.



Gambar 3.17 Graf G_l dengan $\chi_L(G_l) = \sigma(G_l) + 1 = 3$



Gambar 3.18 Subgraf yang Diinduksi $H = G - v = K_{2,2}$ dari Graf G

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh pada Bab III, dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik lokasi dari suatu graf terhubung G dengan orde $n \geq 3$ dan $v \in V(G)$ sedemikian sehingga $G - v$ merupakan graf multipartit lengkap, adalah $\chi_L(G) = \sigma(G)$, jika dan hanya jika salah satu dari dua syarat berikut terpenuhi :

1. untuk setiap bilangan bulat i dengan $1 \leq i \leq k$, $a_i \in \{0, n_i\}$ dan terdapat paling sedikit dua bilangan bulat yang berbeda j, j' dengan $1 \leq j, j' \leq k$ untuk $a_j = a_{j'} = 0$
2. terdapat tepat satu bilangan bulat j dengan $1 \leq j \leq k$ sehingga $0 < a_j < n_j$, dan $a_j < \left\lceil \frac{n_j}{2} \right\rceil$ untuk bilangan bulat j

atau $\chi_L(G) = \sigma(G) + 1$, dengan $\frac{n+1}{2} \leq \chi_L(G) \leq n$.

4.2 Saran

Karena masih banyak bilangan kromatik lokasi yang belum ditemukan. Untuk selanjutnya, penulis menyarankan untuk mengkaji bilangan kromatik lokasi dari graf terhubung G dengan subgraf yang diinduksi berupa graf lengkap, lingkaran, lintasan, atau gabungan dari graf lengkap dan lintasan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Chartrand, G. and O.R. Oellermann,.1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory.* McGra-Hill, Inc., United States

[2] Chartrand, G., dkk. 2002. The locating-chromatic number of a graph. *Bull. Inst. Combin. Appl.* **36** : 89-101.

[3] Chartrand, G., dkk. 2003. Graphs of order n with locating-chromatic number $n-1$. *Science Direct, Discrete Math.* **269** : 65-79.

[4] Harju, Tero. 2007. *Graph Theory*. University of Turku, Finland

[5] Hartsfield, Nora and G. Ringel. 1994. *Pearls in Graph Theory*. Academic Press, Inc., United States

[6] Humaira, Reisha. Tanpa tahun. Beberapa aplikasi graf dan kombinatorial untuk menentukan jumlah isomer senyawa kimia. http://www.informatika.org/~rinaldi/Matdis/2006-2007/Makalah/Makalah0607-15.pdf . Tanggal akses : 15 Desember 2010 pukul 20.15 WIB

[7] Johnson, M.A. 2003. Structure-activity maps for visualing the graphs variables arising in drug design, *J. Biopharm Satatist.***53**(**128**) : 827-840.

[8] Ramdani, Rismawati. 2009. Bilangan Kromatik Lokasi dari Beberapa Graf Hasil Kali Kartesius. *Tesis S-2*, ITB Central Library.