PENYELESAIN MIXED INTEGER PROGRAMMING DENGAN MENGGUNAKAN METODE BRANCH AND BOUND

TESIS

MULYADI. A
06215042

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2008

Penyelesaian *Mixed Integer Programming*

Dengan Menggunakan Metode *Branch And Bound*

Oleh : Mulyadi.A

(Dibawah bimbingan Dr.Muhafzan, M.Si, dan Haripamyu, M.Si)

RINGKASAN

Dalam permasalahan optimisasi selalu dituntut untuk memaksimalkan atau meminimalkan sebuah besaran tertentu, yang disebut dengan fungsi tujuan objektif. Fungsi tujuan objektif ini bergantung pada sejumlah variabel masukan (*entering variabel*), melalui satu atau lebih kendala (*constraints*). Model untuk merepresentasikan permasalahan tersebut di atas dinamakan dengan program linier (*linear programming*).

Integer programming adalah bentuk lain dari program linier dengan variabel keputusan dibatasi *integer, mixed integer* atau *zero-one*. Dalam menyelesaikan masalah *integer programming*, dapat digunakan beberapa metode, antara lain metode *Branch and Bound*, metode *Cutting Plane* dan metode Balas.

Tujuan dari penelitian ini adalah, jika diberikan masalah perencanaan linier

maksimumkan

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

dengan kendala

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array}$$

$$x \geq \mathbf{0}$$

Bagaimana menyelesaikan permasalahan di atas yang variabel keputusannya merupakan *mixed integer*, dengan menggunakan metode *Branch and Bound*.

Untuk mencapai tujuan ini, beberapa tinjauan pustaka yang berkaitan dengan permasalahan perencanaan linier *mixed integer*, seperti sistim persamaan linier,sistem pertidaksamaan linier, matriks, eliminasi Gauss-Jordan, masalah perencanaan linier, metode simpleks, masalah perencanaan linier *integer* dan metode *Branch and Bound* .

Dalam metode *Branch and Bound* nilai optimal sebuah fungsi tujuan objektif diperoleh melalui beberapa tahap, yaitu : *Branching, Bounding* dan *Fathoming*

Dari hasil penelitian diperoleh kesimpulan bahwa penyelesaian masalah *mixed integer programming* dapat dilakukan dengan menggunakan metode *Branch and Bound*.

Sesungguhnya ,

orang-orang yang bertakwa

berada dalam naungan (yang teduh)

dan (di sekitar) mata-mata air.

(Al-Mursalaat, 41)

Kupersembahkan ,karya ini untuk :

Kedua orang tuaku ,mertuaku, istriku tercinta (Tuti)

dan anak-anakku tersayang (Rezki, Iif dan Rifa)

juga kakak-kakak dan adikku

Dan ucapan terima kasih buat:

Pak Fitnedi dan ni Yus, yang telah ikut

menjaga dan mengawasi buah hatiku

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Saya menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa pernyataan dalam tesis saya yang berjudul: "PENYELESAIAN *MIXED INTEGER PROGRAMMING* DENGAN MENGGUNAKAN METODE *BRANCH AND BOUND*" adalah hasil karya saya sendiri, dan bukan merupakan ciplakan dari hasil kerja/ karya orang lain, kecuali kutipan yang sumbernya dicantumkan.

Jika dikemudian hari pernyataan ini tidak benar, maka status kelulusan dan gelar yang saya peroleh menjadi batal dengan sendirinya.

Padang, 10 Juli 2008

Yang membuat pernyataan

Mulyadi.A

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 18 Maret 1967 di Barulak, sebagai anak kelima dari Bapak H. Anwar Dt. Indo Marajo dan Ibu Hj. Djusma. Penulis menamatkan SD pada tahun 1980 di Barulak, SMP tahun 1983 di Tanjung Alam, Kecamatan Salimpaung, Kabupaten Tanah Datar dan SMA tahun 1986 di Payakumbuh. Pada tahun 1989 penulis menyelesaikan Diploma III pada jurusan Matematika FPMIPA IKIP Padang (sekarang Universitas Negeri Padang) dan pada tahun 1992 penulis memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada jurusan Matematika FKIP Universitas Muhammadiyah Sumatera Barat (UMSB) di Padang Panjang.

Pada tahun 1990 penulis ditugaskan menjadi Guru di SMA Negeri Muara Labuh Kabupaten Solok. Pada tahun 1995 penulis pindah tugas ke SMAN 3 Kotamadya Solok. Pada tahun 2006 penulis memperoleh kesempatan meneruskan pendidikan pada Program Pascasarjana Universitas Andalas Padang.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr.Wb

Syukur kehadirat Illahi atas segala limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga dengan kekuatan-Nyalah penulis dapat menyelesaikan sebuah karya kecil yang merupakan suatu tahap kehidupan yang harus dilalui yaitu sebuah tesis yang berjudul Penyelesaian *Mixed Integer Programming* dengan Menggunakan Metode *Branch and Bound*. Tesis ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Pasca Sarjana Universitas Andalas.

Selanjutnya penulis mengucapkan terima kasih atas perhatian, dorongan, kritik dan saran kepada :

1. Bapak Prof.Dr.Ir.H.Novirman Jamarun, M.Sc, sebagai Direktur Pascasarjana Universitas Andalas, Padang.
2. Bapak Dr.Muhafzan, M.Si, sebagai ketua komisi pembimbing.
3. Ibu Haripamyu, M.Si, sebagai anggota komisi pembimbing, keduannya yang telah penuh perhatian dan kesabaran dalam memberikan bimbingan dan nasehat selama penulisan tesis ini.
4. Bapak Jenizon, M.Si sebagai ketua program studi Matematika Universitas Andalas, Padang.
5. Bapak Zulakmal, M.Si, sebagai koodinator program S2 matematika guru.
6. Ibu Dr.Susila Bahri, M.Sc, Bapak Dr.I Made Arnawa, dan Bapak Zulakmal, M.Si, selaku penguji.
7. Bapak Busnal,S.Pd, selaku Kepala Sekolah SMAN 3 Kota Solok, yang telah memberikan kesempatan.
8. "Istriku" Restu Pujiastuti,S.Pd, M.Si, yang selalu memberikan semangat, motivasi yang tulus, dukungan moril dan materiil yang sangat berarti bagi penulis.

9. “Anak-anakku” , Rezki, Iif dan Rifa, yang selalu memberikan semangat dan kiriman do’a.
10. Ibunda Hj.Djusma, Hj. Tiramah.R, dan ayahanda H.Anwar Dt.Indo Marajo, yang senantiasa memberikan restu.
11. Adinda Yerizon, M.Si dan Erni Suharti, S.Pd ,yang selalu siap membantu.
12. Teman-teman seperjuangan pada jurusan matematika Universitas Andalas, Padang.
13. Teman-teman guru SMA Negeri 3 Kota Solok.
14. Dan semua pihak yang telah membantu penulisan tesis ini dan tidak dapat disebutkan satu persatu.

Padang, Juli 2008

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Nomor Halaman

DAFTAR GAMBAR

Nomor Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam permasalahan optimisasi selalu dituntut untuk memaksimalkan atau meminimalkan sebuah besaran tertentu, yang disebut dengan fungsi tujuan objektif. Fungsi tujuan objektif ini bergantung pada sejumlah variabel masukan (*entering variabel*), melalui satu atau lebih kendala (*constraints*). Model untuk merepresentasi-kan permasalahan tersebut di atas dinamakan dengan program linier (*linear programming*).

Dalam program linier variabel keputusan dan kendala dibatasi bilangan nyata, namun seringkali suatu keputusan menginginkan variabel berupa bilangan bulat agar keputusan menjadi realistik, misalnya jika variabel keputusan hasil produksi suatu pabrik berupa sepatu atau makanan kaleng. Janggal rasanya kalau suatu keputusan suatu produksi menghasilkan 20,7 pasang sepatu atau 40,3 makanan kaleng, tetapi akan lebih terasa realistik jika pabrik tersebut menghasilkan 21 pasang sepatu atau 40 kaleng makanan kaleng. Untuk menyelesaikan permasalahan ini digunakan *integer programming* yang merupakan bentuk lain dari program linier.

Integer programming dapat dipergunakan untuk menyelesaikan permasalahan *integer linear programming* dan *integer non-linear programming*. *Integer linear programming* adalah *integer programming* dengan fungsi tujuan dan kendala berupa pertidaksamaan linier, sedangkan *integer non-linear programming* adalah *integer programming* dengan fungsi tujuan dan kendala berupa pertidaksamaan non-linier.

Permasalahan *integer linear programming* mencakup permasalahan semua *integer*, *mixed integer* dan permasalahan *zero-one*. Permasalahan semua *integer* adalah permasalahan *integer linear programming* dengan semua variabel kendala dan keputusan berupa bilangan *integer*. Permasalahan *mixed integer* adalah permasalahan *integer linear programming* dengan kendala dibatasi bilangan *integer* dan sebagian variabel keputusan berupa bilangan *integer*. Sedangkan permasalahan *zero-one* adalah permasalahan *integer linear programming* dengan variabel keputusan satu dan nol.

Terdapat beberapan metode untuk menyelesaikan masalah *integer linear programming*, Dengan metode-metode ini nanti akan dibuat batasan-batasan khusus yang akan memaksa pemecahan optimum dari masalah program linier untuk bergerak ke arah pemecahan *integer*, *mixed integer* atau *zero-one* yang diinginkan. Metode-metode itu adalah metode *Branch and Bound*, metode *Cutting Plane* dan metode *Balas*. Diantara metode-metode yang ada, untuk menyelesaikan *integer programming* dengan variabel keputusan berupa *integer* dan *mixed integer* hanya dapat digunakan metode *Branch and Bound* dan metode *Cutting Plane*.

Dalam metode *Branch and Bound* penyelesaian *integer* atau *mixed integer* diperoleh dengan melakukan pencabangan pada penyelesaian yang bukan *integer* sehingga didapatkan batas bawah atau batas atas yang optimal dari suatu permasalahan perencanaan *integer*. Sedangkan dalam metode *Cutting Plane* dibuat kendala tambahan yang memotong daerah penyelesaian yang layak dari masalah perencanaan *integer* atau *mixed integer*, sehingga dapat mengeliminasi penyelesaian yang bukan *integer*. Proses pemotongan pada daerah penyelesaian yang layak ini terus berlangsung sehingga diperoleh penyelesaian yang diinginkan.

1.2 Perumusan Masalah

Diketahui masalah perencanaan linier *integer* sebagai berikut

Maksimumkan fungsi objektif

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \ .$$

dengan kendala

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array}.$$

$$x \geq \mathbf{0}\ .$$

Bagaimana menyelesaikan permasalahan di atas yang variabel keputusannya merupakan *mixed integer*, dengan menggunakan metode *Branch and Bound.*

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan nilai optimal dari suatu fungsi objektif dalam program linier yang variabel keputusannya bernilai *mixed integer* dengan menggunakan metode *Branch and Bound.*

1.4 Manfaat Penelitian

Diharapkan penulisan ini dapat memberikan sumbangan pengetahuan baik kepada penulis sendiri maupun bagi pembaca dalam menyelesaikan masalah perencanaan *mixed integer* dengan menggunakan metode *Branch and Bound* .

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Tinjauan teori yang mendasari untuk memahami pembahasan mengenai permasalahan perencanaan *mixed integer* dengan menggunakan metode *Branch and Bound*, antara lain :

2.1 Sistem Persamaan Linier

Suatu persamaan linier dalam n variabel $x_1, x_2, \cdots, x_n$, dapat dinyatakan sebagai sebuah persamaan dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \quad \text{.........} (2.1.1)$$

di mana $a_1, a_2, \cdots, a_n$ dan b adalah konstanta riil

Pemecahan (solusi) dari sebuah persamaan linier $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ adalah sebuah urutan dari n bilangan $s_1, s_2 \cdots, s_n$, sehingga persamaan tersebut dipenuhi bila kita mensubstitusikan $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \cdots x_n = s_n$.

Suatu sistem persamaan linier yang terdiri dari n bilangan yang tak diketahui adalah kumpulan m persamaan linier yang berbentuk sebagai berikut :

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad \text{.........} (2.1.2)$$

di mana $x_1, x_2, \cdots, x_n$ adalah bilangan-bilangan tak diketahui.

Tidak semua sistem persamaan linier mempunyai pemecahan (solusi). Sebuah sistem persamaan linier yang tidak mempunyai pemecahan dikatakan tak konsisten (*inconsistent*), sedangkan jika sekurang-kurangnya ada satu pemecahan, maka sistem persamaan itu dikatakan konsisten (*consistent*).

Ukuran sebuah matriks menyatakan banyaknya baris dan banyaknya kolom dalam sebuah matriks. Jika suatu matriks berukuran $m \times r$ maka matriks tersebut mempunyai banyak baris m dan banyak kolom r. Banyaknya baris yang diikuti banyaknya kolom pada sebuah matriks disebut dengan *ordo* matriks.

Definisi 2.3.2 (Leon,1988)

Jika suatu matriks B yang mempunyai *ordo* $m \times r$ disisipkan pada matriks A yang mempunyai *ordo* $m \times n$, maka matriks yang diperbesar (*augmented matrix*) ditulis sebagai (A|B).

Jadi, jika

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mr} \end{bmatrix}.$$

maka

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mr} \end{array}\right].$$

Definisi 2.3.3 (Noble,1988)

Matriks identitas disimbolkan dengan I_n, adalah sebuah matriks yang mempunyai *ordo* $n \times n$ dengan elemen diagonal utama 1 dan elemen lainnya 0.

Jadi

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.4. Eliminasi Gauss-Jordan

Definisi 2.4.1 (Leon,1988)

Suatu matriks dikatakan memiliki bentuk eselon baris jika :

1. Entri bukan nol pertama dalam setiap baris adalah 1 (utama).
2. Jika baris k tidak seluruhnya mengandung nol, maka banyaknya entri nol di bagian muka pada baris $k+1$ lebih besar dari banyaknya entri nol di bagian muka pada baris k.
3. Jika terdapat baris-baris yang entrinya semuanya nol, maka baris-baris ini berada di bawah baris-baris yang memiliki entri-entri bukan nol.

Contoh 2.4.2

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.4.3 (Leon,1988)

Suatu matriks dikatakan memiliki bentuk eselon baris tereduksi jika :

1. Matriks memiliki bentuk eselon baris.
2. Entri bukan nol pertama dalam setiap baris adalah satu-satunya entri bukan nol dalam kolom yang bersangkutan

Contoh 2.4.4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.4.5 (Leon,1988)

Eleminasi Gauss-Jordan adalah suatu proses menggunakan operasi-operasi baris elementer untuk mengubah suatu sistem linier menjadi sistem yang matriks diperbesarnya menjadi bentuk eselon baris tereduksi.

2.5. Masalah Perencanaan Linier

Masalah perencanaan linier adalah masalah memaksimumkan atau meminimumkan sebuah fungsi objektif dengan n variabel tak diketahui, dan m pertidaksamaan linier sebagai kendala,yaitu :

Maksimumkan fungsi objektif

$$z = c^T x \quad \text{......(2.5.1)}$$

dengan kendala

$$Ax \le b, \quad x \ge 0 \quad \text{......(2.5.2)}$$

atau

Minimumkan fungsi objektif

$$z = c^T x \quad \text{......(2.5.3)}$$

dengan kendala

$$Ax \ge b, \quad x \ge 0 \quad \text{......(2.5.4)}$$

dimana

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \text{dan } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{......(2.5.5)}$$

Secara eksplisit dapat disajikan dalam bentuk

Maksimumkan fungsi objektif

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots \; c_n x_n \quad \text{......(2.5.6)}$$

dengan kendala

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \le & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \le & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \le & b_m \end{matrix} \quad \text{......(2.5.7)}$$

$$x \ge 0 .$$

atau

Minimumkan fungsi objektif

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n \quad ....(2.5.8)$$

dengan kendala

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \geq & b_m \end{array} \quad ....(2.5.9)$$

$$x \geq 0.$$

Dalam membangun suatu model perencanaan linier digunakan karakteristik sebagai berikut :

1. Fungsi tujuan merupakan fungsi dari variabel keputusan yang akan dimaksimumkan atau diminimumkan.
2. Kendala merupakan pembatas yang dihadapi sehingga tidak boleh ditentukan nilai-nilai variabel keputusan secara sebarang.
3. Variabel keputusan adalah variabel yang menguraikan secara lengkap keputusan yang akan dibuat.
4. Pembatas tanda adalah pembatas yang menjelaskan apakah variabel keputusannya diasumsikan hanya bernilai nonnegatif atau variabel keputusan tersebut bernilai positif.

Definisi 2.5.1 (Rao,1995)

Penyelesaian dasar adalah sebuah penyelesaian yang diperoleh dengan mengnolkan sebanyak (n-m) variabel (n $\geq$ m).

Definisi 2.5.2 (Rao, 1995)

Jika seluruh variabel pada suatu penyelesaian dasar berharga non negatif, maka penyelesaian itu disebut daerah penyelesaian dasar yang layak.

Definisi 2.5.3 (Rao, 1995)

Sebuah himpunan S di ruang berdimensi m di sebut himpunan konveks, jika ruas garis yang menghubungkan sebarang sepasang titik di S, semuanya terletak di dalam S.

Definisi 2.5.4 (Rao,1995)

Titik ekstrim adalah sebuah titik pada himpunan konveks yang tidak terletak pada suatu segmen garis yang menghubungkan dua titik lainnya.

2.6 Metode Simpleks

Metode simpleks ialah suatu metode yang dilakukan secara iteratif di mulai dari suatu penyelesaian dasar yang layak ke penyelesaian dasar layak lainnya sehingga akhirnya tercapai suatu pemecahan dasar yang optimum.

Setiap iterasi pada metode simpleks memiliki variabel masukan dan variabel variabel keluaran dinamakan dengan kondisi kelayakan .

Kondisi optimalitas dipilih dari

$$\min = \left\{ \frac{\text{sisi kanan baris}}{\text{koefisien dari variabel masukan pada baris}} \right\}.$$

Sebuah variabel *slack* ditambahkan untuk batasan $\leq$ dan mewakili jumlah kelebihan sisi kanan suatu kendala , dibandingkan sisi kiri dari kendala tersebut. Sebuah variabel *surplus* ditambahkan untuk batasan $\geq$ dan mewakili kelebihan jumlah sisi kiri suatu kendala dibandingakan sisi kanan kendala tersebut.(Taha,2005).

Contoh 2.6.1

1. $2x_1 + 5x_2 - 4x_3 \leq 4$. Tambahkan variabel *slack* s_1 pada ruas kiri, sehingga diperoleh persamaan :

   $2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + s_1 = 4, \quad s_1 \geq 0$.

2. $x_1 - x_2 + x_3 \geq 6$. Karena pada ruas kiri tidak lebih kecil dari ruas kanan maka harus dikurangkan dengan variabel *surplus* e_2 pada ruas kiri sehingga diperoleh persamaan: $x_1 - x_2 + x_3 - e_1 = 6, \quad e_1 \geq 0$.

Masalah perencanaan linier (2.5.6) dapat diselesaikan dengan menggunakan metode simpleks, yaitu dengan merubah bentuk persamaan (2.5.6) ke dalam bentuk:

Maksimumkan fungsi objektif

$$-c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n + 0.x_{n+1} + 0.x_{n+2} + \cdots + 0.x_{n+m} + z = 0 \quad\text{.................(2.6.1)}$$

dengan kendala

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & + & x_{n+1} & & & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & & \cdots & + & x_{n+2} & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & + & \cdots & + & x_{n+m} & = & b_m \end{array} \quad\text{.....(2.6.2)}$$

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m} \geq 0.$$

Persamaan di atas dapat disajikan dalam bentuk Tabel Awal Metode Simpleks, yaitu:

Tabel 2.6.1. Tabel Awal Metode Simpleks (Simarmata,1985).

C_B	V_B	x_1	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+i}	$\cdots$	x_{n+m}	z	b
		c_1	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_n	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	0	
0	x_{n+1}	a_{11}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1n}	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	0	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	x_{n+i}	a_{i1}	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$	a_{in}	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	0	b_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	x_{n+m}	a_{m1}	$\cdots$	a_{mj}	$\cdots$	a_{mn}	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	0	b_m
$z_j - c_j$		$-c_1$	$\cdots$	$-c_j$	$\cdots$	$-c_n$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	1	

Keterangan:

1. Kolom pertama adalah C_B, yaitu koefisien dari variabel dasar.
2. Kolom kedua adalah V_B, yaitu variabel-variabel dasar.
3. Kolom ketiga adalah nilai dari koefisien pada persamaan kendala (2.6.2).
4. Kolom keempat adalah nilai dari koefisien pada persamaan fungsi tujuan (2.6.1).
5. Kolom kelima adalah nilai variabel dasar dan nilai objektif z, sebagai penyelesaian dasar layak yang bersangkutan.

Pada masalah maksimisasi variabel masukan adalah variabel non dasar dengan koefisien paling negatif dalam persamaan z tujuan. Untuk variabel keluaran adalah variabel dasar saat ini yang memiliki titik potong terkecil (rasio minimum penyebut positif secara ketat dengan kata lain penyebutnya tidak boleh negatif) dalam arah variabel masukan. Nilai rasio yang sama dapat dipilih sebarang.

Solusi optimal dicapai ketika semua koefisien non dasar dalam persamaaan z tujuan adalah non negatif.

Langkah-langkah iterasi pada metode simpleks adalah sebagai berikut:

1. Tentukan pemecahan dasar awal yang layak.
2. Pilih variabel masukan di antara variabel nondasar dengan menggunakan kondisi optimalitas.
3. Tentukan nilai variabel dasar yang baru dengan membuat variabel masukan tersebut sebagai variabel dasar dan variabel keluaran sebagai variabel nondasar. Kembali ke langkah 1.

Dalam pertukaran antara variabel masukan dan variabel keluaran dilakukan dengan menggunakan **eleminasi Gauss-Jordan.** Jika salah satu variabel non dasar dapat memperbaiki nilai fungsi tujuan, maka salah satu variabel dasar saat itu harus dikeluarkan dari pemecahan, karena salah satu persyaratan variabel dasar harus tepat sama dengan banyak persamaan. Metode ini dimulai dengan mengidentifikasikan kolom di bawah variabel masukan sebagai kolom masuk. Baris yang berkaitan dengan variabel keluaran disebut **persamaan *pivot*** dan elemen di titik potong antara kolom masuk dan persamaan *pivot* disebut sebagai **elemen *pivot*.**

Setelah dilakukan iterasi penyelesaian yang diperoleh dapat disajikan dalam bentuk Tabel Optimal Metode Simpleks, yaitu :

Tabel 2.6.2. Tabel Optimal Metode Simpleks (Simarmata,1985).

C_B	V_B	x_1	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+i}	$\cdots$	x_{n+m}	z	b_i
		c_1	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_n	0	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	0		
c_1	x_1	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	α_{11}	$\cdots$	α_{1i}	$\cdots$	α_{1m}	0	β_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_j	x_j	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	α_{j1}	$\cdots$	α_{ji}	$\cdots$	α_{jm}	0	β_j
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_n	x_n	0	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	1	α_{n1}	$\cdots$	α_{ni}	$\cdots$	α_{nm}	0	β_m
$z_j - c_j$		0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	z_1	$\cdots$	z_i	$\cdots$	z_m	1	z

Keterangan :

1. Variabel x_j adalah variabel dasar dengan $j = 1, 2, \ldots, n$.
2. x_{n+i} adalah variabel non dasar dengan $i = 1, 2, \ldots, m$.
3. z adalah nilai fungsi tujuan.

Contoh 2.6.3

Maksimumkan fungsi objektif

$$z = 2500x_1 + 3000x_2 .$$

dengan kendala

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 &\leq 180 \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 180 . \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 180 \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0 .$$

Dengan menggunakan metode simpleks tentukan solusi maksimal dari z dan nilai variabel-variabelnya.

Untuk menyelesaikan masalah di atas dengan menggunakan metode simpleks, terlebih dahulu ditambahkan variabel slack pada kendala , sehingga kendala merupakan sebuah persamaan.

Maksimumkan fungsi objektif

$$-2500x_1 - 3000x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 + z = 0.$$

dengan kendala

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + x_3 \quad\quad &= 180 \\ 3x_1 + 4x_2 \quad + x_4 \quad &= 180 . \\ 4x_1 + 3x_2 \quad\quad + x_5 &= 180 \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0.$$

Persamaan di atas dapat disajikan dalam bentuk Tabel Awal Metode Simpleks, yaitu:

Tabel 2.6.3 Tabel Awal Metode Simpleks contoh 2.6.3

C_B	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	b_i
		2500	3000	0	0	0		
0	x_3	2	$6^\bullet$	1	0	0	0	180
0	x_4	3	4	0	1	0	0	180
0	x_5	4	3	0	0	1	0	180
$z_j - c_j$		-2500	-3000	0	0	0	1	0

Keterangan :

Baris ke-1 (baris x_3) adalah persamaan pivot, sedangkan kolom ke-2 (kolom x_2) adalah kolom pivot dan 6 adalah elemen pivot.

Tabel 2.6.4 Tabel Iterasi 1 contoh 2.6.3

C_B	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	b
		2500	3000	0	0	0		
3000	x_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{6}$	0	0	0	30
0	x_4	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1	0	0	60
0	x_5	$3^\bullet$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	90
$z_j - c_j$		-1500	0	500	0	0	1	90000

Tabel 2.6.5 Tabel Optimal Metode Simpleks contoh 2.6.3

C_B	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	b_i
		2500	3000	0	0	0		
3000	x_2	0	1	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{1}{9}$	0	20
0	x_4	0	0	$-\frac{7}{18}$	1	$-\frac{5}{9}$	0	10
2500	x_1	1	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	0	30
$z_j - c_j$		0	0	$\frac{5000}{18}$	0	500	1	135000

Dari tabel diperoleh nilai $x_1 = 30$ dan $x_2 = 20$, sehingga nilai maksimal dicapai sebesar 135000.

2.7 Masalah Perencanaan *Linear Integer*

Masalah perencanaan *linear integer* adalah suatu permasalahan linier yang variabel keputusannya merupakan bilangan *integer* atau *mixed integer*. Masalah perencanaan linier *integer* berhubungan dengan fungsi diskrit yang memerlukan variabel non negatif dan *integer*. Jika penyelesaian optimal dan layak dari sebuah masalah perencanaan linier adalah *integer*, maka penyelesian itu juga merupakan penyelesaian optimal dan layak bagi persoalan *linear integer*. Hal ini berarti bahwa daerah penyelesaian yang layak untuk setiap masalah perencanaan *linear integer*, akan berada dalam daerah penyelesain yang layak untuk masalah perencanaan linier yang mengabaikan batasan *integer* untuk variabelnya. Jika pada persoalan masalah perencanaan *linear integer* semua variabel keputusannya dibatasi bernilai *integer*, maka masalah perencanaan ini disebut permasalahan linier *integer* murni (*Pure Integer Programming*). Sedangkan jika masalah perencanaan *linear integer* beberapa variabel keputusannya dibatasi bernilai *integer*, maka masalah perencanaan ini disebut permasalahan linier *integer* campuran (*Mixed Integer Programming*).

2.8 Metode *Branch and Bound* (Taha,2005)

Metode *Branch and Bound* adalah salah satu cara untuk menyelesaikan masalah perencanaan *linear integer* dengan melakukan pencabangan pada nilai variabel non *integer* yang mengharuskan variabel tersebut bernilai *integer*. Penyelesaian optimum diperoleh dengan menggunakan metode simpleks. Variabel keputusan yang belum memenuhi kriteria kendala dicabangkan menjadi beberapa bagian yang disebut dengan subpersoalan. Pencabangan subpersoalan berdasarkan nilai variabel keputusan yang akan dijadikan *integer*.

Dalam pemecahan linier *integer* murni (*Pure Integer Programming*), pencabangan dilakukan terus pada nilai variabel non *integer* sehingga dihasilkan variabel keputusan bernilai *integer* dan nilai fungsi objektif optimal.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan mulai Desember 2007 sampai dengan bulan Juni 2008. Tempat penelitian adalah di perpustakaan jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas Padang.

3.2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi liteatur. Setelah semua bahan yang diperlukan terkumpul, dipelajari dan dipahami, maka untuk mencapai tujuan penulisan yang pertama dilakukan langkah-langkah penelitian sebagai berikut secara berurutan :

1. Langkah awal adalah merumuskan permasalahan ke dalam bentuk program linier, dengan menentukan fungsi tujuan dan pertidaksamaan kendala.
2. Dengan menggunakan metode simpleks, tentukan nilai masing-masing variabel pada fungsi tujuan.
3. Jika variabel-variabel keputusan dari masalah perencanaan linier sudah merupakan bilangan *mixed integer* yang memenuhi batasan permasalahan, maka pemecahan masalah sudah dapat ditentukan, tetapi jika variabel-variabel dari permasalahan belum memenuhi batasan yang diinginkan maka akan dilakukan langkah kedua, yaitu:
4. Pilih salah satu variabel fungsi tujuan yang merupakan bilangan *non integer* untuk memulai pencabangan. Untuk menentukan pencabangan kita memilih batas atas dan batas bawah dari variabel yang dipilih yang berupa bilangan *integer*. Dari sinilah proses akan bergerak. Didapatnya pemecahan *mixed integer* yang layak dan

memenuhi persyaratan kendala di tahap awal dari perhitungan, adalah penting untuk meningkatkan algoritma Branch and Bound dalam menetapkan batas bawah dari nilai tujuan optimal, sehingga akhirnya dapat secara otomatis menyingkirkan bagian variabel yang tidak dipilih. Jika terjadi pengulangan nilai optimal atau di hasilkan batas atas dari pencabangan yang mempunyai nilai optimal lebih rendah dari batas bawah yang telah didapatkan terlebih dulu, maka proses akan dihentikan.

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Masalah *Mixed Integer Programming*.

Bentuk umum perencanan linier *mixed integer* adalah sebagai berikut :

Maksimumkan fungsi objektif

$$z = c_1x_1 + \cdots + c_jx_j + \cdots + c_nx_n \qquad \text{.......(4.1.1)}$$

dengan kendala

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1j}x_j & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & \cdots & + & a_{ij}x_j & + & \cdots & + & a_{in}x_n & \leq & b_i \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & + & \cdots & + & a_{mj}x_j & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array} \qquad \text{.........(4.1.2)}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, n.$$
$$x_j \in Z, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, p, \quad p < n.$$

Masalah perencanaan linier *mixed integer* adalah masalah menentukan nilai variabel keputusan x_j.

4.2 Prosedur Penyelesaian

Dengan metode simpleks, diperoleh penyelesaian optimal. Jika semua variabel keputusan sudah memenuhi batasan kendala, maka penyelesaian optimal sudah dapat ditentukan, tetapi jika variabel keputusan belum memenuhi kriteria kendala maka proses dilanjutkan dengan menggunakan metode *Branch and Bound.*

Metode *Branch and Bound* memiliki tahapan :

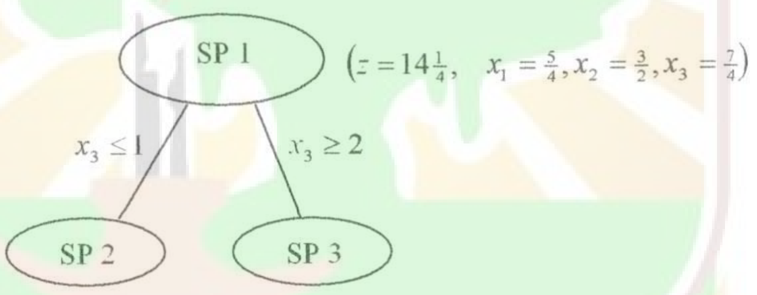
Branching

Definisi 4.2.1. (Bronson,1996)

Branching adalah langkah untuk membuat dua subpersoalan pada variabel keputusan yang belum *integer*, misalnya x_j, dimana $i_1 < x_j < i_2$ dan i_1 , i_2 adalah dua bilangan bulat nonnegatif yang berturutan. Kemudian dibentuk dua masalah baru dengan cara dipilih salah satu untuk memperluas masalah semula dengan kendala $x_j \le i_1$ atau $x_j \ge i_2$.

Pencabangan dilakukan pada subpersoalan yang lebih mendekati optimal. Jika terdapat lebih dari satu subpersolan yang menjadi calon untuk pencabangan maka dipilih subpersoalan yang memiliki nilai z terbesar.

Misalkan dari sebuah masalah perencanaan linier dihasilkan nilai optimal $z = 14\frac{1}{4}$ dengan nilai $x_1 = \frac{5}{4}, x_2 = \frac{3}{2},$ *dan* $x_3 = \frac{7}{4}$. Jika nilai variabel x_3 dibatasi *integer*, maka lakukan pencabangan terhadap x_3, yaitu :



Gambar 2.8.1 Pohon Pencabangan Sub Persoalan 1

Bounding.

Definisi 4.2.2 (Hillier,2001)

Bounding adalah langkah untuk menyelesaikan masing-masing subpersoalan dengan *linear program* yang mengabaikan batasan *integer*.

Untuk masalah maksimisasi (2.5.1), nilai fungsi tujuan optimal yang mengabaikan batasan *integer* adalah batas atas dari nilai *integer* optimal. Untuk masalah minimisasi (2.5.3), nilai fungsi tujuan optimal yang mengabaikan batasan *integer* adalah batas bawah dari nilai *integer* optimal.

Fathoming

Definisi 4.2.3 (Dimyati,1994)

Fathoming adalah langkah untuk menghentikan pencabangan dari suatu subpersoalan

Proses pencabangan dari setiap subpersoalan akan dihentikan jika salah satu dari kriteria di bawah ini dipenuhi :

1. Penyelesaian dari subpersoalan tidak layak.
2. Penyelesaian dari subpersoalan memberikan penyelesaian optimal dengan seluruh variabel bernilai memenuhi kriteria kendala.
3. Nilai z optimal untuk subpersoalan tidak melebihi (lower bound) pada saat itu.

Langkah-langkah penyelesaian perencanaan *mixed integer* dengan menggunakan metode *Branch and Bound* adalah sebagai berikut :

1. Perhatikan variabel keputusan yang harus bernilai *integer*. Bentuk subpersoalan dengan menggunakan pencabangan.
2. Tambahkan kendala baru pada subpersoalan yang telah dicabangkan
3. Jika variabel yang diperlukan sudah *integer*, maka penyelesaian masalah perencanaan linier *mixed integer* sudah optimal, jika tidak ulangi langkah 1

Contoh 4.2.4

Maksimumkan fungsi objektif

$$z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4 \qquad \text{.......(4.1.3)}$$

dengan kendala

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad + 5x_3 \quad\quad &\le 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 \quad\quad &\le 1 \\ 6x_1 - 5x_2 \quad\quad\quad &\le 0 \\ -x_1 \quad\quad + 2x_3 - 2x_4 &\le 3 \end{aligned} \qquad \text{.......(4.1.4)}$$

$x_j \ge 0 \quad untuk \ j = 1,2,3,4.$

$x_j \quad Integer \ untuk \ j = 1,2,3.$

Langkah 1. Metode Simpleks

Untuk menyelesaikan masalah (4.1.3) diatas dengan menggunakan metode simpleks, terlebih dahulu diubah kedalam bentuk.

Maksimumkan fungsi objektif

$$z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4 + 0.x_5 + 0.x_6 + 0.x_7 + 0.x_8 .$$

dengan kendala

$$\begin{array}{lllllllllll}
x_1 & & & + & 5x_3 & & + & x_5 & & = & 10 \\
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & + & x_6 & = & 1 \\
6x_1 & - & 5x_2 & & & & & + & x_7 & = & 0 \\
-x_1 & & & + & 2x_3 & - & x_4 & & + \; x_8 & = & 3
\end{array}$$

$$x_j \geq 0, \quad x_j \quad \text{integer untuk } j = 1,2,3 .$$

Persamaan di atas dapat disajikan dalam bentuk Tabel Awal Metode Simpleks, yaitu:

Tabel 4.2.1 Tabel Awal Metode Simpleks contoh 4.2.4.

C_B	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	z	b_i
		4	-2	7	-1	0	0	0	0	0	
0	x_5	1	0	5	0	1	0	0	0	0	10
0	x_6	1^*	1	-1	0	0	1	0	0	0	1
0	x_7	6	-5	0	0	0	0	1	0	0	0
0	x_8	-1	0	2	-2	1	0	0	1	0	3
$z_j - c_j$		-4	2	-7	1	0	0	0	0	1	

Tabel 4.2.2 Tabel Iterasi 1 contoh 4.2.4.

C_B	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	z	b_i
		4	-2	7	-1	0	0	0	0	0	
0	x_5	0	-1	6	0	1	-1	0	0	0	9
4	x_1	1	1	-1	0	0	1	0	0	0	1
0	x_7	0	-11	$6^{\bullet}$	0	0	-6	1	0	0	-6
0	x_8	0	1	1	-2	0	1	0	1	0	4
$z_j - c_j$		0	6	-11	1	0	4	0	0	1	4

Tabel 4.2.3 Tabel Iterasi 2 contoh 4.2.4.

C_B	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	z	b_i
		4	-2	7	-1	0	0	0	0	0	
0	x_5	0	$10^{\bullet}$	0	0	1	5	-1	0	0	15
4	x_1	1	$\frac{-5}{6}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0
7	x_3	0	$\frac{-11}{6}$	1	0	0	-1	$\frac{1}{6}$	0	0	-1
0	x_8	0	[illegible]	0	-2	0	2	$\frac{-1}{6}$	1	0	5
$z_j - c_j$		0	$\frac{-85}{6}$	0	1	0	-7	$\frac{11}{6}$	0	1	-7

Tabel 4.2.4 Tabel Optimal Metode Simpleks contoh 4.2.4.

C_B	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	z	b_i
		4	-2	7	-1	0	0	0	0	0	
-2	x_2	0	1	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{10}$	0	0	$\frac{3}{2}$
4	x_1	1	0	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	0	$\frac{5}{4}$
7	x_3	0	0	1	0	$\frac{11}{60}$	$\frac{-1}{12}$	$\frac{-1}{60}$	0	0	[illegible]
0	x_8	0	0	0	-2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	0	$\frac{3}{4}$
$z_j - c_j$		0	0	0	1	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{12}$	0	1	$14\frac{1}{4}$

Berdasarkan Tabel 4.2.4 diperoleh penyelesaian optimal, yaitu $z = 14\frac{1}{4}$, dengan $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{7}{4}$, $x_4 = 0$, dan $z = 14\frac{1}{4}$ merupakan batas atas dari fungsi tujuan. Karena nilai $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = \frac{3}{2}$, *dan* $x_3 = \frac{7}{4}$ belum memenuhi kriteria kendala, selanjutnya $z = 14\frac{1}{4}$ dengan $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{7}{4}$, $x_4 = 0$ disebut subpersoalan 1 (SP1). Untuk menjadikan nilai x_1, x_2 *dan* x_3 bernilai integer dilakukan langkah berikut :

Langkah 2. Metode *Branch and Bound*.

Branching

Perhatikan dari hasil Tabel 4.2.4 dimana nilai x_1, x_2 *dan* x_3 belum *integer* , lakukan pencabangan (*Branching*) dengan membuat beberapa subpersoalan baru dari salah satu nilai x_i , misalkan akan dicabangkan nilai x_1, maka

Subpersoalan 2 (SP2) adalah : subpersoalan 1 dengan kendala $x_1 \leq 1$.

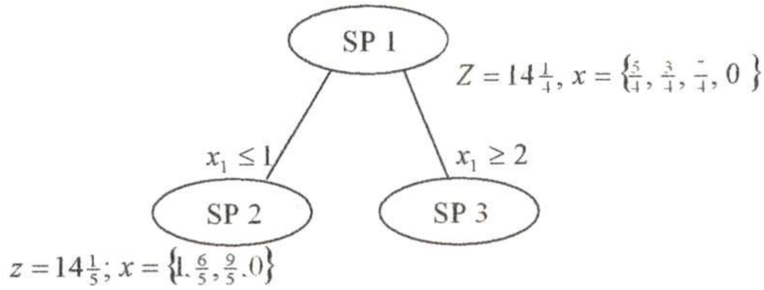
Subpersoalan 3 (SP3) adalah : subpersoalan 1 dengan kendala $x_1 \geq 2$.

Bounding

Subpersoalan 2 (SP2) adalah : subpersoalan 1 dengan kendala $x_1 \leq 1$.

berubah menjadi subpersoalan 1 dengan nilai $x_1 = 1$. Untuk menentukan variabel yang lain dengan cara substitusi, diperoleh nilai $x_2 = \frac{6}{5}, x_3 = \frac{9}{5}$, *dan* $x_4 = 0$. Penyelesaian optimal dari subpersoalan 2 adalah $z = 14\frac{1}{5}$. Untuk subpersoalan 3 dikatakan tidak layak karena ada nilai variabel fungsi objektif yang tidak memenuhi kriteria kendala.

Tampilan dari subpersoalan yang telah dibuat dapat dilihat pada pohon pencarian (*search tree*) sebagai berikut ini :



Gambar 4.2.1 Pohon Pencabangan Sub Persoalan 1 dengan kendala $x_1 \leq 1$ dan $x_1 \geq 2$.

Fathoming

Penyelesaian optimal dari subpersoalan 2 belum menghasilkan penyelesaian yang memenuhi kriteria kendala, sehingga subpersoalan ini dikatakan belum *fathom*. Maka lakukan kembali *Branch and Bound* pada variabel x_2.

Branching

Nilai variabel x_2 pada subpersoalan 2 belum memenuhi kriteria kendala, sehingga dibuat dua subpersoalan yang baru sebagai berikut :

Subpersoalan 4 : adalah subpersoalan 2 dengan kendala $x_2 \leq 1$.

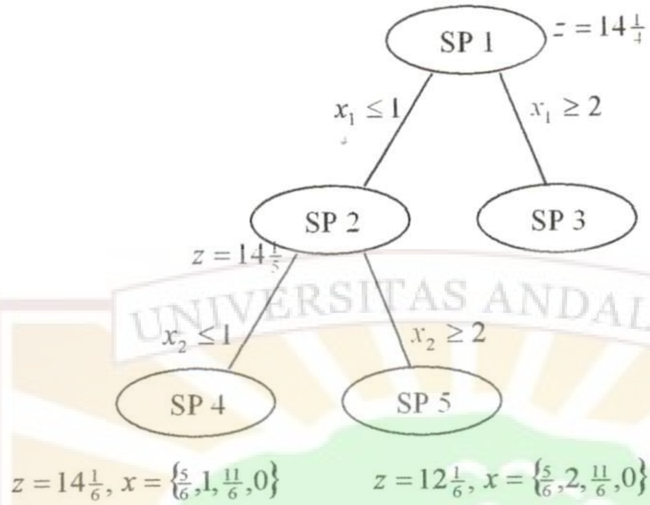
Subpersoalan 5: adalah subpersoalan 2 dengan kendala $x_2 \geq 2$.

Bounding

Misalkan dipilih subpersoalan 4 yang akan diselesaikan dengan cara mensubsitusi nilai $x_2 = 1$ kedalam persamaan kendala, maka diperoleh nilai variabel keputusan yang lain, yaitu : $x_1 = \frac{5}{6}, x_3 = \frac{11}{6}, dan\ x_4 = 0$. Dari subpersoalan 4 diperoleh penyelesaian optimal, yaitu $z = 14\frac{1}{6}$.

Sekarang dipilih subpersoalan 5 yang akan diselesaikan dengan cara mensubsitusi nilai $x_2 = 2$ kedalam persamaan kendala, diperoleh nilai variabel keputusan yang lain,yaitu $x_1 = \frac{5}{6}, x_3 = \frac{11}{6}, dan\ x_4 = 0$. Dari subpersoalan 5 diperoleh penyelesaian optimal yaitu $z = 12\frac{1}{6}$.

Tampilan dari semua subpersoalan yang telah dibuat dapat dilihat pada pohon pencarian (*search tree*) sebagai berikut ini :



Gambar 4.2.2 Pohon Pencabangan Sub Persoalan 2 dengan kendala $x_2 \leq 1$ dan $x_2 \geq 2$.

Fathoming

Penyelesaian optimal dari subpersoalan 4 dan subpersoalan 5 belum menghasilkan penyelesaian yang memenuhi kriteria kendala sehingga subpersoalan ini dikatakan *fathom*. Maka ulangi langkah 2.

Branching

Nilai variabel x_1 pada subpersoalan 4 belum memenuhi kriteria kendala sehingga akan dibuat dua subpersoalan yang baru adalah sebagai berikut :

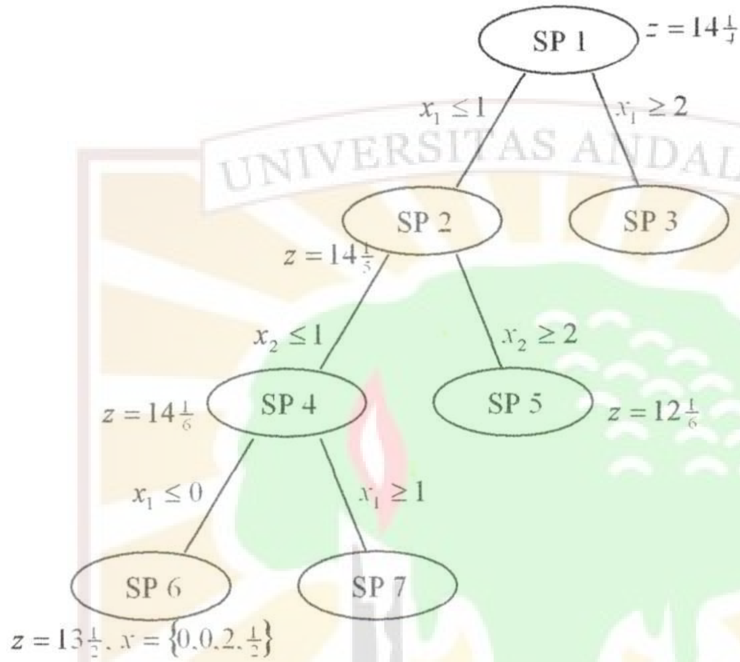
Subpersoalan 6 : adalah subpersoalan 4 dengan kendala $x_1 \leq 0$.

Subpersoalan 7 : adalah subpersoalan 4 dengan kendala $x_1 \geq 1$.

Bounding

Subpersoalan yang belum diselesaikan adalah subpersoalan 6 dan 7. Misalkan dipilih subpersoalan 6 yang akan diselesaikan dengan cara mensubsitusi nilai $x_1 = 0$ kedalam persamaan kendala, diperoleh nilai variabel keputusan yang lain, yaitu: $x_2 = 0, x_3 = 2, dan\ x_4 = \frac{1}{2}$. Dari subpersoalan 6 diperoleh penyelesaian optimal yaitu $z = 13\frac{1}{2}$. Untuk subpersoalan 7 tidak diselesaikan karena sama dengan subpersoalan 2.

Tampilan dari semua subpersoalan yang telah dibuat dapat dilihat pada pohon pencarian (*search tree*) sebagai berikut ini :



Gambar 4.2.3 Pohon Pencabangan Sub Persoalan 4 dengan kendala $x_1 \leq 0$ dan $x_1 \geq 1$

Langkah 3. Kriteria Optimal

Berdasarkan pohon pencarian di atas terlihat bahwa hasil penyelesaian optimal terbaik terjadi pada subpersoalan 6 dengan semua nilai variabel keputusan memenuhi kriteria kendala, yaitu nilai $z = 13\frac{1}{2}$ dengan $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{1}{2}$

Contoh 4.2.2

Perusahaan dagang "JAYA MURNI" merencanakan untuk meningkatkan NVP (*Net Present Value*) dengan cara menambah tiga jenis barang baru, yaitu, gula pasir, beras dan minuman kaleng. Perusahaan tersebut memiliki dana sebesar Rp 1,5 juta, ketentuan barang yang akan ditambah adalah sebagai berikut :

1. Tabel 4.2.5 Data Rencana Penambahan Barang

No	Jenis Barang	Harga (Ribu rupiah)	NPV (Ribu rupiah)
1	Sepatu	67/pasang	4,2
2	Abon daging	50/kg	3
3	Roti Kaleng	35/kaleng	2,3
	Dana yang tersedia	1500	

2. Kapasitas gudang yang tersedia hanya untuk menampung 30 unit produk

3. Fasilitas yang tersedia :

a. 40 unit jika hanya ditambah roti kaleng.

b. $1\frac{1}{3}$ unit dari jumlah roti kaleng, jika hanya ditambah abon daging.

c. $1\frac{2}{3}$ unit dari jumlah roti kaleng, jika hanya ditambah sepatu.

Permasalahan yang dihadapi perusahaan dagang "JAYA MURNI" adalah menentukan berapa unit masing-masing produk akan ditambah perusahaan untuk memaksimalkan NPV.

Penyelesaian :

Persoalan di atas dapat disederhanakan dengan memisalkan jumlah tiap jenis produk dengan notasi x_i dimana $i = 1, 2, 3$.

a. Jumlah unit sepatu dinotasikan dengan x_1.

b. Jumlah unit abon daging dinotasikan dengan x_2.

c. Jumlah unit roti kaleng dinotasikan dengan x_3.

Pembuatan model matematika

a. Variabel keputusan

Dalam persoalan ini keputusan menambah barang diwakili dengan bilangan yang memenuhi kriteria kendala.

b. Fungsi tujuan

Fungsi tujuan dari persoalan ini adalah memaksimalkan NPV, secara matematik dapat dirumuskan sebagai berikut :

maksimalkan

$$z = 4{,}2x_1 + 3x_3 + 2{,}3x_3 .$$

c. Kendala

Pada persoalan ini terdapat beberapa kendala antara lain :

Biaya yang dikeluarkan untuk menambah ketiga jenis produk tidak boleh melebihi jumlah dana yang tersedia, secara matematik dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$67x_1 + 50x_2 + 35x_3 \leq 1500 .$$

Kapasitas gudang yang dibutuhkan tidak boleh melebihi kapasitas gudang yang tersedia, secara matematik dirumuskan sebagai berikut :

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 30 .$$

Fasilitas perawatan yang tersedia, secara matematik dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$1\tfrac{2}{3}x_3 + 1\tfrac{1}{3}x_3 + x_3 \leq 40.$$
$$x_3 \leq 10.$$

Persoalan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan metode *Branch and Bound* dengan langkah-langkah :

Langkah I Metode Simpleks

Bentuk persamaan (4.2.1) dirubah ke dalam bentuk

Fungsi objektif maksimumkan

$$z = 4{,}2x_1 + 3x_3 + 2{,}3x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 + 0.x_6 .$$

Kendala pada persamaan (4.3.2),(4.3.3), dan (4.3.4) dirubah ke dalam bentuk :

$$
\begin{aligned}
67x_1 + 50x_2 + 35x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 1500 \\
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad + x_5 \qquad &= 30 \\
x_3 \qquad\qquad\qquad + x_6 &= 10. \\
x_i \geq 0. & \\
x_i \ \textit{integer},\ i = 1, 3. &
\end{aligned}
$$

Persamaan di atas dapat disajikan dalam bentuk Tabel Awal Metode Simpleks, yaitu:

Tabel 4.2.6 Tabel Awal Metode Simpleks contoh 4.2.2.

C_B	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b_i
		4,2	3	2,3	0	0	0	0	
0	x_4	67	50	35	1	0	0	0	1500
0	x_5	1	1	1	0	1	0	0	30
0	x_6	0	0	$1^{\bullet}$	0	0	1	0	10
$z_j - c_j$		$-4,2$	-3	$-2,3$	0	0	0	1	

Tabel 4.2.7 Tabel Iterasi 1 contoh 4.2.2.

C_B	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b_i
		4,2	3	2,3	0	0	0	0	
0	x_4	$67^{\bullet}$	50	0	1	0	-1	0	1150
0	x_5	1	1	0	0	1	-1	0	20
2,3	x_3	0	0	1	0	0	1	0	10
$z_j - c_j$		$-4,2$	-3	0	0	0	2,3	1	23

Tabel 4.2.8 Tabel Iterasi 2 contoh 4.2.2.

C_B	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b_i
		4,2	3	2,3	0	0	0	0	
4,2	x_1	1	$\frac{50}{4}$	0	$\frac{1}{67}$	0	$-\frac{1}{67}$	0	$\frac{1150}{67}$
0	x_5	0	$\frac{17}{67}^{\bullet}$	0	$\frac{1}{67}$	1	$\frac{68}{67}$	0	$\frac{190}{67}$
2,3	x_3	0	0	1	0	0	1	0	10
$z_j - c_j$		0	-3	0	$\frac{42}{670}$	0	$\frac{1121}{670}$	1	$\frac{49841}{670}$

Tabel 4.2.9 Tabel Optimal Metode Simpleks contoh 4.2.2.

C_B	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b_i
		4,2	3	2,3	0	0	0	0	
4,2	x_1	1	0	0	$\frac{1}{67}$	0	$-\frac{1}{67}$	0	$\frac{10050}{1139}$
3	x_2	0	1	0	$\frac{1}{17}$	$\frac{67}{17}$	$\frac{68}{17}$	0	$\frac{190}{17}$
2,3	x_3	0	0	1	0	0	1	0	10
$z_j - c_j$		0	0	0	$\frac{42}{670}$	$\frac{201}{17}$	$\frac{155737}{11390}$	1	$\frac{106597}{1139}$

Berdasarkan tabel di atas diperoleh penyelesaian optimal yaitu: $z = \frac{106597}{1139}$ ini merupakan batas atas dari fungsi tujuan. dengan $x_1 = \frac{10050}{1139}$, $x_2 = \frac{190}{17}$, $x_3 = 10$.

Karena nilai $x_1 = \frac{10050}{1139}$ belum memenuhi kriteria kendala, selanjutnya $z = \frac{106597}{1139} = 93{,}59$ dengan $x_1 = \frac{10050}{1139} = 8{,}82$, $x_2 = \frac{190}{17} = 11{,}18$, $x_3 = 10$ disebut subpersoalan 1 (SP1). Untuk menjadikan x_1 bernilai *integer* dilakukan langkah berikut:

Langkah II Metode *Branch and Bound.*

Branching

Subpersoalan 2 (SP2) adalah : subpersoalan 1 dengan kendala $x_1 \le 8$, $x_3 = 10$.

Subpersoalan 3 (SP3) adalah : subpersoalan 1 dengan kendala $x_1 \ge 9$, $x_3 = 10$.

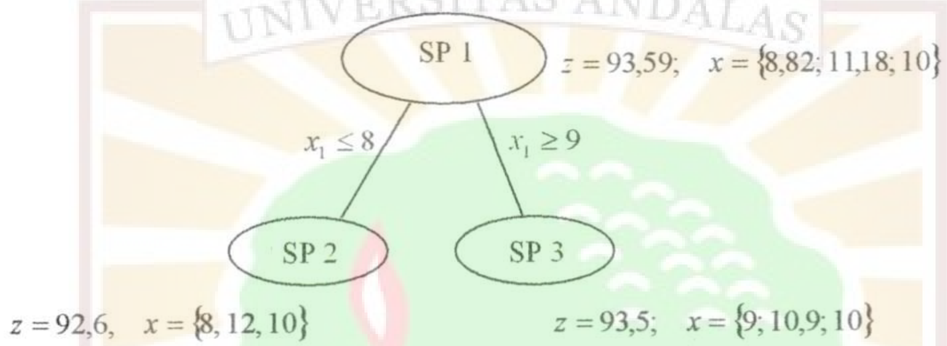
Bounding

Subpersoalan 2 (SP2) adalah : subpersoalan 1 dengan kendala $x_1 \le 8, x_3 = 10$ berubah menjadi subpersoalan 2 dengan nilai $x_1 = 8$ dan $x_3 = 10$. Untuk menentukan variabel yang lain yaitu dengan cara substitusi, diperoleh nilai $x_2 = 12$, didapat penyelesaian optimal dari subpersoalan 2, yaitu : $z = 92{,}6$.

Subpersoalan 3 (SP3) adalah : subpersoalan 1 dengan kendala $x_1 \ge 9$, $x_3 = 10$

berubah menjadi subpersoalan 3 dengan nilai $x_1 = 9$ dan $x_3 = 10$. Dengan cara substituís diperoleh nilai $x_2 = 10{,}9$ didapat penyelesaian optimal dari subpersoalan 3, yaitu : $z = 93{,}5$.

Tampilan dari subpersoalan yang telah dibuat dapat dilihat pada pohon pencarian (*search tree*) sebagai berikut ini :



Gambar 4.2.4 Pohon Pencabangan Sub Persoalan 4 dengan kendala $x_1 \le 8$ dan $x_1 \ge 9$.

Berdasarkan pohon pencarian di atas terlihat bahwa hasil penyelesaian optimal terbaik terjadi pada subpersoalan 3 dengan semua nilai variabel keputusan memenuhi kriteria kendala, yaitu $z = 93{,}5$ dengan $x_1 = 9; \quad x_2 = 10{,}9; \quad x_3 = 10$.

Dengan demikian keputusan yang akan diambil oleh perusahaan dagang "JAYA MURNI" adalah melakukan penambahan sepatu sebanyak 9 pasang, abon daging sebanyak 10,9 kg dan roti kaleng sebanyak 10 kaleng . NPV yang diperoleh sebesar Rp93.500.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan diatas dapat disimpulkan bahwa metode *Branch and Bound* dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian optimal dalam masalah perencanaan linier *mixed integer*. Dengan menggunakan metode *Branch and Bound* dapat ditelusuri proses pencabangan subpersoalan sehingga penyelesaian optimal dapat ditentukan.

5.2 Saran

Adapun saran yang dikemukakan sehubungan dengan penelitian ini adalah :

Penggunaan metode *Branch and Bound* dalam menyelesaikan masalah perencanaan linier *mixed integer* membutuhkan waktu yang panjang, maka diharapkan penelitian selanjutnya dapat menggunakan metode lain dalam menyelesaikan masalah perencanaan linier *mixed integer* untuk mengefisienkan waktu dalam menentukan penyelesaian optimal.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. 1987. Elementary Linear Algebra. Fifth Edition. Anton Textbooks Inc. New York.

Aprilia, S. 2005. Aplikasi algoritma Branch and Bound untuk menyelesaikan Integer Programming. Lab Ilmu dan Rekayasa Komputasi. Departemen Teknik Informatika ITb.

Bronson, R. 1996. Teori dan Soal-soal Operations Research. Erlangga, Jakarta

Dimyati,T.T. Dimyati,A. 1994. Operation Research Model-model Pengambilan Keputusan. Sinar Baru Algensindo. Bandung.

Friedberg, S.H. Insel.1986. Introduction to Linear Algebra with Applications. Prentice-Hall. New Jersey.

Hillier, F. S. Liebermen. 2001. Introduction To Operation Research. Seventh Edition. Mc Grew-Hill Inc. New York.

Leon, S.J. 1998. Aljabar Linier dan Aplikasinya. Edisi Kelima. Penerbit Erlangga. Jakarta.

Noble, B. 1988. Applied Linear Algebra. Third Edition. Prentice-Hall. New Jersey.

Pedregal, P. 2004. Introduction to Optimamization. Springer-Verlag New York . Inc. New York.

Rao, S.S. 1995. Optimization Theory and Applications. New Age International (P) . Publishers. New Delhi.

Simarmata.A. 1985. Operations Research Sebuah Pengantar Teknik-teknik Optimasi kuantatif dan Sistim-sistim Operasional. Gramedia. Jakarta.

Strang, G. 1976. Linear Algebra and Its Aplication. The Publisher. USA.

Supranto, J. 2006. Riset Operasi Untuk Pengambilan Keputusan. Edisi Revisi. Universitas Indonesia. Jakarta.

Taha, H.A. 2005. Riset Operasi Suatu Pengantar. Edisi Kelima. Binarupa Aksara. Jakarta.