MENGHITUNG LUAS DAERAH DI BIDANG DENGAN MENGGUNAKAN INTEGRAL GARIS

TESIS

NASRUL
06215062

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2008

MENGHITUNG LUAS DAERAH DI BIDANG DENGAN MENGGUNAKAN INTEGRAL GARIS

Oleh : Nasrul

(Di bawah bimbingan Dr. Susila Bahri, M. Sc. dan Narwen, M. Si.)

RINGKASAN

Untuk daerah tertutup di bidang dengan batas melengkung, masalah penentuan luas akan menjadi lebih sukar. Salah satu cara yang dapat dilakukan adalah dengan menggunakan integral garis. Teorema Green adalah sebuah teorema yang menghubungkan antara integral lipat dua dengan integral garis sebagai batasnya.

Sebuah lengkungan tertutup C di bidang akan membagi bidang menjadi daerah dalam (daerah terbatas) dan daerah luar. Arah (orientasi) lengkungan C diasumsikan jika kita bergerak sepanjang lengkungan C, maka daerah dalam terletak disebelah kiri kita. Arah lengkungan selalu diasumsikan demikian.

Sebuah daerah di bidang dengan batas lengkungan tertutup C, luasnya dapat dihitung dengan menggunakan integral garis. Luas daerah tersebut adalah $\frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$.

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Dengan ini saya menyatakan bahwa tesis yang saya tulis dengan judul "Menghitung Luas Daerah di Bidang Dengan Menggunakan Integral Garis" adalah hasil karya saya sendiri dan bukan merupakan ciplakan karya orang lain, kecuali kutipan yang sumbernya dicantumkan.

Jika dikemudian hari pernyataan yang saya buat ini ternyata tidak benar, maka status kelulusan dan gelar yang saya peroleh menjadi batal dengan sendirinya.

Padang, Juli 2008

Yang Membuat Pernyataan,

Nasrul

BP.06215062

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 11 Maret 1964 di Kayu Aro Kerinci, sebagai anak ketiga dari ayah bernama Rusli (almarhum) dan ibu bernama Suarni. Penulis menamatkan SD Teladan Kayu Aro tahun 1976, SMP Cut Meutia Kayu Aro tahun 1980, SMAN 3 Sungai Penuh tahun 1983, dan S.1 jurusan matematika IKIP Padang tahun 1988.

Pada tanggal 1 Maret 1989 penulis diangkat menjadi guru PNS dan mendapat tugas mengajar di SMAN 1 Batang Kapas Kabupaten Pesisir Selatan. Pada pertengahan tahun 2005 penulis pindah tugas ke SMAN 1 Painan sampai saat ini. Pada bulan Juni 2006 penulis diberi kesempatan untuk menambah pendidikan ke jenjang S.2 di Program Studi Matematika Pascasarjana Universitas Andalas.

بسم الله الرحمن الرحيم

Allah memberi ilmu yang berguna kepada siapa yang dikehendaki-Nya, barang siapa yang mendapat hikmah itu sesungguhnya ia mendapat kebaikan yang banyak dan tidak ada yang dapat mengambil pelajaran kecuali orang-orang yang mempunyai akal sehat
(Q.S al-Baqarah ; 269)

Maha suci Engkau, tiada ilmu bagi kami kecuali apa yang Engkau ajarkan kepada kami, sesungguhnya Engkau maha berilmu dan maha bijaksana
(Q.S al-Baqarah ; 32)

Alhamdulillah, kuucapkan padamu ya Allah...,
Atas kehendak-Mu ya Allah kudapat menyelesaikan pendidikan S 2.

Sembah sujudku untuk kedua orang tua papa (Rusli (alm)) dan one (Suarni)
Tak terukur pengorbanan dan kasih sayang yang kau berikan kepadaku buah hatimu dalam menggapai cita-cita dan masa depan

Teristimewa buat istriku (Pebriyenti) dan anakku (Putri Utami Nasti) yang mendampingi ku dalam suka dan duka.

Terima kasih buat kakak-kakak serta adik-adikku yang telah memberikan dukungan dan dorongan padaku selama ini.

Terima kasih buat Bapak dan Ibu dosen serta segenap civitas akademika Universitas Andalas yang telah mendidik kami.

Tak lupa semua teman seperjuangan pada program studi matematika S 2.

Nasrul , Juli 2008

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas berkah, karunia dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan tesis ini.

Tesis ini ditulis sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Pascasarjana Universitas Andalas Padang.

Penulisan tesis ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak, untuk itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Ir. H. Novirman Jamarun, M.Sc selaku Direktur Program Pascasarjana Universitas Andalas.
2. Bapak Jenizon, M.Si selaku Ketua Program Studi Matematika.
3. Ibu Dr. Susila Bahri, M.Sc selaku pembimbing I dan Bapak Narwen, M.Si selaku pembimbing II.
4. Bapak, Ibu dosen dan segenap civitas akademika pada Program Studi Matematika Universitas Andalas.
5. Rekan-rekan mahasiswa S2 Jurusan Matematika Program Studi Pascasarjana Universitas Andalas.
6. Semua pihak yang telah membantu dalam penyusunan tesis ini yang tidak dapat penulis sebutkan namanya satu persatu.

Dan penulis menyadari bahwa tesis ini masih jauh dari sempurna, untuk itu masukan dan kritikan yang sifatnya membangun, sangat diharapkan demi perbaikan ke depan.

Padang, Juli 2008

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Untuk daerah tertutup di bidang yang dibatasi oleh ruas garis lurus (poligon), masalah menghitung luas tidak menjadi persoalan. Dimulai dengan mendefinisi-kan luas persegi panjang sebagai panjang kali lebar, dan dari sini secara beruntun dapat diturunkan luas jajaran-genjang, segi-tiga, dan sebarang poligon.

Untuk daerah tertutup dibidang dengan batas melengkung, masalah penentuan luas menjadi lebih sukar. Salah satu cara yang dapat dilakukan adalah dengan menggunakan integral garis.

1.2 Perumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana caranya menghitung luas daerah pada bidang dengan menggunakan integral garis. Daerah dibidang yang akan dihitung luasnya adalah daerah yang dibatasi oleh dua fungsi dan dua garis sejajar sumbu koordinat.

1.3. Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menunjukkan cara menentukan luas daerah pada bidang dengan menggunakan integral garis.

1.4. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat menambah wawasan bagi penulis dan pembaca terhadap permasalahan menentukan luas daerah di bidang.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Integral Lipat Dua

Pengertian integral lipat dua dapat ditulis dalam dua bentuk yaitu dalam bentuk (2.1.1) atau (2.1.2). Dalam bentuk pertama yaitu,

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{.......} \quad (2.1.1)$$

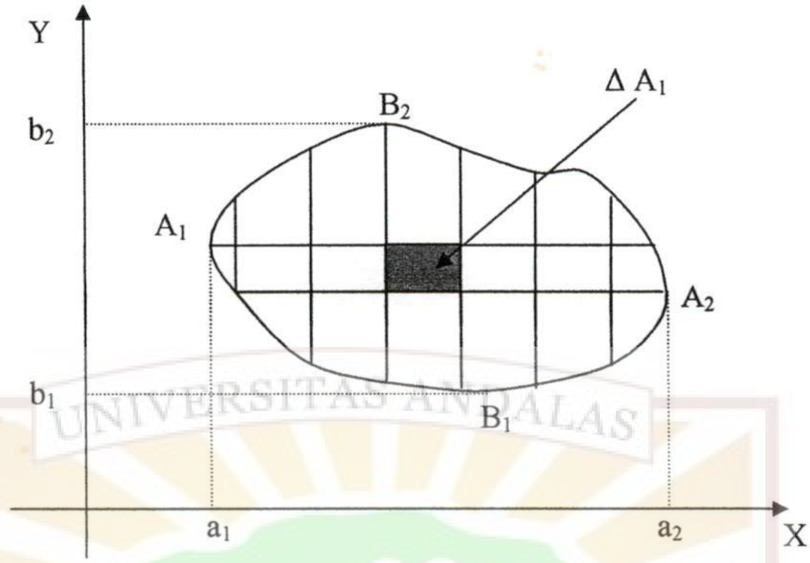
ialah pengintegralan pertama dilakukan terhadap x dengan memandang $f(x,y)$ sebagai fungsi dari x dan y dianggap tetap (konstan), sedang batas integrasinya yaitu nilai x_1 ke x_2, kemudian hasil pengintegralan pertama diintegrasikan lagi terhadap y dengan batas integrasinya dari nilai y_1 ke y_2.

Sedangkan dalam bentuk kedua, yaitu

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy\,dx \quad \text{.......} \quad (2.1.2)$$

ialah pengintegralan pertama dilakukan terhadap y dengan memandang $f(x,y)$ sebagai fungsi dari y dan x dianggap tetap (konstan) dengan batas integrasi yaitu nilai y_1 ke y_2, kemudian hasilnya diintegrasikan lagi terhadap x dengan batas integrasinya nilai x_1 ke x_2.

Secara umum bentuk integral lipat dua di atas masing-masing biasanya ditulis dalam bentuk $\iint_S f(x,y)\,dx\,dy$ atau $\iint_S f(x,y)\,dy\,dx$, yang berarti f(x,y) diintegrasikan pada daerah (region) S. Secara geometri dapat disajikan sebagai berikut :



Gambar 2.1.1 Daerah Tertutup S

Daerah S pada bidang XOY dibagi menjadi n bagian oleh garis-garis yang sejajar sumbu koordinat sehingga terdapat n bagian ΔA_i, i = 1, 2, 3, ... , n dimana i = 1, 2, 3, ... , n dan $\Delta A_i = \Delta x\ \Delta y$ seperti terlihat pada Gambar 2.1.1. Ambil (x_i, y_i) sembarang dalam ΔA_i dan $n \to \infty$, sedemikian sehingga ΔA_i yang terbesar menuju 0, maka yang dimaksud integral rangkap dua dari fungsi f(x,y) pada daerah S adalah :

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x\,\Delta y \qquad (Baisuni, 1986)$$

Untuk daerah S yang dibatasi oleh garis-garis sejajar sumbu koordinat, terdapat bentuk garis lengkung berikut :

$B_1A_1B_2$ memperlihatkan $x = x_1(y)$ dan $B_2A_2B_1$ memperlihatkan $x = x_2(y)$, kedua-nya merupakan fungsi dari y.

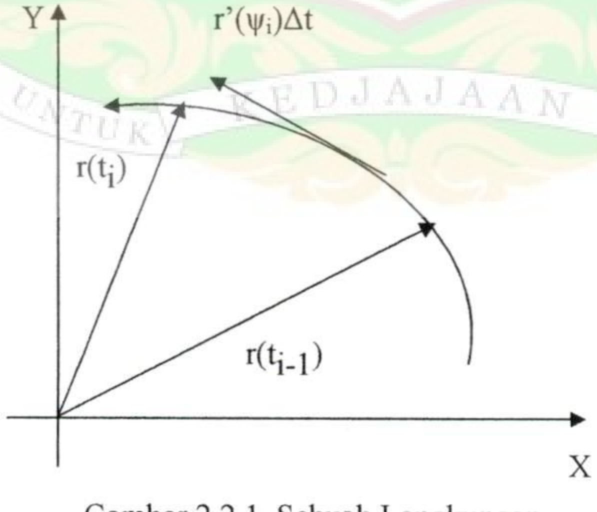
$A_1B_1A_2$, memperlihatkan $y = y_1(x)$ dan $A_2B_2A_1$ memperlihatkan $y = y_2(x)$, keduanya merupakan fungsi dari x, sehingga diperoleh bentuk (2.1.1) dan (2.1.2) sebagai berikut :

$$\iint_S f(x,y)dx\,dy = \int_{b_1}^{b_2}\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\,dy \quad \text{.......(2.1.3)}$$

$$= \int_{a_1}^{a_2}\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\,dx \quad \text{.......(2.1.4)}$$

2.2. Integral Garis

Bila diketahui lengkungan r(t) = (x(t),y(t)) pada bidang yang didefinisikan pada interval [a,b] dan turunannya terbatas. Kemudian diketahui pula medan gaya $F(x,y) = (F_1(x,y),F_2(x,y))$ pada bidang. Kita dapat menghitung usaha yang dilakukan oleh gaya tersebut untuk membawa suatu partikel dari titik r(a) ke titik r(b) sepanjang lengkungan. Caranya adalah kita bagi lintasan tersebut menjadi potongan kecil dan kita anggap bahwa sepanjang lintasan kecil itu medan gaya mempunyai nilai konstan, misalkan sebesar $F(c_i)$ dengan c_i titik pada potongan kecil seperti pada gambar 2.2.1.



Gambar 2.2.1 Sebuah Lengkungan

Pemotongan menjadi lengkungan kecil dapat dilakukan dengan cara membagi interval [a,b] menjadi subinterval kecil $[a,t_1]$, $[t_1, t_2]$, ... , $[t_{n-1},b]$ yang sama panjang. Pada subinterval kecil $[t_{i-1}, t_i]$ lengkungan kecil dengan ujung $r(t_{i-1})$ dan $r(t_i)$ dapat dihampiri oleh garis lurus yang menghubungkan ujung-ujungnya ataupun vektor $r(t_i) - r(t_{i-1})$, yang kurang lebih sama dengan

$r'(\psi_i)\Delta t$ .... (2.2.1)

dengan $\Delta t = t_1 - t_{i-1}$ dan (ψ_i) titik pada interval $[t_{i-1},t_1]$. Ekspresi (2.2.1) ini dapat dibaca sebagai vektor singgung dikalikan dengan perubahan t dan diperoleh berdasarkan teorema nilai rata – rata Cauchy untuk fungsi satu variabel.

Selanjutnya, dengan memilih $c_1 = (x(\psi_i),y(\psi_i))$, usaha yang dilakukan oleh medan gaya sepanjang lengkungan kecil ini adalah :

$F(c_1).r'(\psi_i)\Delta t = F_1(c_i)x'(\psi_i)\, \Delta t + F_2(c_i)y'(\psi_i)\, \Delta t$ .... (2.2.2)

Ataupun

$F(c_i).\ (\Delta x_i, \Delta y_i) = F_1(c_i)\Delta x_i + F_2(c_i)\Delta y_i$ .... (2.2.3)

Dengan $r(t_i) - r(t_{i-1}) = (\Delta x_i,\Delta y_i) = (x'(\psi_i)\Delta t,y'(\psi_i)\Delta t)$

Selanjutnya dengan menjumlahkan semua potongan dan mengambil $n\to\infty$, maka

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} F_1(c_i)x(\psi_i)\Delta t + F_2(c_i)y(\psi_i)\Delta t = \int_a^b (F_1(x(t),y(t))x'(t) + F_2(x(t),y(t))y'(t))dt.$$

Dengan dasar (2.2.3), integral ini dapat ditulis sebagai

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} F_1(c_i)\Delta x_i + F_2(c_i)\Delta y_i = \int_{r(a)}^{r(b)} (F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy.$$

Hal ini sesuai dengan penulisan perubahan variabel pada integral, yaitu dx=x'(t)dt dan dy = y'(t)dt.

Definisi

Misalkan r(t) = (x(t),y(t)) lengkungan pada bidang yang didefinisikan pada interval tertutup [a,b] yang mempunyai turunan terbatas dan misalkan medan vektor F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) nilainya terbatas. Integral garis dari medan vektor F sepanjang lengkungan r ditulis

$$\begin{aligned}\int F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy &= \int F(x(t),y(t))r'(t)dt \\ &= \int \big(F_1(x(t),y(t))x'(t) + F_2(x(t),y(t))y'(t)\big)dt\end{aligned}$$

dan bentuk terakhir adalah integral satu variabel.

Ekspresi F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy disebut bentuk diferensial. Dengan menganalogikan seperti pada fungsi skalar, bentuk r'(t)dt ditulis sebagai dr = r'(t)dt.

Seperti integral lipat ataupun integral satu variabel, jika fungsi yang terlibat kontinu kecuali dihimpunan dengan dimensi lebih kecil (dalam hal ini beberapa titik saja), maka integral tersebut ada. Dalam hal integral garis, medan vektor F harus kontinu dan persamaan lengkungan harus mempunyai turunan kontinu kecuali mugkin di beberapa titik.

2.3. Luas Daerah Bidang Rata

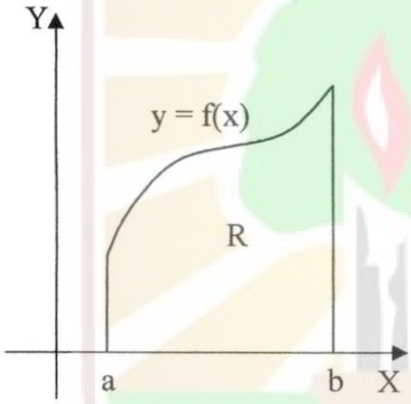
Luas Daerah di Bawah Kurva

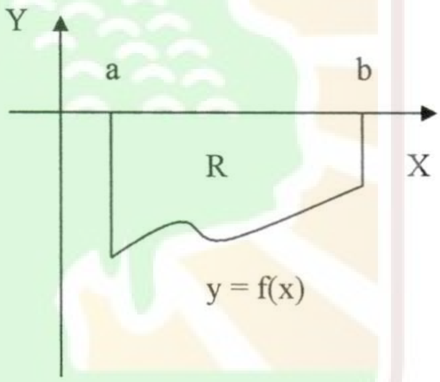
Andaikan y = f(x) menentukan persamaan sebuah kurva pada bidang xy dan andaikan f kontinu dan tak negatif pada selang a ≤ x ≤ b (Gambar 2.3.1). Daerah R yang dibatasi oleh kurva y = f(x), x = a, x = b dan y = 0 dinamakan sebagai daerah dibawah kurva y = f(x) antara x = a dan x = b. Jika luas daerah R dinyatakan dengan A(R), maka :

$$A(R) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{(2.3.1)}$$

Bila kurva y = f(x) terletak dibawah sumbu x (Gambar 2.3.2) maka luas daerah R adalah :

$$A(R) = -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{(2.3.2)}$$



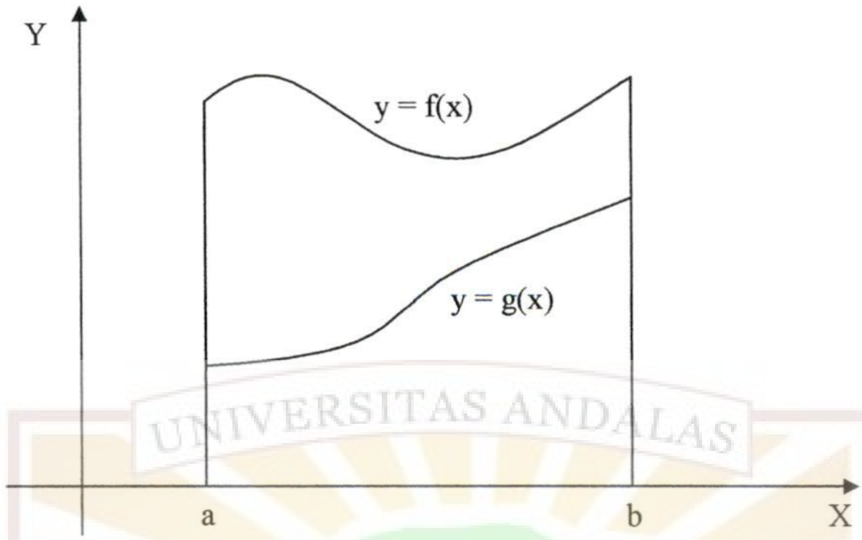


Gambar 2.3.1 Daerah di atas sumbu X Gambar 2.3.2 Daerah di bawah sumbu X

Luas Daerah Yang Dibatasi Oleh Dua Kurva

Fungsi y = f(x) dan y = g(x) adalah fungsi yang kontinu dan g(x) ≤ f(x) pada selang a ≤ x ≤ b. Andaikan L menyatakan luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = f(x), y = g(x), x = a, dan x = b (Gambar 2.3.3) maka :

$$L = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \quad \text{(2.3.3)}$$



Gambar 2.3.3 Daerah Yang Dibatasi Oleh Dua Kurva

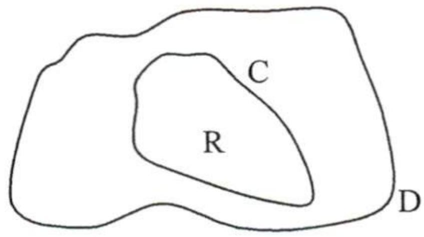
2.4. Teorema Green

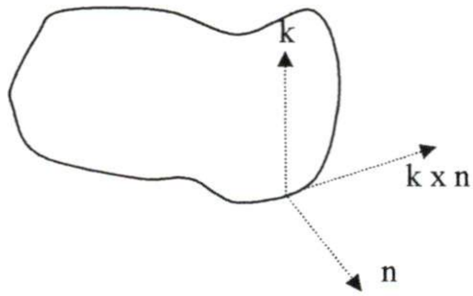
Hubungan antara integral lipat dua dengan integral garis sebagai batasnya dapat kita temukan pada Teorema Green. Misalkan C lengkungan tertutup di bidang, maka lengkungan ini akan membagi bidang menjadi dua daerah, yaitu daerah dalam (daerah terbatas) dan daerah luar seperti pada gambar 2.4.1. Misalkan n(t) vektor normal lengkungan yang menunjuk daerah luar. Kemudian, yang dimaksud dengan arah (orientasi) lengkungan C adalah arah vektor k x n dengan k adalah vektor yang tegak lurus bidang. Jika kita bergerak sepanjang lengkungan C dengan mengikuti arah tersebut, daerah didalam terletak disebelah kiri kita (gambar 2.4.2). Kita mengasumsikan bahwa arah dari lengkungan selalu demikian (*Budhi, 2001*).

Lengkungan yang dimaksud disini adalah lengkungan licin bagian demi ba-gian. Misalkan r : $[a,b] \to R^2$ disebut lengkungan licin bagian demi bagian jika ada titik $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ sehingga pemetaan

$$r(t) : [a_i, a_{i+1}] \to R^2$$

mempunyai turunan yang kontinu, contoh lengkungan seperti ini adalah segitiga.





Gambar 2.4.1 Daerah Tertutup R   Gambar 2.4.2 Orientasi (Arah) Lengkungan

Teorema Green di bidang

Misalkan D daerah di bidang dan C lengkungan tertutup di D yang tidak memotong dirinya sendiri dan licin bagian demi bagian. Misalkan pula P(x,y) dan Q(x,y) dua fungsi yang didefinisikan di D dengan turunan parsialnya kontinu, maka $\oint_C (P\,dx + Q\,dy) = \iint_R (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\,dx\,dy$ dengan R adalah daerah tertutup yang batasnya C.

Untuk membuktikan Teorema Green, haruslah fungsi P dan fungsi Q saling bebas yaitu salah satu dapat diambil nol. Dengan demikian Teorema Green menjadi

$$\oint_C P\,dx = \iint_R -\partial P / \partial y\;dx\,dy$$

$$\oint_C Q\,dy = \iint_R \partial Q / \partial x\;dx\,dy \qquad \text{(2.4.1)}$$

Oleh karenanya untuk membuktikan Teorema Green, perlihatkan kedua bagian dari persamaan (2.4.1).

2.4.1. Teorema Green Pada Daerah Sederhana Tipe Pertama

Daerah sederhana tipe pertama adalah himpunan semua titik (x,y) yang memenuhi :

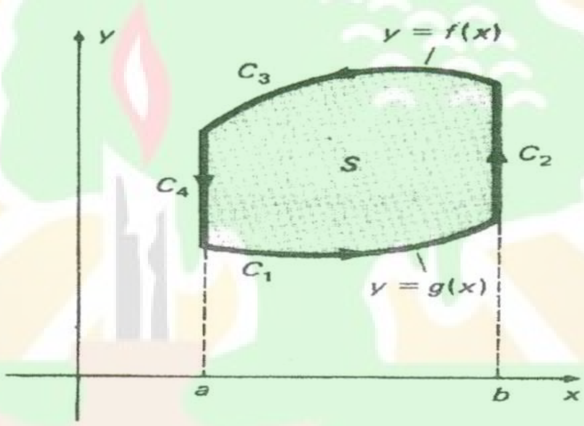
$$a \le x \le b \quad \text{dan} \quad g(x) \le y \le f(x)$$

dengan g(x) ≤ f(x) untuk setiap x pada interval [a,b]. Kemungkinan daerah sederhana tipe pertama ditunjukkan oleh Gambar 2.4.1.1.

Untuk membuktikan Teorema Green pada daerah sederhana tipe pertama, diperlihatkan kedua bagian dari persamaan (2.4.1).

Bukti Teorema Green untuk daerah sederhana tipe pertama

Misalkan kita mempunyai daerah sederhana tipe pertama, akan diperlihatkan $\oint_C P\,dx = \iint_R -\partial P/\partial y\,dx\,dy$ dan $\oint_C Q\,dy = \iint_R \partial Q/\partial x\,dx\,dy$.



Gambar 2.4.1.1 Daerah Sederhana Tipe Pertama

1. $\iint_S -\partial P/\partial y\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{f(x)} -\partial P/\partial y\,dy \right) dx$

$$= \int_a^b -P(x,y)\Big|_{g(x)}^{f(x)} dx$$

$$= \int_a^b \left[-P(x,f(x)) + P(x,g(x))\right] dx$$

$$= \int_a^b P(x,g(x))\,dx - \int_a^b P(x,f(x))\,dx$$

Kemudian integral garisnya adalah :

$$\oint_C P\,dx = \int_{c_1} P(x,y)\,dx + \int_{c_2} P(x,y)\,dx + \int_{c_3} P(x,y)\,dx + \int_{c_4} P(x,y)\,dx$$

$$= \int_a^b P(x,g(x))\,dx + 0 + \int_b^a P(x,f(x))\,dx + 0$$

$$= \int_a^b P(x,g(x))\,dx - \int_a^b P(x,f(x))\,dx$$

Integral atas C_2 dan C_4 adalah 0, karena pada kurva – kurva ini x konstan sehingga dx = 0. Berdasarkan kedua hasil perhitungan dapat disimpulkan bahwa persamaan (2.4.1) yang pertama berlaku untuk daerah sederhana tipe pertama.

2. $$\iint_S \partial Q/\partial x \; dx\, dy = \int_{g(x)}^{f(x)} \left[\int_a^b (\partial Q/\partial x)\,dx \right] dy$$
$$= \int_{g(x)}^{f(x)} Q(x,y)\Big|_a^b \, dy$$
$$= \int_{g(x)}^{f(x)} Q(b,y)\,dy - \int_{g(x)}^{f(x)} Q(a,y)\,dy$$

Kemudian integral garisnya adalah :

$$\oint_C Q\,dy = \int_{c_1} Q(x,y)\,dy + \int_{c_2} Q(x,y)\,dy + \int_{c_3} Q(x,y)\,dy + \int_{c_4} Q(x,y)\,dy$$
$$= 0 + \int_{g(x)}^{f(x)} Q(b,y)\,dy + 0 + \int_{f(x)}^{g(x)} Q(a,y)\,dy$$

$$= \int_{g(x)}^{f(x)} Q(b,y)\,dy - \int_{g(x)}^{f(x)} Q(a,y)\,dy$$

Integral atas C_1 dan C3 adalah 0, karena pada kurva – kurva ini y konstan sehingga dy = 0. Berdasarkan kedua hasil perhitungan dapat disimpulkan bahwa persamaan (2.4.1) yang kedua berlaku untuk daerah sederhana tipe pertama.

2.4.2. Teorema Green Pada Daerah Sederhana Tipe Kedua

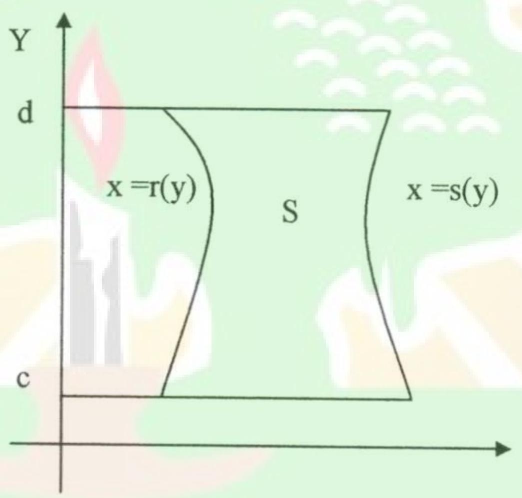
Daerah sederhana tipe kedua adalah himpunan semua titik (x,y) yang memenuhi :

$$c \le y \le d \qquad \text{dan} \qquad r(y) \le x \le s(y)$$

dengan $r(y) \le s(y)$ untuk setiap y pada interval [c,d]. Kemungkinan daerah sederhana tipe kedua ditunjukkan oleh Gambar 2.4.2.1.

Untuk membuktikan Teorema Green pada daerah sederhana tipe kedua, diperlihatkan kedua bagian dari persamaan (2.4.1).

Bukti Teorema Green untuk daerah sederhana tipe kedua.



Gambar 2.4.2.1 Daerah Sederhana Tipe Kedua

Misalkan kita mempunyai daerah sederhana tipe kedua, akan diperlihatkan $\oint_C P\,dx = \iint_R -\partial P/\partial y\, dx\, dy$ dan $\oint_C Q\,dy = \iint_R \partial Q/\partial x\, dx\, dy$.

1. $\iint_S -\partial P/\partial y \; dxdy = \int_{r(y)}^{s(y)}\left(\int_c^d -\partial P/\partial y\, dy\right)dx$

$$= \int_{r(y)}^{s(y)} -P(x,y)\Big|_c^d\, dx$$

$$= \int_{r(y)}^{s(y)} \left[-P(x,d) + P(x,c)\right] dx$$

$$= \int_{r(y)}^{s(y)} P(x,c)\,dx - \int_{r(y)}^{s(y)} P(x,d)\,dx$$

Kemudian integral garisnya adalah :

$$\oint_C P\,dx = \int_{c_1} P(x,y)\,dx + \int_{c_2} P(x,y)\,dx + \int_{c_3} P(x,y)\,dx + \int_{c_4} P(x,y)\,dx$$

$$= \int_{r(y)}^{s(y)} P(x,c)\,dx + 0 + \int_{s(y)}^{r(y)} P(x,d)\,dx + 0$$

$$= \int_{r(y)}^{s(y)} P(x,c)\,dx - \int_{r(y)}^{s(y)} P(x,d)\,dx$$

Integral atas C_2 dan C_4 adalah 0, karena pada kurva – kurva ini x konstan sehingga dx = 0. Berdasarkan kedua hasil perhitungan dapat disimpulkan bahwa persamaan (2.4.1) yang pertama berlaku untuk daerah sederhana tipe kedua.

2. $$\iint_S \partial Q/\partial x \; dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{r(y)}^{s(y)} \partial Q/\partial x\, dx \right) dy$$

$$= \int_c^d Q(x,y) \Big|_{r(y)}^{s(y)} dy$$

$$= \int_c^d Q(s(y),y)\,dy - \int_c^d Q(r(y),y)\,dy$$

Kemudian integral garisnya adalah :

$$\oint_C Q\,dy = \int_{c_1} Q(x,y)\,dy + \int_{c_2} Q(x,y)\,dy + \int_{c_3} Q(x,y)\,dy + \int_{c_4} Q(x,y)\,dy$$

$$= 0 + \int_c^d Q(s(y),y)\,dy + 0 + \int_d^c Q(r(y),y)\,dy$$

$$= \int_c^d Q(s(y),y)\,dy - \int_c^d Q(r(y),y)\,dy$$

Integral atas C_1 dan C_3 adalah 0, karena pada kurva – kurva ini y konstan sehingga $dy = 0$. Berdasarkan kedua hasil perhitungan dapat disimpulkan bahwa persamaan (2.4.1) yang kedua berlaku untuk daerah sederhana tipe kedua.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1. Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada bulan Februari sampai dengan Mei 2008, dan bertempat di perpustakaan jurusan matematika Universitas Andalas.

3.2. Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan studi literatur yang membahas tentang menghitung luas daerah di bidang. Teori dan definisi-definisi yang digunakan penulis kumpulkan dari buku-buku referensi dan artikel. Proses pembahasan penelitian ini dilakukan dengan langkah – langkah sebagai berikut :

1. Membuktikan Teorema Green berlaku untuk daerah sederhana tipe pertama.
2. Membuktikan Teorema Green berlaku untuk daerah sederhana tipe kedua.
3. Menentukan luas daerah sederhana tipe pertama dengan menggunakan integral garis.
4. Menentukan luas daerah sederhana tipe kedua dengan menggunakan integral garis.
5. Contoh penggunaan integral garis untuk menghitung luas daerah di bidang.

BAB IV

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan ditentukan luas daerah sederhana pada bidang dengan menggunakan integral garis. Daerah sederhana yang dimaksud disini adalah daerah pada bidang yang dibatasi oleh dua kurva dan dua garis yang sejajar dengan sumbu koordinat. Daerah sederhana tersebut dibedakan menjadi dua tipe yaitu daerah sederhana tipe pertama dan daerah sederhana tipe kedua.

4.1. Menentukan Luas Daerah Sederhana Tipe Pertama

Dari Gambar 2.4.1.1 jika luas daerah S dinyatakan dengan L(S) maka menurut pengertian luas berdasarkan konsep integral adalah :

$$L(S) = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\, dx$$

dimana persamaan diatas dapat ditulis menjadi :

$$L(S) = \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} dy\, dx$$

$$= \iint_S dxdy \qquad \text{.......} \qquad (4.1.1)$$

Andaikan P(x,y) dan Q(x,y) dua fungsi yang terdefenisi di bidang dengan turunan parsialnya kontinu, maka menurut Teorema Green

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_S \partial Q/\partial x - \partial P/\partial y \; dxdy$$

Apabila $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 1$ maka Teorema Green diatas menjadi

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_S dxdy$$

$$= L(S)$$

Dengan demikian jika ∂Q/∂x - ∂P/∂y =1 maka $\oint_C P\,dx + Q\,dy$ merupakan luas daerah S. Seandainya P(x,y) = -y dan Q(x,y) = x maka ∂P/∂y = -1 dan ∂Q/∂x = 1, sehingga

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_S (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\,dx\,dy$$

$$= \iint_S (1+1)\,dx\,dy$$

$$= \iint_S 2\,dx\,dy$$

$$= 2\iint_S dx\,dy$$

$$= 2\ \mathrm{L(S)}$$

atau $\mathrm{L(S)} = ½ \oint_C P\,dx + Q\,dy$

$$= ½ \oint_C x\,dy - y\,dx$$

Jadi luas daerah S adalah $\mathrm{L(S)} = ½ \oint_C x\,dy - y\,dx$

4.2. Menentukan Luas Daerah Sederhana Tipe Kedua

Dari Gambar 2.4.2.1 bila luas daerah S dinyatakan dengan L(S) maka menurut pengertian luas berdasarkan konsep integral adalah :

$\mathrm{L(S)} = \int_c^d \{s(y) - r(y)\}\,dy$, dimana persamaan diatas dapat ditulis menjadi :

$$\mathrm{L(S)} = \int_c^d \int_{s(y)}^{r(y)} dx\,dy$$

$$= \iint_S dx\,dy \qquad \text{(4.2.1)}$$

Andaikan P(x,y) dan Q(x,y) dua fungsi yang terdefenisi di bidang dengan turunan parsialnya kontinu, maka menurut Teorema Green

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_S \partial Q/\partial x - \partial P/\partial y \; dxdy$$

Apabila $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 1$ maka Teorema Green diatas menjadi

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_S dx\,dy$$

$$= L(S)$$

Dengan demikian jika $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 1$ maka $\oint_C P\,dx + Q\,dy$ merupakan luas daerah S. Seandainya P(x,y) = -y dan Q(x,y) = x maka $\partial P/\partial y = -1$ dan $\partial Q/\partial x = 1$, sehingga

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_S \partial Q/\partial x - \partial P/\partial y \; dxdy$$

$$= \iint_S (1+1)\,dx\,dy$$

$$= \iint_S 2\,dx\,dy$$

$$= 2\iint_S dx\,dy$$

$$= 2\,L(S)$$

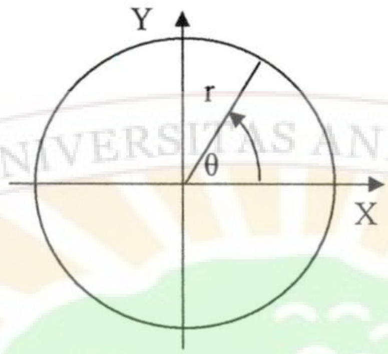
atau $L(S) = ½ \oint_C P\,dx + Q\,dy$

$$= ½ \oint_C x\,dy - y\,dx$$

Jadi luas daerah S adalah $L(S) = ½ \oint_C x\,dy - y\,dx$

Contoh :

1. Sebuah lingkaran berjari – jari r yang berpusat di O(0,0) (seperti pada gambar) akan kita hitung luasnya dengan menggunakan integral garis.



Persamaan parameter dari lingkaran yang berpusat di O(0,0) dan berjari-jari r adalah x = r cos θ, y = r sin θ maka dx = -r sin θ dθ, dy = r cos θ dθ, dan 0≤θ≤2 π.

Bila luas lingkaran dinyatakan dengan L maka :

$$L = \tfrac{1}{2} \oint_{\theta} x\,dy - y\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} (r\cos\theta)(r\cos\theta\, d\theta) - (r\sin\theta)(-r\sin\theta\, d\theta)$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} r^2\cos^2\theta\, d\theta + r^2\sin^2\theta\, d\theta$$

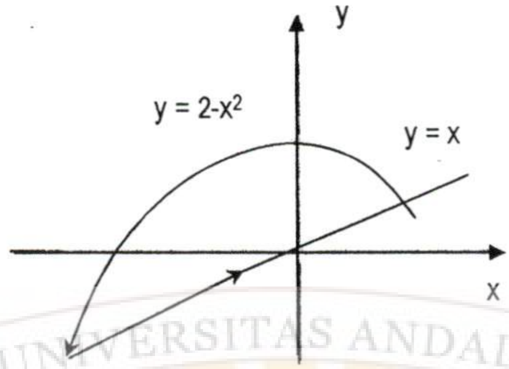
$$= \tfrac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} r^2\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\, r^2\theta \Big|_{0}^{2\pi}$$

$$= \pi\, r^2$$

2. Diketahui sebuah daerah seperti gambar berikut ini,



kedua kurva berpotongan dititik (-2,-2) dan (1,1). Kurva tertutup C dibagi menjadi dua bagian yaitu c_1, c_2, dan integral untuk masing – masingnya adalah :

Pada c_1

y = x dan dy = dx, dengan titik pangkal (-2,-2) dan titik ujung (1,1) sehingga

$\int_{c_1} x\,dy - y\,dx = = \int_{-2}^{1} x\,dx - x\,dx = 0$, sedangkan

Pada c_2

$y = 2 - x^2$ dan dy = -2xdx, dengan titik pangkal (1,1) dan titik ujung (-2,-2) sehingga

$$\int_{c_2} x\,dy - y\,dx = \int_{1}^{-2} x(-2x\,dx) - (2 - x^2)\,dx$$

$$= \int_{1}^{-2} (-x^2 - 2)\,dx$$

$$= -⅓x^3 - 2x \Big|_{1}^{-2}$$

$$= 9$$

jadi $\oint_C x\,dy - y\,dx$ = $c_1 + c_2 = 0 + 9 = 9.$

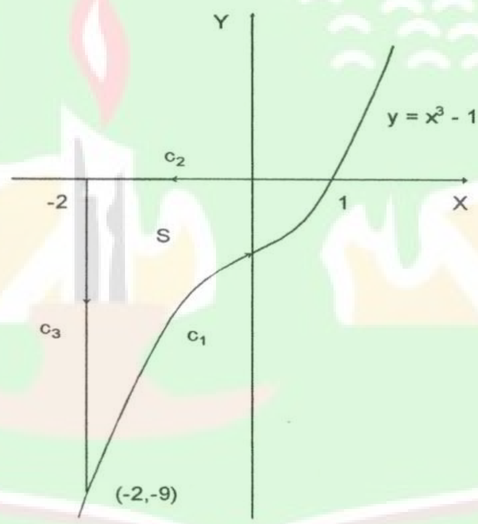
Luas daerah dari gambar diatas adalah

$L = ½ \oint_C x\,dy - y\,dx$

$= ½ . 9$

$= 4½$

3. Daerah S dibatasi oleh kurva $y = x^3 - 1$, garis $x = -2$, dan sumbux.



Pada c_1

$y = x^3 - 1 \rightarrow dy = 3x^2\,dx$ dengan titik pangkal (-2,-9) dan titik ujung (1,0).

$$½ \int_{c_1} x\,dy - y\,dx = ½ \int_{-2}^{1} x(3x^2\,dx) - (x^3 - 1)\,dx$$

$$= ½ \int_{-2}^{1} (2x^3 + 1)dx$$

$$= \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x \Big|_{-2}^{1}$$

$$= -2\tfrac{1}{4}$$

Pada c_2

y = 0 → dy = 0 dengan titik pangkal (1,0) dan titik ujung (-2,0).

$$½ \int_{c_2} x\,dy - y\,dx = 0$$

Pada c_3

x = -2 → dx = 0 dengan titik pangkal (-2,0) dan titik ujung (-2,-9)

$$½ \int_{c_2} x\,dy - y\,dx = ½ \int_{0}^{-9} -2\,dy$$

$$= -y \Big|_{0}^{-9}$$

$$= 9$$

$$½ \oint_{c} x\,dy - y\,dx = c_1 + c_2 + c_3$$

$$= -2¼ + 0 + 9$$

$$= 6¾$$

Luas daerah S = $½ \oint_{c} x\,dy - y\,dx$

$$= 6¾$$

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan bab sebelumnya untuk menghitung luas daerah di bidang, dapat disimpulkan :

1. Dari Teorema Green $\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R (\partial Q / \partial x - \partial P / \partial y)\,dx\,dy$, jika $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 1$ maka $\oint_c P\,dx + Q\,dy$ menyatakan luas daerah tertutup di bidang dengan batas C.
2. Luas daerah tertutup di bidang dengan batas C dapat dihitung dengan rumus $½\oint_C x\,dy - y\,dx$.

Saran

Diharapkan peneliti selanjutnya dapat membahas permasalahan menentukan luas untuk daerah tertutup yang bukan di bidang datar.

DAFTAR PUSTAKA

Baisuni, H. M. H. (1986). Kalkulus. Universitas Indonesia (UI – Press). Jakarta.

Budhi, W. S. (1995). Aljabar Linear. Gramedia. Jakarta.

Budhi, W. S. (2001). Kalkulus Peubah Banyak dan Penggunaannya. ITB. Bandung.

Handali, D dan R. J. Pamuntjak. (1987). Kalkulus Peubah Banyak. ITB. Bandung.

Kaplan, W. (1984). Advanced Calculus 3rd Edition. Addiwson-Wesley.

Marsden, J and A. Tromba. (1988). Vector Calculus 3rd Edition. W. H. Freeman and Company.

Purcell, E. J. dan Dale Varberg. (1999). Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1. Erlangga. Jakarta.

Purcell, E. J. dan Dale Varberg. (1999). Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 2. Erlangga. Jakarta.