APLIKASI METODE CUTTING PLANE UNTUK MENYELESAIKAN MASLAAH PERENCANAAN LINIER MIXED INTEGER

TESIS

RESTU PUJIASTUTI
06215103

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2008

Aplikasi Metode *Cutting Plane* Untuk Menyelesaikan
Masalah Perencanaan Linier *Mixed Integer*

Oleh : Restu Pujiastuti
(Dibawah bimbingan Dr.Muhafzan, M.Si dan Nova Noliza Bakar, M.Si)

RINGKASAN

Suatu permasalahan perencanaan linier biasanya menuntut solusi yang optimum agar diperoleh kondisi optimal yang diinginkan. Biasanya suatu permasalahan perencanaan linier menginginkan variabel keputusannya berupa *integer*, agar jawaban menjadi realistik.

Integer Linear Programming adalah bentuk lain dari program linier dengan variabel-variabel keputusannya bertipe *integer* atau *mixed integer*.

Terdapat dua metode dalam menyelesaikan masalah *integer linear programming.* Metode itu adalah :

1. Metode *Cutting Pane.*
2. Metode *Branch and Bound.*

Tujuan dari penelitian ini adalah, jika diberikan masalah perencanaan linier maksimumkan

$$z = c^T x$$

dengan kendala

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0$$

dengan :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Bagaimana menyelesaikan permasalahan di atas yang variabel keputusannya merupakan *mixed integer*, dengan menggunakan metode *Cutting Plane* .

Untuk mencapai tujuan ini, beberapa tinjauan pustaka yang berkaitan dengan permasalahan perencanaan linier *mixed integer*, seperti sistim persamaan linier, matriks, eliminasi Gauss Jordan, masalah perencanaan linier, metode simpleks, masalah perencanaan linier *integer* dan metode *Cutting Plane*.

Dari hasil penelitian diperoleh kesimpulan bahwa metode *Cutting Plane* dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah perencanaan linier *mixed integer* dengan menambahkan pemotongan campuran (*mixed cut*).

$$e_k = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ki}^{+} x_{n+i} + \frac{f_k}{f_k - 1} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ki}^{-} x_{n+i} - f_k, \quad e_k \geq 0$$

Sesungguhnya orang-orang yang beriman

dan mengerjakan amal-amal yang saleh

bagi mereka surga yang mengalir di bawahnya

sungai-sungai, itulah keberuntungan yang terbesar.

(Al-Buruuj,11)

Kupersembahkan ,karya ini untuk :

ibuku,mertuaku, suamiku tercinta (Mulyadi)

dan anak-anakku tersayang (Rezki, Iif dan Rifa)

juga kakak-kakak dan adikku

Dan ucapan terima kasih buat:

Pak Fitnedi dan ni Yus, yang telah ikut

menjaga dan mengawasi buah hatiku

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Saya menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa pernyataan dalam tesis saya yang berjudul: "APLIKASI METODE *CUTTING PLANE* UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH PERENCANAAN LINIER *MIXED INTEGER"* adalah hasil karya saya sendiri, dan bukan merupakan ciplakan dari hasil kerja/ karya orang lain, kecuali kutipan yang sumbernya dicantumkan.

Jika dikemudian hari pernyataan ini tidak benar, maka status kelulusan dan gelar yang saya peroleh menjadi batal dengan sendirinya.

Padang, 10 Juli 2008

Yang membuat pernyataan

Restu Pujiastuti.

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 1 Agustus 1969 di Jakarta, sebagai anak keempat dari Bapak Mahrum Hariyadi (alm) dan Ibu Hj.Tiramah.R. Penulis menamatkan SD pada tahun 1982 di Pekanbaru, SMP tahun 1985 di Pekanbaru dan SMA tahun 1988 di Pekanbaru, Riau. Pada tahun 1991 penulis menyelesaikan Diploma III pada jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia dan pada tahun 2000 penulis memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada jurusan Matematika Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitaa Negeri Padang.

Pada tahun 1992 penulis ditugaskan menjadi Guru di SMA Negeri Bukit Sundi, Kabupaten Solok. Pada tahun 2001 penulis pindah tugas ke SMAN 1 X Koto Singkarak, Kabupaten Solok. Pada tahun 2006 penulis memperoleh kesempatan meneruskan pendidikan pada Program Pascasarjana Universitas Andalas, Padang.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr.Wb

Syukur kehadirat Illahi atas segala limpahan rahmat dan karunia-Nya sehinggadengan kekuatan-Nyalah penulis dapat menyelesaikan sebuah karya kecil yang merupakan suatu tahap kehidupan yang harus dilalui yaitu sebuah tesis yang berjudul Aplikasi Metode *Cutting Plane*. Untuk Menyelesaikan Masalah Perencanaan Linier *Mixed Integer*. Tesis ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Pasca Sarjana Universitas Andalas.

Selanjutnya penulis mengucapkan terima kasih atas perhatian, dorongan, kritik dan saran kepada :

1. Bapak Prof.Dr.Ir.H.Novirman Jamarun, M.Sc, sebagai Direktur Pascasarjana Universitas Andalas, Padang.
2. Bapak Dr.Muhafzan, M.Si, sebagai ketua komisi pembimbing.
3. Ibu Nova Noliza Bakar, M.Si, sebagai anggota komisi pembimbing, keduannya yang telah penuh perhatian dan kesabaran dalam memberikan bimbingan dan nasehat selama penulisan tesis ini.
4. Bapak Jenizon, M.Si sebagai ketua program studi Matematika Universitas Andalas, Padang.
5. Bapak Zulakmal, M.Si, sebagai koodinator program S2 matematika guru.
6. Ibu Dr.Susila Bahri, M.Sc, Bapak Dr.I Made Arnawa, dan Bapak Budi Rudianto, M.Si, selaku penguji.
7. Bapak Drs.Asrijal, MM, selaku Kepala Sekolah SMAN 1 X Koto Singkarak, yang telah memberikan kesempatan.
8. "Kekasihku" Drs.Mulyadi.A, M.Si, yang selalu memberikan semangat, motivasi yang tulus, dukungan moril dan materiil yang sangat berarti bagi penulis.

9. "Anak-anakku" , Rezki, Iif dan Rifa, yang selalu memberikan semangat dan kiriman do'a.
10. Ibunda Hj. Tiramah.R, Hj.Djusma dan ayahanda H.Anwar Dt.Indo Marajo, yang senantiasa memberikan restu.
11. Adinda Yerizon, M.Si dan Erni Suharti, S.Pd ,yang selalu siap membantu.
12. Teman-teman seperjuangan pada jurusan matematika Universitas Andalas, Padang.
13. Teman-teman guru SMAN 1 X Koto Singkarak.
14. Dan semua pihak yang telah membantu penulisan tesis ini dan tidak dapat disebutkan satu persatu.

Padang, Juli 2008

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

KATA PENGANTAR ix

DAFTAR ISI xi

DAFTAR TABEL xiii

BAB I. PENDAHULUAN 1

1.1 Latar Belakang Masalah 1

1.2 Perumusan Masalah 2

1.3 Tujuan Penelitian 3

1.4 Manfaat Penelitian 3

BAB II. TINJAUAN PUSTAKA 5

2.1 Sistem Persamaan linier 5

2.2 Matriks 5

.3 Eliminasi Gauss Jordan 7

2.4 Masalah Perencanaan Linier 7

2.5 Metode Simpleks 9

2.6 Masalah Perencanaan Linier *Integer* 15

2.7 Metode *Cutting Plane* 16

BAB III. METODOLOGI PENELITIAN 21

3.1 Waktu Dan Tempat Penelitian 21

3.2 Metode Penelitian 21

BAB IV. PEMBAHASAN 22

4.1 Masalah Perencanaan Linier *Mixed Integer* 22

4.2 Kekuatan Bidang Pemotongan 26

BAB V. KESIMPULAN DAN SARAN.. 32

5.1 Kesimpulan 32

5.2 Saran.. 32

DAFTAR PUSTAKA.. 33

DAFTAR TABEL

Nomor Halaman

2.5.1. Tabel Awal Metode Simpleks 11

2.5.2. Tabel Optimal Metode Simpleks 13

2.5.3. Tabel Awal Metode Simpleks contoh 2 14

2.5.4. Tabel Iterasi 1 contoh 2 14

2.5.5. Tabel Optimal Metode Simpleks contoh 2 15

2.7.1. Tabel Awal Metode Simpleks contoh 4 17

2.7.2. Tabel Optimal Metode Simpleks contoh 4 18

2.7.3. Tabel Optimal Metode Simpleks setelah ditambah pemotongan fraksional.. 19

4.1.1. Tabel Optimal Metode Simpleks 23

4.2.1. Tabel Awal Metode Simpleks contoh 5 28

4.2.2. Tabel Iterasi 1 contoh 5 28

4.2.3. Tabel Optimal Metode Simpleks contoh 5 29

4.2.4. Tabel Optimal Metode Simpleks setelah ditambah *Mixed Cut* contoh 5 30

4.2.5. Tabel iterasi 1 setelah ditambah *Mixed Cut* contoh 5 30

4.2.6. Tabel Optimal *Mixed Integer* contoh 5 31

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Suatu permasalahan perencanaan linier biasanya menuntut solusi yang optimum agar diperoleh kondisi optimal yang diinginkan. Salah satu model untuk merepresentasikan permasalahan tersebut adalah dengan menggunakan program linier (*linear programming*). Biasanya suatu permasalahan perencanaan linier menginginkan nilai variabel keputusannya berupa *integer*, agar jawaban persoalan menjadi realistik. Misalnya, jika variabel keputusan yang dihadapi berkaitan dengan jumlah orang, mesin-mesin, kendaraan dan lain-lain, akan terasa janggal jika untuk menyelesaikan pekerjaan tertentu diperlukan 3,5 mesin dan 7,5 orang, sebaliknya jika pekerjaan itu memerlukan 4 atau 5 mesin dan 8 orang , maka keputusan akan terasa realistik dan lebih mudah.

Integer programming adalah suatu bentuk lain dari program linier (*linear programming*) di mana variabel-variabel keputusannya bertipe *integer* atau *mixed integer*. Sedangkan *non-integer programming* adalah suatu program linier dengan variabel-variabel keputusan bertipe *non-integer* (Aprilia,2005).

Integer programming dapat dipergunakan untuk permasalahan *integer linear programming* dan *integer non-linear programming*. *Integer linear programming* adalah *integer programming* dengan fungsi tujuan dan kendala berupa pertidaksamaan linier sedangkan *integer non-linear programming* adalah *integer* programming dengan fungsi tujuan dan kendala berupa pertidaksamaan non-linier.

Permasalahan *integer linear programming* mencakup permasalahan semua *integer, mixed integer* dan permasalahan *zero one*. Permasalahan semua *integer* adalah permasalahan *integer linear programming* dengan semua variabel keputusan dan kendala dibatasi berupa bilangan *integer*. Permasalahan *mixed integer* adalah permasalahan *integer linear programming* dengan kendala dibatasi bilangan *integer* dan sebagian variabel keputusan merupakan bilangan *integer*. Sedangkan permasalahan *zero one* adalah permasalahan *integer linear programming* dengan variabel keputusan satu dan nol.

Terdapat dua metode untuk menyelesaikan masalah *integer linear programming*. Dengan metode ini nanti akan dibuat batasan-batasan khusus yang akan memaksa pemecahan optimum dari masalah program linier untuk bergerak ke arah pemecahan *integer* atau *mixed integer* yang diinginkan. Metode itu adalah:

1. Metode *Cutting Plane*.
2. Metode *Branch and Bound*.

Dalam metode *Cutting Plane* dibuat kendala tambahan yang memotong daerah penyelesaian yang layak dari persoalan masalah *integer* atau *mixed integer*, sehingga dapat mengeliminasi penyelesaian yang bukan *integer*. Proses pemotongan pada daerah penyelesaian yang layak ini terus berlangsung sehingga diperoleh penyelesaian yang diinginkan. Sedangkan dalam metode *Branch and Bound* penyelesaian *integer* atau *mixed integer* diperoleh dengan melakukan pencabangan pada penyelesaian yang bukan *integer* sehingga didapatkan batas bawah atau batas atas yang optimal dari suatu permasalahan perencanaan *integer*.

1.2 Perumusan Masalah

Diberikan masalah perencanaan linier *integer* sebagai berikut :

maksimumkan

$$z = \mathbf{c}^T x.$$

dengan kendala

$$Ax \leq b\ ,\ x \geq \mathbf{0},$$

dengan :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Bagaimana menyelesaikan permasalahan di atas yang variabel keputusannya merupakan *mixed integer*, dengan menggunakan metode *Cutting Plane* .

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai optimal dari suatu fungsi objektif dalam program linier dengan variabel keputusan bernilai *mixed integer* dengan menggunakan metode *Cutting Plane.*

1.4 Manfaat Penelitian

Penulisan ini diharapkan dapat memberikan sumbangan pengetahuan baik kepada penulis sendiri maupun bagi pembaca dalam menyelesaikan masalah perencanaan linier *mixed integer* dengan menggunakan metode *Cutting Plane.*

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Untuk memahami pembahasan mengenai perencanaan permasalahan *mixed integer* dengan menggunakan metode *Cutting Plane*, terlebih dahulu ditinjau teori yang mendasarinya, antara lain :

2.1 Sistem Persamaan Linier

Suatu persamaan linier dalam n variabel $x_1, x_2, \cdots, x_n$, dapat dinyatakan sebagai sebuah persamaan dalam bentuk

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b .$$

di mana $a_1, a_2, \cdots, a_n$ dan b adalah konstanta riil.

Pemecahan (solusi) dari sebuah persamaan linier $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$ adalah sebuah urutan dari n bilangan $s_1, s_2 \cdots, s_n$, sehingga persamaan tersebut dipenuhi bila kita mensubstitusikan $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \cdots x_n = s_n$.

Suatu sistem persamaan linier yang terdiri dari n bilangan yang tak diketahui adalah kumpulan m persamaan linier yang berbentuk sebagai berikut :

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

di mana $x_1, x_2, \cdots, x_n$ adalah bilangan-bilangan tak diketahui.

Jika tanda "=" pada sistem persamaan linier diganti dengan tanda "$\leq$" atau "$\geq$", maka sistem tersebut dinamakan sistem pertidaksamaan linier.

Tidak semua sistem persamaan linier mempunyai pemecahan (solusi). Sebuah sistem persamaan linier yang tidak mempunyai pemecahan dikatakan tak konsisten, sedangkan jika sekurang-kurangnya ada satu pemecahan, maka sistem persamaan itu dikatakan konsisten (Leon, 1988).

Sebuah sistem persamaan linier dikatakan homogen, jika $b_i = 0, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n$, yaitu sistem tersebut mempunyai bentuk :

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

Setiap sistem persamaan linier homogen adalah sistem yang konsisten, karena $x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$, selalu merupakan sebuah pemecahan. Pemecahan itu disebut pemecahan trivial, sedangkan jika ada pemecahan lain, maka pemecahan lain itu disebut dengan pemecahan tak trivial .

2.2 Matriks

Definisi 2.2.1 (Anton,1988)

Matriks adalah sebuah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan di dalam susunan itu dinamakan *entri* di dalam matriks.

Ukuran sebuah matriks menyatakan banyaknya baris dan banyaknya kolom dalam sebuah matriks. Jika suatu matriks berukuran $m \times r$ maka matriks tersebut mempunyai banyak baris m dan banyak kolom r . Banyaknya baris yang diikuti banyaknya kolom pada sebuah matriks disebut dengan *orde* matriks.

Definisi 2.2.2 (Leon,1988)

Jika suatu matriks B yang mempunyai orde $m \times r$ disisipkan pada matriks A yang mempunyai orde $m \times n$, maka matriks yang diperbesar (*augmented matrix*) ditulis sebagai (A|B).

Jadi, jika

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mr} \end{bmatrix}$$

maka

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mr} \end{array}\right].$$

Definisi 2.2.3 (Noble,1988)

Matriks identitas disimbolkan dengan I_n, adalah sebuah matriks yang mempunyai orde $n \times n$ dengan elemen diagonal utamanya 1 dan elemen lainnya 0.

Jadi

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3 Eleminasi Gauss-Jordan

Definisi 2.3.1 (Leon,1988)

Suatu matriks dikatakan memiliki bentuk eselon baris jika :

1. Entri bukan nol pertama dalam setiap baris adalah 1 (utama).
2. Jika baris k tidak seluruhnya mengandung nol, maka banyaknya entri nol dibagian muka pada baris $k+1$ lebih besar dari banyaknya entri nol di bagian muka pada baris k.
3. Jika terdapat baris-baris yang entrinya semuanya nol, maka baris-baris ini berada di bawah baris-baris yang memiliki entri-entri bukan nol.

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.3.2 (Leon,1988)

Suatu matriks dikatakan memiliki bentuk eselon baris tereduksi jika :

1. Matriks memiliki bentuk eselon baris.
2. Entri bukan nol pertama dalam setiap baris adalah satu-satunya entri bukan nol dalam kolom yang bersangkutan.

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.3.3 (Leon,1988)

Eleminasi Gauss-Jordan adalah suatu proses menggunakan operasi-operasi baris elementer untuk mengubah suatu sistem linier menjadi sistem yang matriks diperbesarnya menjadi bentuk eselon baris tereduksi.

2.4 Masalah Perencanaan Linier

Masalah perencanaan linier adalah masalah mengoptimalkan sebuah fungsi objektif

$$z = \mathbf{c}^T x.$$

dengan kendala

$$Ax \le b \ , x \ge \mathbf{0}.$$

atau

$$Ax \ge b \ , x \ge \mathbf{0}.$$

dimana

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Secara eksplisit dapat disajikan dalam bentuk :

fungsi objektif

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n$$

dengan kendala

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \le & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \le & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \le & b_m \end{array}$$

atau

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \ge & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \ge & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \ge & b_m \end{array}$$

$$x_i \ge 0 \quad \forall_i = 1, 2, \cdots, n.$$

Dalam membangun suatu model perencanaan linier digunakan karakteristik sebagai berikut :

1. Fungsi tujuan merupakan fungsi dari variabel keputusan yang akan dimaksimumkan atau diminimumkan.
2. Kendala merupakan pembatas yang dihadapi sehingga tidak boleh ditentukan nilai-nilai variabel keputusan secara sebarang.
3. Variabel keputusan adalah variabel yang menguraikan secara lengkap keputusan yang akan dibuat.

4. Pembatas tanda adalah pembatas yang menjelaskan apakah variabel keputusannya diasumsikan hanya bernilai nonnegatif atau variabel keputusan tersebut bernilai positif .

Definisi 2.4.1 (Rao,1995)

Penyelesaian dasar adalah sebuah penyelesaian yang diperoleh dengan mengnolkan sebanyak (n-m) variabel (n $\geq$ m).

Definisi 2.4.2 (Rao, 1995)

Jika seluruh variabel pada suatu penyelesaian dasar bernilai non negatif, maka penyelesaian itu disebut daerah penyelesaian dasar yang layak.

Definisi 2.4.3 (Rao,1995)

Penyelesaian optimal adalah penyelesaian layak yang mengoptimumkan fungsi objektif.

Definisi 2.4.4 (Rao, 1995)

Titik ekstrim adalah sebuah titik pada himpunan konveks yang tidak terletak pada suatu segmen garis yang menghubungkan dua titik lainnya.

2.5 Metode Simpleks

Metode simpleks ialah suatu metode yang dilakukan secara iteratif , dimulai dari suatu penyelesaian dasar yang layak ke penyelesaian dasar layak lainnya, sehingga akhirnya tercapai suatu pamecahan dasar yang optimum.

Setiap iterasi pada metode simpleks memiliki variabel masukan dan variabel keluaran. Variabel masukan dinamakan kondisi optimalitas, sedangkan variabel keluaran dinamakan dengan kondisi kelayakan.

Kondisi optimalitas dipilih dari

$$\min = \left\{ \frac{\text{sisi kanan baris}}{\text{koefisien dari variabel masukan pada baris}} \right\}$$

Adapun prosedur metode simpleks adalah sebagai berikut

Diberikan suatu masalah perencanaan linier

Misalkan fungsi objektif dinyatakan sebagai.

Maksimumukan

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

dengan kendala

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array} \qquad \text{............(2.5.1)}$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall_i = 1, 2, \cdots, n.$$

(Supranto, 2006)

Sebuah variabel *slack* ditambahkan untuk batasan "$\leq$" dan mewakili jumlah kelebihan sisi kanan suatu kendala, dibandingkan sisi kiri dari kendala tersebut. Sebuah variabel *surplus* ditambahkan untuk batasan "$\geq$" dan mewakili kelebihan jumlah sisi kiri suatu kendala dibandingkan sisi kanan kendala tersebut. (Taha,2005).

Contoh 1:

1. $2x_1 + 5x_2 - 4x_3 \leq 4$.

   Tambahkan variabel *slack* s_1 pada ruas kiri, sehingga diperoleh persamaan $2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + s_1 = 4, \quad s_1 \geq 0$.

2. $x_1 - x_2 + x_3 \geq 6$.

   Karena pada ruas kiri tidak lebih kecil dari ruas kanan maka harus dikurangkan dengan variabel *surplus* e_1 pada ruas kiri sehingga diperoleh persamaan.

   $x_1 - x_2 + x_3 - e_1 = 6, \quad e_1 \geq 0$.

Dengan demikian permasalahan program linier (2.5.1) di atas menjadi bentuk sebagai berikut :

Maksimumkan

$$-c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n + 0.s_1 + 0.s_2 + \cdots + 0.s_m + z = 0.$$

dengan kendala

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & + & s_1 & & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & & + & s_2 & = & b_2 \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & + & & + & s_m & = & b_m
\end{array}.$$

$$s_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \cdots, m.$$

Persamaan di atas dapat disajikan dalam bentuk Tabel Awal Metode Simpleks, yaitu:

Tabel 2.5.1. Tabel Awal Metode Simpleks

C_B	V_B	x_1	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n	s_1	$\cdots$	s_i	$\cdots$	s_m	z	b
		c_1	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_n	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	0	
0	s_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1n}	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	0	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	s_i	a_{i1}	$\ddots$	a_{ij}	$\ddots$	a_{in}	0	$\ddots$	1	$\ddots$	0	0	b_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	s_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mj}	$\cdots$	a_{mn}	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	0	b_m
$z_j - c_j$		$-c_1$	$\cdots$	$-c_j$	$\cdots$	$-c_n$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	1	

Keterangan:

1. Kolom pertama adalah C_B, yaitu koefisien dari varíbel dasar.
2. Kolom kedua adalah V_B, yaitu variabel-variabel dasar.
3. Kolom ketiga adalah nilai dari koefisien pada persamaan kendala .
4. Kolom keempat adalah nilai dari koefisien pada persamaan fungsi tujuan.
5. Kolom kelima adalah nilai variabel dasar dan nilai objektif z, sebagai penyelesaian dasar layak yang bersangkutan.

Pada masalah maksimisasi, variabel masukan adalah variabel nondasar dengan koefisien paling negatif dalam persamaan z tujuan. Sedangkan untuk variabel keluaran adalah variabel dasar saat ini yang memiliki titik potong terkecil (rasio minimum dengan penyebut yang positif secara ketat) dalam arah variabel masukan Nilai yang sama dapat dipilih sebarang.

Solusi optimal dicapai ketika semua koefisien nondasar dalam persamaaan z tujuan adalah nonnegatif.

Langkah-langkah iterasi pada metode simpleks ádalah sebagai berikut ;

1. Ubah masalah perencanaan linier kedalam bentuk stándar.
2. Tentukan pemecahan dasar awal yang layak.
3. Pilih variabel masukan di antara variabel non dasar dengan menggunakan kondisi optimalitas.
4. Tentukan nilai variabel dasar yang baru dengan membuat variabel masukan tersebut sebagai variabel dasar dan variabel keluaran sebagai variabel non dasar. Kembali ke langkah 1.

Pertukaran antara variabel masukan dan variabel keluaran dilakukan dengan menggunakan **eleminasi Gauss-Jordan.** Jika salah satu variabel nondasar dapat memperbaiki fungsi tujuan, maka salah satu variabel dasar saat itu harus dikeluarkan dari pemecahan, karena salah satu persyaratan variabel dasar harus tepat sama dengan banyak persamaan Metode ini dimulai dengan mengidentifikasikan kolom di bawah variabel masukan sebagai kolom masuk. Baris yang berkaitan dengan variabel keluaran disebut **persamaan *pivot*** dan elemen di titik potong antara kolom masuk dan persamaan *pivot* disebut sebagai **elemen *pívot.***

Setelah dilakukan iterasi , penyelesaian yang diperoleh dapat disajikan dalam bentuk Tabel Optimal Metode Simpleks, yaitu :

Tabel 2.5.2. Tabel Optimal Metode Simpleks

C_B	V_B	x_1	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n	s_1	$\cdots$	s_i	$\cdots$	s_m	z	b_i
		c_1		c_j		c_n	0		$\cdots$		0		
c_1	x_1	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	α_{11}	$\cdots$	α_{1i}	$\cdots$	α_{1m}	0	β_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_j	x_j	0	$\ddots$	1	$\ddots$	0	α_{j1}	$\ddots$	α_{ji}	$\ddots$	α_{jm}	0	β_j
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_n	x_n	0	$\cdots$		$\cdots$	1	α_{n1}	$\cdots$	α_{ni}	$\cdots$	α_{nm}	0	β_m
$z_j - c_j$		0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	z_1	$\cdots$	z_i	$\cdots$	z_m	1	z

Keterangan :

1. Variabel x_j adalah variabel dasar dengan $j = 1, 2, \ldots, n$.
2. x_{n+i} adalah variabel non dasar dengan $i = 1, 2, \ldots, m$.
3. z adalah nilai fungsi tujuan.

Contoh 2:

Maksimalkan

$$z = 40x_1 + 60x_2 .$$

kendala

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 70 \\ x_1 + x_2 &\leq 40 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 90 \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0 .$$

Dengan menggunakan metode simpleks tentukan solusi optimal dari z dan nilai variabel-variabelnya!

Untuk menyelesaikan masalah di atas dengan menggunakan metode simpleks, terlebih dahulu ditambahkan variabel slack pada pembatas, sehingga pembatas merupakan sebuah persamaan.

Maksimalkan.

$$-40x_1 - 60x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 + z = 0 .$$

dengan kendala.

$$
\begin{array}{lllllllll}
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 70 \\
x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 40 \\
x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_5 & = & 90
\end{array}
$$

Persamaan di atas dapat disajikan dalam bentuk Tabel Awal Metode Simpleks, yaitu:

Tabel 2.5.3 Tabel Awal Metode Simpleks contoh 2

C_B	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	b_i
		40	60	0	0	0		
0	x_3	2	1	1	0	0	0	70
0	x_4	1	1	0	1	0	0	40
0	x_5	1	3	0	0	1	0	90
$z_j - c_j$		-40	-60	0	0	0	1	0

Keterangan :

Baris ke-3 (baris x_5) adalah persamaan pivot, sedangkan kolom ke-2 (kolom x_2) adalah kolom pivot dan 3 adalah elemen pivot.

Tabel 2.5.4 Tabel Iterasi 1 contoh 2

C_B	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	b_i
		40	60	0	0	0		
0	x_3	$\frac{5}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	40
0	x_4	$\frac{2}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	1
60	x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	30
$z_j - c_j$		-20	0	500	0	20	1	1800

Tabel 2.5.5. Tabel Optimal Metode Simpleks contoh 2

C_B	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	b_i
		40	60	0	0	0		
0	x_3	0	0	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	15
0	x_1	1	0	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	15
60	x_2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	25
$z_j - c_j$		0	0	0	30	10	1	2100

Jadi nilai maksimal dicapai sebesar 2100 dengan $x_1 = 15$ dan $x_2 = 25$

2.6 Masalah Perencanaan *Linear Integer*

Masalah perencanaan *linear integer* adalah suatu permasalahan linier yang variabelnya merupakan bilangan *integer* atau *mixed integer*. Masalah perencanaan linier *integer* berhubungan dengan fungsi diskrit yang memerlukan variabel nonnegatif dan *integer*. Jika penyelesaian optimal dan layak dari sebuah masalah perencanaan linier adalah *integer*, maka penyelesian itu juga merupakan penyelesaian optimal dan layak bagi persoalan *linear integer*. Hal ini berarti bahwa daerah penyelesaian yang layak untuk setiap masalah perencanaan *linear integer*, akan berada dalam daerah penyelesain yang layak untuk masalah perencanaan linier yang mengabaikan batasan *integer* untuk variabelnya. Jika pada persoalan masalah perencanaan *linear integer* semua variabelnya dibatasi bernilai *integer*, maka masalah perencanaan ini disebut permasalahan linier *integer* murni (*Pure Integer Programming*). Sedangkan jika masalah perencanaan *linear integer* beberapa variabelnya dibatasi bernilai *integer*, maka masalah perencanaan ini disebut permasalahan linier *integer* campuran (*Mixed Integer Programming*).

2.7 Metode *Cutting Plane* (Taha,2005)

Gagasan dari metode *Cutting Plane* adalah mengubah himpunan titik ekstrim yang memenuhi semua kendala pada daerah penyelesaian yang layak, sehingga titik eksrim yang sesuai menjadi *integer* atau *mixed integer*. Pemotongan daerah penyelesaian yang layak ini harus berada dalam himpunan titik-titik yang memenuhi semua kendala pada daerah penyelesaian yang layak.

Definisi 2.7.1 (Purcell,1993)

$[\![x]\!]$ adalah bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x.

Contoh 3:

1. $[\![-3{,}1]\!] = -4$
2. $[\![3{,}1]\!] = 3$

Perhatikan masalah perencanaan linier berikut :

Maksimumkan

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

dengan kendala

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \le & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \le & b_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \le & b_m
\end{array}$$

$$x_1, x_2, \cdots x_n \ge 0,\ x_i \text{ integer},\ i = 1, 2, \cdots, n\ .$$

Pada masalah perencanaan linier *integer* murni (*Pure Integer Programming*) , variabel keputusan dibatasi hanya bernilai *integer*. Syarat dasar untuk *integer* murni adalah semua koefisien kendala dan ruas kanannya harus bertipe *integer*, sehingga jika kendala belum *integer* maka harus ditransformasikan terlebih dahulu ke dalam bentuk *integer*.

Contoh 4:

Misalkan kendala

$$x_1 + \tfrac{1}{5}x_2 \leq \tfrac{7}{2}.$$

harus ditransformasikan menjadi

$$10x_1 + 2x_2 \leq 35.$$

Untuk menyelesaikan permasalahan di atas , bentuk permasalahan diubah ke dalam bentuk.

maksimumkan

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + 0.x_{n+1} + 0.x_{n+2} + \cdots + 0.x_{n+m}.$$

dengan kendala

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & + & x_{n+1} & & & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & & + & x_{n+2} & & = & b_2 \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & & & + & x_{n+m} & = & b_m
\end{array}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_{n+m} \geq 0 \text{ dan } \textit{integer}.$$

Persamaan di atas dapat disajikan dalam bentuk Tabel Awal Metode Simpleks, yaitu :

Tabel 2.7.1. Tabel Awal Metode Simpleks contoh 4

C_B	V_B	x_1	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+i}	$\cdots$	x_{n+m}	z	b
		c_1	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_n	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	0	
0	x_{n+1}	a_{11}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1n}	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	0	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	x_{n+i}	a_{i1}	$\ddots$	a_{ij}	$\ddots$	a_{in}	0	$\ddots$	1	$\ddots$	0	0	b_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	x_{n+m}	a_{m1}	$\cdots$	a_{mj}	$\cdots$	a_{mn}	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	0	b_m
z_j - c_j		$-c_1$	$\cdots$	$-c_j$	$\cdots$	$-c_n$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	1	

Setelah dilakukan iterasi , penyelesaian yang diperoleh dapat disajikan dalam bentuk Tabel Optimal Metode Simpleks, yaitu :

Tabel 2.7.2. Tabel Optimal Metode Simpleks contoh 4

C_B	V_B	x_1	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+i}	$\cdots$	x_{n+m}	z	b_i
		c_1		c_j		c_n	0		$\cdots$		0		
c_1	x_1	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	α_{11}	$\cdots$	α_{1i}	$\cdots$	α_{1m}	0	β_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_j	x_j	0	$\ddots$	1	$\ddots$	0	α_{j1}	$\ddots$	α_{ji}	$\ddots$	α_{jm}	0	β_j
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_n	x_n	0	$\cdots$		$\cdots$	1	α_{n1}	$\cdots$	α_{ni}	$\cdots$	α_{nm}	0	β_m
$z_j - c_j$		0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	z_1	$\cdots$	z_i	$\cdots$	z_m	1	z

Pada persamaan ke- j dengan variabel dasar x_j dari tabel 2.7.2. yang nilainya belum *integer*, pemotong yang ditambahkan adalah pemotongan fraksional dengan bentuk

$$s_j = \sum_{i=1}^{m} f_{ji} x_{n+i} - f_j \,,\; s_j \geq 0 \,.$$

dan baris sumber

$$x_j = \beta_j - \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji} x_{n+i} \,.$$

$i = 1, 2, \cdots, m$ dan $j = 1, 2, \cdots, n$, dimana $\beta_j = \lfloor\beta_j\rfloor + f_j$ dan $\alpha_{ji} = \lfloor\alpha_{ji}\rfloor + f_{ji}$. $\lfloor\beta_j\rfloor$ adalah *integer* terbesar sehingga $\beta_j \geq \lfloor\beta_j\rfloor$ dan $0 < f_j < 1$, sedangkan $\lfloor\alpha_{ji}\rfloor$ adalah *integer* terbesar sehingga $\alpha_{ji} \geq \lfloor\alpha_{ji}\rfloor$ dan $0 \leq f_{ji} < 1$.

Variabel s_j merupakan variabel *slack*, dengan $s_j \geq 0$ dan *integer*. Untuk $x_{n+i} = 0$ maka $s_j = -f_j$ yang tidak layak, dan metode simpleks dipergunakan kembali untuk kondisi ketidaklayakan ini sampai dihasilkan variabel *integer*. Bentuk tabel optimal metode simpleks setelah ditambahkan pemotongan fraksional dapat disajikan sebagai berikut :

Tabel 2.7.3.Tabel Optimal Metode Simpleks setelah ditambah pemotongan fraksional

C_B	V_B	x_1	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+i}	$\cdots$	x_{n+m}	s_j	b_i
		c_1		c_j		c_n	0		$\cdots$		0		
c_1	x_1	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	α_{11}	$\cdots$	α_{1i}	$\cdots$	α_{1m}	0	β_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_j	x_j	0	$\ddots$	1	$\ddots$	0	α_{j1}	$\ddots$	α_{ji}	$\ddots$	α_{jm}	0	β_j
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_n	x_n	0	$\cdots$		$\cdots$	1	α_{n1}	$\cdots$	α_{ni}	$\cdots$	α_{nm}	0	β_m
0	s_j	0		0		0	$-f_{j1}$		$-f_{ji}$		$-f_{nm}$	1	$-f_j$
	z	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	z_1	$\cdots$	z_j	$\cdots$	z_n	0	β

Jika penyelesaian yang baru menghasilkan nilai *integer* untuk semua variabel x_i termasuk variabel *slack*, maka proses penyelesaian berakhir. Jika tidak, maka pemotongan yang baru dengan pemotongan fraksional dapat dilanjutkan sampai semua variabel menjadi *integer*.

Jika terdapat variabel yang memiliki penyelesaian *non integer* lebih dari satu, maka harus dipilih salah satu dari variabel tersebut untuk menurunkan persamaan pemotongan fraksional. Dalam hal ini, variabel yang dipilih harus memberikan ketidaksamaan yang "kuat", yaitu yang dapat mempercepat penyelesaian integer optimal. Ketidaksamaan $\sum_{i=1}^{m} f_{ji} x_{n+i} \geq f_j$ dikatakan "lebih kuat" daripada ketidaksamaan $\sum_{i=1}^{m} f_{ki} x_{n+i} \geq f_k$, jika $f_j \geq f_k$ dan $f_{ji} \geq f_{ki}$, untuk semua nilai i , sehingga pemotongan fraksional ditambahkan pada baris yang mempunyai :

1. Maksimum- $j\left(f_j\right)$, artinya baris yang mempunyai pecahan terbesar, atau

2. Maksimum- $j\left\{\dfrac{f_j}{\sum_{i=1}^{m} f_{ji}}\right\}$, artinya baris dengan rasio $\dfrac{f_j}{\sum_{i=1}^{m} f_{ji}}$ terbesar.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan mulai Desember 2007 sampai dengan bulan Juni 2008. Tempat penelitian adalah di perpustakaan jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas Padang.

3.2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penulisan ini adalah studi liteatur. Setelah semua bahan yang diperlukan terkumpul, dipelajari dan dipahami, maka untuk mencapai tujuan penulisan yang pertama dilakukan langkah-langkah penelitian sebagai berikut secara berurutan :

1. Langkah awal adalah merumuskan permasalahan ke dalam bentuk program linier, dengan menentukan fungsi tujuan dan pertidaksamaan kendala.
2. Dengan menggunakan metode simpleks, ditentukan nilai masing-masing variabel pada fungsi tujuan.
3. Jika variabel-variabel keputusan dari masalah perencanaan linier sudah merupakan *mixed integer* yang memenuhi batasan permasalahan, maka pemecahan masalah sudah dapat ditentukan , tetapi jika variabel-variabel dari permasalahan belum memenuhi batasan yang diinginkan maka lakukan langkah kedua, yaitu:
4. Mengembangkan sebuah pemotong baru pada tabel dan metode simpleks dipergunakan sekali lagi untuk ketidak layakan ini. Prosedur ini diulangi sampai pemecahan *mixed integer* di capai. Tetapi, jika di salah satu iterasi simpleks tersebut tidak ada pemecahan yang layak, masalah tersebut tidak memiliki pemecahan *mixed integer* yang layak.

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Masalah Perencanaan Linier *Mixed Integer*

Bentuk umum perencanan linier *mixed integer* adalah sebagai berikut :

Maksimumkan

$$z = c_1 x_1 + \cdots + c_j x_j + \cdots + c_n x_n$$

dengan kendala

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1j}x_j & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \\
a_{i1}x_1 & + & \cdots & + & a_{ij}x_j & + & \cdots & + & a_{in}x_n & \leq & b_i \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & + & \cdots & + & a_{mj}x_j & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m
\end{array}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, n$$
$$x_j \in Z^+, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, p, \quad p < n$$

dengan Z^+ menyatakan himpunan bilangan bulat positif

Masalah perencanaan linier *mixed integer* adalah masalah menentukan nilai variabel keputusan x_j.

Dalam menyelesaikan masalah perencanaan *integer* murni syarat utama adalah semua koefisien kendala dan ruas kanannya harus *integer*. Hal ini diperlukan karena dalam penyelesaian *integer* murni tidak membedakan antara variabel dasar dan variabel *slack*, semuanya harus integer, sehingga penambahan pemotongan yang sesuai adalah pemotongan fraksional.

Dalam masalah perencanaan *mixed integer,* beberapa variabel *slack* dibatasi nilai *integer*, sehingga pemotongan fraksional tidak dapat lagi digunakan.

4.1.1 Metode Simpleks

Untuk menyelesaikan permasalahan di atas, bentuk masalah diubah ke dalam bentuk:

maksimumkan

$$z = c_1x_1 + \cdots + c_jx_j + \cdots + c_nx_n + 0.x_{n+1} + \cdots + 0.x_{n+i} + \cdots + 0.x_{n+m}$$

dengan kendala

$$\begin{array}{lllllllllllllll}
a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1j}x_j & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & + & x_{n+1} & & & = & b_1 \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & + & \cdots & + & a_{ij}x_j & + & \cdots & + & a_{in}x_n & + & \cdots & + & x_{n+i} & = & b_i \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mj}x_j & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & + & \cdots & \cdots & + \; x_{n+m} & = & b_m
\end{array}$$

$$x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+i}, \ldots, x_{n+m} \geq 0$$

Dengan menggunakan metode simpleks diperoleh solusi optimal, yang disajikan dalam Tabel Optimal Metode Simpleks sebagai berikut :

Tabel 4.1.1. Tabel Optimal Metode Simpleks

C_B	V_B	x_1	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+i}	$\cdots$	x_{n+m}	z	b_i
		c_1		c_j		c_n	0		$\cdots$		0		
c_1	x_1	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	α_{11}	$\cdots$	α_{1i}	$\cdots$	α_{1m}	0	β_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_j	x_j	0	$\ddots$	1	$\ddots$	0	α_{j1}	$\ddots$	α_{ji}	$\ddots$	α_{jm}	0	β_j
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$					$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_n	x_n	0	$\cdots$		$\cdots$	1	α_{n1}	$\cdots$	α_{ni}	$\cdots$	α_{nm}	0	β_m
$z_j - c_j$		0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	z_1	$\cdots$	z_i	$\cdots$	z_m	1	z

4.1.2 Aplikasi Metode *Cutting Plane* dalam Masalah Perencanaan Linier *Mixed Integer*

Perhatikan persamaan ke-k dengan variabel dasar x_k pada Tabel 4.1.1 yang nilainya belum *integer* ;

$$x_k = \beta_k - \left(\alpha_{k1} x_{n+1} + \cdots + \alpha_{ki} x_{n+i} + \cdots + \alpha_{km} x_{n+m}\right)$$

$$= \beta_k - \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ki} x_{n+i} \text{ , } \qquad \text{...(4.1.1)}$$

dimana β_k non *integer* .

Dengan membuat $\beta_k = [\![\beta_k]\!] + f_k$, dimana $[\![\beta_k]\!]$ adalah *integer* terbesar sehingga $\beta_k \geq [\![\beta_k]\!]$ dan $0 < f_k < 1$, dan $\alpha_{ki} = \alpha_{ki}^{+} + \alpha_{ki}^{-}$,

dimana

$$\alpha_{ki}^{+} = \begin{cases} \alpha_{ki} & \text{jika} \quad \alpha_{ki} \geq 0 \\ 0 & \text{jika} \quad \alpha_{ki} < 0 \end{cases}$$

dan

$$\alpha_{ki}^{-} = \begin{cases} 0 & \text{jika} \quad \alpha_{ki} \geq 0 \\ \alpha_{ki} & \text{jika} \quad \alpha_{ki} < 0 \end{cases}$$

sehingga persamaan 4.1.1 menjadi

$$x_k = [\![\beta_k]\!] + f_k - \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ki} x_{n+i}$$

$$x_k - [\![\beta_k]\!] = f_k - \sum_{i=1}^{m} \left(\alpha_{ki}^{+} + \alpha_{ki}^{-}\right) x_{n+i}$$

atau

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{ki}^{+} + \alpha_{ki}^{-}\right) x_{n+i} = f_k + [\![\beta_k]\!] - x_k \qquad \text{.......................(4.1.2)}$$

Karena $0 < f_k < 1$, maka terjadi dua kasus, yaitu $f_k + [\![\beta_k]\!] - x_k \geq 0$ atau $f_k + [\![\beta_k]\!] - x_k < 0$.

Jika $f_k + [\![\beta_k]\!] - x_k \geq 0$ dan x_k adalah *integer*, maka $f_k + [\![\beta_k]\!] - x_k$ dapat dinyatakan sebagai : $f_k + [\![\beta_k]\!] - x_k = f_k + i, \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$, sehingga persamaan 4.1.2 menjadi

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\alpha_{ki}^{+} + \alpha_{ki}^{-}\right) x_{n+i} \geq f_k$$

Karena $\alpha_{ki}^{-} < 0$, dan $x_{n+i} \geq 0$, maka

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ki}^{+} x_{n+i} \geq \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{ki}^{+} + \alpha_{ki}^{-}\right) x_{n+i},$$

Akibatnya, diperoleh

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ki}^{+} x_{n+i} \geq f_k \quad \text{...(4.1.3)}$$

Jika $f_k + [\beta_k] - x_k < 0$, dan x_k adalah *integer*, maka $f_k + [\![\beta_k]\!] - x_k$ dapat dinyatakan sebagai : $f_k + [\![\beta_k]\!] - x_k = -i + f_k, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$, sehingga persamaan 4.1.2 menjadi

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\alpha_{ki}^{+} + \alpha_{ki}^{-}\right) x_{n+i} \leq f_k - 1,$$

Karena $\alpha_{ki}^{-} < 0$, dan $x_{n+i} \geq 0$, maka

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ki}^{-} x_{n+i} \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{ki}^{+} + \alpha_{ki}^{-}\right) x_{n+i}$$

Akibatnya diperoleh

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ki}^{-} x_{n+i} \leq f_k - 1 \quad \text{...(4.1.4)}$$

atau

$$\frac{1}{f_k - 1} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ki}^{-} x_{n+i} \leq 1,$$

Karena $f_k > 0$, pertidaksamaan 4.1.4, menjadi

$$\frac{f_k}{f_k - 1}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ki}^{-}x_{n+i} \geq f_k \text{ ....(4.1.5)}$$

Dari pertidaksamaan (4.1.3) dan pertidaksamaan (4.1.5) diperoleh :

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ki}^{+}x_{n+i} + \frac{f_k}{f_k - 1}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ki}^{-}x_{n+i} \geq f_k \text{ ....(4.1.6)}$$

Sebuah variabel surplus e_i ditambahkan pada ruas kiri pertidaksamaan 4.1.6, sehingga menjadi sebuah persamaan

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ki}^{+}x_{n+i} + \frac{f_k}{f_k - 1}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ki}^{-}x_{n+i} - e_k = f_k$$

atau

$$e_k = \sum_{i=1}^{m}\alpha_{ki}^{+}x_{n+i} + \frac{f_k}{f_k - 1}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ki}^{-}x_{n+i} - f_k, \quad e_k \geq 0, \text{ ....(4.1.7)}$$

Persamaan 4.1.7 disebut dengan pemotongan campuran (*mixed cut*)

Pada Tabel Optimal (Tabel 4.2.1) , $x_{n+i} = 0$, sehingga persamaan 4.1.7, menjadi $e_k = -f_k$, yang tidak layak. Hal ini berarti bahwa kendala baru ditambahkan dan metode simpleks dipergunakan kembali untuk ketidaklayakan ini.

4.2 Kekuatan Bidang Pemotongan

Dalam permasalahan perencanaan linier *mixed integer*, beberapa variabel x_{n+i} kemungkinan adalah *integer*. Maka untuk menurunkan pemotongan campuran (*mixed integer*), harus diperhatikan pemotongan yang lebih "kuat", yaitu :

$$e_k = -f_k + \sum_{i=1}^{m}\lambda_{n+i}x_{n+i}$$

dimana

$$\lambda_{n+i} = \begin{cases} \alpha_{kj} & \text{jika} \quad \alpha_{kj} \geq 0 \quad \text{dan} \quad x_{n+i} \quad \text{integer} \\ \dfrac{f_k}{f_k - 1}\alpha_{kj} & \text{jika} \quad \alpha_{kj} < 0 \quad \text{dan} \quad x_{n+i} \quad \text{noninteger} \\ f_{kj} & \text{jika} \quad f_{kj} \leq f_k \quad \text{dan} \quad x_{n+i} \quad \text{integer} \\ \dfrac{f_k}{1 - f_k}(1 - f_{kj}) & \text{jika} \quad f_{kj} > f_k \quad \text{dan} \quad x_{n+i} \quad \text{integer} \end{cases}$$

Langkah-langkah penyelesaian perencanaan *mixed integer* dengan menggunakan metode *Cutting Plane* adalah sebagai berikut :

I. Cari penyelesaian optimal dengan menggunakan metode simpleks. Jika semua variabel keputusan sudah memenuhi kendala, maka penyelesaian optimal sudah dapat ditentukan, jika tidak lanjutkan ke langkah 2.

II. Perhatikan variabel keputusan yang harus bernilai integer. Bentuk baris sumber dan pemotongan campuran (*mixed cut*).

III. Tambahkan kendala baru pada tabel simpleks. Karena ketidaklayakan nilai variabel dasar yang baru, metode simpleks digunakan sekali lagi.

IV. Jika variabel yang diperlukan sudah *integer*, maka penyelesaian masalah perencanaan linier *mixed integer* sudah optimal, jika tidak ulangi langkah 2.

Contoh 5:

Maksimumkan

$$z = 3x_1 + 4x_2 .$$

dengan kendala

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 11x_2 &\leq 66 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

x_2 *integer*.

Untuk menyelesaikan masalah diatas dengan menggunakan metode simpleks, terlebih dahulu diubah kedalam bentuk.

maksimumkan

$$z = 3x_1 + 4x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 .$$

dengan kendala

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 \quad &= 12 \\ 3x_1 + 11x_2 \quad + x_4 &= 66 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

x_2 *integer.*

Persamaan di atas dapat disajikan dalam bentuk Tabel Awal Metode Simpleks, yaitu :

Tabel 4.2.1: Tabel Awal Metode Simpleks contoh 5

C_B	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	z	b
		3	4	0	0		
0	x_3	3	-1	1	0	0	12
0	x_4	3	11^{*}	0	1	0	66
$z_j - c_j$		-3	-4	0	0	1	0

Tabel 4.2.2 : Tabel Iterasi 1 contoh 5

C_B	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	z	b
		3	4	0	0		
0	x_3	$\frac{36}{11}^{*}$	0	1	$\frac{1}{11}$	0	18
4	x_2	$\frac{3}{11}$	1	0	$\frac{1}{11}$	0	6
$z_j - c_j$		$-\frac{21}{11}$	0	0	$\frac{4}{11}$	1	24

Tabel 4.2.3 : Tabel Optimal Metode Simpleks contoh 5

C_B	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	z	b
		3	4	0	0		
3	x_1	1	0	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{11}{2}$
4	x_2	0	1	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{9}{2}$
$z_j - c_j$		0	0	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$	1	$\frac{69}{2}$

Dari tabel iterasi 2 diperoleh nilai $x_1 = \frac{11}{2}$ dan nilai $x_2 = \frac{9}{2}$, dengan nilai maksimal $z = \frac{69}{2}$.

Perhatikan baris kedua dimana nilai x_2 di batasi integer; $x_2 - \frac{1}{12}x_3 + \frac{1}{12}x_4 = \frac{9}{2}$.

Baris kedua ini merupakan baris sumber, dengan metode *Cutting Plane* dibuat kendala baru e_2, dimana

$$e_2 = \frac{1}{12}x_4 + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{12}x_3\right) - \frac{1}{2}$$

$$e_2 + \frac{1}{12}x_3 - \frac{1}{12}x_4 = -\frac{1}{2}$$

Tambahkan kendala baru pada tabel 4.2.3, dan metode simpleks digunakan kembali untuk mencapai nilai *integer* yang diinginkan, sehingga Tabel Optimal Metode Simpleks yang telah ditambah pemotongan campuran (*mixed cut*) menjadi :

Tabel 4.2.4 Tabel Optimal Metode Simpleks setelah ditambah *Mixed Cut* contoh 5

C_B	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	z	e_2	b
		3	4	0	0			
3	x_1	1	0	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{11}{2}$
4	x_2	0	1	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	0	$\frac{9}{2}$
$z_j - c_j$		0	0	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$	1	0	$\frac{69}{2}$
0	e_2	0	0	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	0	1	$-\frac{1}{2}$

Tabel 4.2.5 Tabel iterasi 1 setelah ditambah *Mixed Cut* contoh 5

C_B	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	z	e_2	b
		3	4	0	0			
3	x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{16}{3}$
4	x_2	0	1	0	0	0	1	4
$z_j - c_j$		0	0	1	0	1	5	32
0	x_4	0	0	-1	1	0	-12	6

Tabel 4.2.6 Tabel Optimal *Mixed Integer* contoh 5

C_B	V_B	x_1	x_2	x_3	x_4	z	e_2	b
		3	4	0	0			
3	x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{16}{3}$
4	x_2	0	1	0	0	0	1	4
0	x_4	0	0	-1	1	0	-12	6
$z_j - c_j$		0	0	1	0	1	5	32

Karena nilai x_2 sudah *integer* sesuai dengan kendala yang diberikan maka penyelesaian optimal sudah dapat ditentukan, yaitu : $x_1 = \frac{16}{3}, \quad x_2 = 4, \quad dan \quad z = 32$

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan diatas dapat disimpulkan bahwa metode *Cutting Plane* dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian optimal dalam masalah perencanaan linier *mixed integer* dengan membuat pembatas yang memotong daerah penyelesaian layak, sehingga penyelesaian untuk masalah ini menjadi *mixed integer*.

Untuk masalah dengan variabel yang cukup banyak, tabel simpleks bertambah panjang dan lebar, tetapi jumlah maksimum kendala tambahan tidak melebihi jumlah semua variabel asli $(n+m)$ dengan n banyak variabel dan m banyak persamaan.

5.2 Saran

Adapun saran yang dikemukakan sehubungan dengan penelitian ini adalah :

Penggunaan metode *Cutting Plane* dalam menyelesaikan masalah perencanaan linier *mixed integer* membutuhkan waktu yang panjang, maka diharapkan penelitian selanjutnya dapat menggunakan metode lain dalam menyelesaikan masalah perencanaan linier *mixed integer* untuk mengefisienkan waktu dalam menentukan penyelesaian optimal.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. 1987. Elementary Linear Algebra. Fifth Edition. Anton Textbooks Inc. New York.

Aprilia, S. 2005. Aplikasi algoritma Branch and Bound untuk menyelesaikan Integer Programming. Lab Ilmu dan Rekayasa Komputasi , Departemen Teknik Informatika ITB.

Bronson, R. 1996. Teori dan Soal-soal Operations Research. Erlangga. Jakarta

Dimyati,T.T., dan Dimyati,A.1994. Operation Research Model-model Pengambilan Keputusan. Sinar Baru Algensindo, Bandung.

Friedberg,S.H., and Insel A. 1986. Introduction to Linear Algebra with Applications. Prentice-Hall, New Jersey.

Leon, S.J. 1998. Aljabar Linier dan Aplikasinya. Edisi kelima. Penerbit Erlangga, Jakarta.

Noble, B. 1988. Applied Linear Algebra. Third Edition. Prentice-Hall, New Jersey.

Pedregal, P. 2004. Introduction to Optimamization. Springer-Verlag New York . Inc, New York.

Purcell, E.J. 1993. Kalkulus dan Geometri Analitis. Edisi Keempat. Erlangga, Jakarta.

Rao, S.S. 1995. Optimization Theory and Applications. New Age International (P) . Publishers, New Delhi.

Simarmata.A.1985. Operations Research Sebuah Pengantar Teknik-teknik Optimasi kuantatif dan Sistim-sistim Operasional. Gramedia, Jakarta.

Strang, G. 1976. Linear Algebra and Its Aplication. The Publisher, USA.

Supranto, J. 2006. Riset Operasi Untuk Pengambilan Keputusan. Edisi Revisi. Universitas Indonesia, Jakarta.

Taha, H.A. 2005. Riset Operasi Suatu Pengantar. Edisi Kelima. Binarupa Aksara, Jakarta.