BILANGAN RAINBOW CONNECTION UNTUK GRAF KOMPLEMEN

TESIS

RENI WIJAYA
1121222003

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2013

Bilangan *Rainbow Connection* untuk Graf Komplemen

Oleh: Reni Wijaya

(Di bawah bimbingan Dr. Syafrizal Sy dan Dr. Lyra Yulianti)

RINGKASAN

Suatu u-v *path*, dinotasikan dengan ${}_uP_v$ di G dikatakan *rainbow path* jika tidak terdapat dua sisi di P yang memiliki warna sama. Suatu pewarnaan sisi di G dikatakan *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda dihubungkan oleh *rainbow path*. Bilangan *rainbow connection* dari graf terhubung G, ditulis $rc(G)$, didefinisikan sebagai banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk membuat G bersifat *rainbow connected*. Bilangan *rainbow connection* telah banyak dikaji oleh beberapa ahli matematika. Pada tulisan ini yang akan dibahas adalah bilangan *rainbow connection* pada graf komplemen. Komplemen dari suatu graf G ditulis $\overline{G}$ yaitu suatu graf dimana jika $uv \in E(G)$ maka $uv \notin E(\overline{G})$ untuk setiap $u, v \in V(G)$.

Pada tulisan ini yang dibahas adalah bilangan *rainbow connection* untuk beberapa graf dengan $diam(\overline{G})$ dua atau tiga, diantaranya graf lingkaran C_n, graf lintasan P_n, dan graf buku B_n. Selain itu, juga diperoleh bilangan *rainbow connection* pada graf dengan $diam(G) \geq 4$ yaitu pada graf *gear* G_n, graf buku B_n, dan graf $C_4 - path$.

Pada graf *gear* G_n dengan $n \geq 4$ dan graf buku B_n dengan $n \geq 3$ memiliki bilangan *rainbow connection*=4. Sedangkan untuk graf $C_4 - path$ dengan C_4 sebanyak k, mempunyai bilangan *rainbow connection*=$2k$. Bilangan *rainbow connection* untuk graf komplemen dengan $diam(\overline{G})$=2, untuk graf lingkaran C_n dengan $n \geq 6$, atau graf lintasan P_n dengan $n \geq 5$ adalah dua. Sedangkan untuk

graf dengan $diam(\overline{G})$=3 pada graf lintasan P_4, atau graf buku B_2 mempunyai bilangan *rainbow connection* adalah tiga.

بسم الله الرحمن الرحيم

Bacalah dengan (menyebut) nama Tuhanmu Yang menciptakan.

Dan kami jadikan malam dan siang sebagai dua tanda, lalu kami hapuskan tanda malam dan kami jadikan tanda siang itu terang, agar kamu mencari kurnia dari Tuhanmu, dan supaya kamu mengetahui bilangan tahun - tahun dan perhitungan. Dan segala sesuatu telah kami terangkan dengan jelas.

(QS Al-Israa [17]: 12).

Al-jaddu bi jiddi wal hirmanu bil kasali fanshab tushib'an qariibin ghayatal-'amali.(Kesuksesan akan didapatkan dengan kesungguhan dan kegagalan terjadi akibat kemalasan. Bersungguh - sungguhlah maka kamu akan mendapatkan dengan segera apa yang kamu cita - citakan.)

(Solahuddin As-Supadi).

Orang yang sukses dalam pandangan Allah adalah orang yang beranggapan bahwa kelapangan yang diterimanya adalah amanah dan sekaligus ujian baginya.

Barang siapa menghendaki kehidupan dunia maka dengan ilmu, dan barang siapa yang menghendaki kehidupan akhirat maka dengan ilmu, dan barang siapa yang menghendaki keduanya (kehidupan dunia dan akhirat) maka dengan ilmu.

Barang siapa yang menempuh suatu jalan untuk menuntut ilmu maka Allah akan memudahkan baginya jalan menuju surga.(HR. Muslim)

Ku persembahkan tulisan ini khusus untuk Papa dan Mama tercinta.

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Dengan ini saya menyatakan bahwa tesis yang saya tulis dengan judul: "**Bilangan *Rainbow Connection* untuk Graf Komplemen**" adalah hasil kerja/karya saya sendiri dan bukan merupakan jiplakan dari hasil kerja/karya orang lain, kecuali kutipan yang sumbernya dicantumkan. Jika di kemudian hari pernyataan ini tidak benar, maka status kelulusan dan gelar yang saya peroleh menjadi batal dengan sendirinya.

RIWAYAT HIDUP

Penulis merupakan anak kedua dari dua bersaudara dari Jafri Yanto, SH dan Sumiarti Muis, Ama. Pd. Penulis bernama Reni Wijaya, dilahirkan di Kota Pariaman pada tanggal 2 Agustus 1987. Penulis mengikuti pendidikan di TK ABA pada tahun 1992-1993, SDN 02 Kajai Pariaman pada tahun 1993-1999, SLTP N 5 Pariaman pada tahun 1999-2002, SMU N 2 Pariaman pada tahun 2002-2005 dan Jurusan Matematika Universitas Negeri Padang tahun 2005-2010. Pada tahun 2011, penulis diterima sebagai mahasiswa Pascasarjana Program Studi Matematika Universitas Andalas. Selama menjadi mahasiswa penulis aktif dalam berbagai organisasi, antara lain di Himpunan Mahasiswa Matematika (Himatika) UNP dan organisasi di luar kampus.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, rasa syukur pada Allah SWT yang telah memberikan kesehatan dan kesempatan pada penulis untuk menuliskan sedikit ilmu-Nya. Salawat dan salam disampaikan kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah membawa cahaya kebenaran di muka bumi ini. Puji dan syukur penulis haturkan kepada Allah SWT karena dengan nikmat-Nya penulis dapat menyelesaikan tesis dengan judul **Bilangan *Rainbow Connection* untuk Graf Komplemen** yang merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Matematika (M.Si) di Pascasarjana Universitas Andalas Padang.

Dalam menyelesaikan tesis ini, penulis banyak menerima bantuan moril maupun materil dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

(1) Mama tercinta Sumiarti Muis, Ama.Pd yang cinta dan kasih sayangnya masih terus penulis rasakan sampai sekarang. Papa tercinta Jafri Yanto,SH yang tidak henti-hentinya mendo'akan, memberikan dukungan sepenuh cinta dan kasih sayang. Kakak tercinta Sartika Wijaya, S. PdI yang selalu memberi semangat dan doa.

(2) Bapak Dr. Syafrizal Sy sebagai ketua komisi pembimbing dan Ibu Dr. Lyra Yulianti sebagai anggota komisi pembimbing yang telah membimbing dan memberi saran serta masukan kepada penulis dalam menyelesaikan tesis ini.

(3) Bapak Dr. Admi Nazra, Ibu Dr. Yanita, Bapak Dr. Muhafzan, dan Bapak Mahdhivan Syafwan selaku penguji yang telah memberi saran dan masukan

kepada penulis dalam penyempurnaan tesis ini.

(4) Bapak Dr. Admi Nazra sebagai Ketua Jurusan Matematika Pascasarjana Universitas Andalas Padang.

(5) Bapak dan Ibu dosen beserta staf Pascasarjana Universitas Andalas Padang, terima kasih atas ilmu yang telah diberikan kepada penulis selama ini.

(6) Novrianti, Noverina Alfiany, Nur Ade Yani, Susti Rahma selaku teman senasib seperjuangan.

(7) Uni Dewi Estetikasari yang sangat tulus dan ikhlas membantu penulis dalam menyelesaikan perjuangan ini.

(8) Sahabat-sahabat yang selalu memberi semangat.

(9) Semua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan tesis ini.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa tesis ini jauh dari kesempurnaan, oleh karena itu penulis mengharapkan saran dan kritik yang bersifat membangun untuk kesempurnaan isi tesis ini. Akhirnya penulis berharap semoga tesis ini berguna bagi kita semua. Amin ya Robbal'alamin.

Padang, Agustus 2013

Reni Wijaya

ABSTRAK

Suatu *u-v path*, dinotasikan dengan ${}_uP_v$ di G, dikatakan *rainbow path* jika tidak terdapat dua sisi di P yang memiliki warna sama. Suatu pewarnaan sisi di G dikatakan *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda dihubungkan oleh *rainbow path*. Bilangan *rainbow connection* dari graf terhubung G, ditulis $rc(G)$, didefinisikan sebagai banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk membuat G bersifat *rainbow connected*. Pada tulisan ini dibahas tentang bilangan *rainbow connection* untuk graf komplemen dengan $diam(\overline{G}) := 2, 3$ dan $diam(G) \geq 4$. Pada graf dengan $diam(G) \geq 4$, yaitu untuk graf *gear* G_n dengan $n \geq 4$, dan graf buku B_n dengan $n \geq 3$, memiliki bilangan *rainbow connectionnya* adalah 4. Sedangkan untuk graf $C_4 - path$ dengan C_4 sebanyak k, bilangan *rainbow connectionnya* adalah $2k$. Bilangan *rainbow connection* untuk graf komplemen dengan $diam(\overline{G})$=2, graf lingkaran C_n dengan $n \geq 6$, dan graf lintasan P_n dengan $n \geq 5$, adalah dua. Sedangkan untuk graf dengan $diam(\overline{G})$=3 pada graf lintasan P_4, dan graf buku B_2, bilangan *rainbow connectionnya* adalah tiga.
Kata Kunci : rainbow connection, gear, buku, lingkaran, lintasan.

DAFTAR ISI

PERSETUJUAN PEMBIMBING v

KATA PENGANTAR ix

ABSTRAK xi

DAFTAR ISI xii

DAFTAR GAMBAR xiv

DAFTAR LAMBANG xvi

I PENDAHULUAN 1

1.1 Latar Belakang Masalah 1

1.2 Perumusan Masalah 3

1.3 Pembatasan Masalah 3

1.4 Tujuan Penelitian 3

1.5 Manfaat Penelitian 4

II LANDASAN TEORI 5

2.1 Definisi dan terminologi dalam graf 5

2.2 Definisi *rainbow connection* pada graf 14

2.3 Teori pendukung *rainbow connection* 17

III BILANGAN ***RAINBOW CONNECTION*** UNTUK GRAF KOM-

PLEMEN **18**

3.1 Bilangan *rainbow connection* dengan memperhatikan *diam(G)* dan *diam*($\overline{G}$) 18

3.2 Bilangan *rainbow connection* dengan G tidak memuat segitiga *(triangle free)* 23

3.3 Bilangan *rainbow connection* pada beberapa graf G dan graf $\overline{G}$ . . 23

IV KESIMPULAN DAN SARAN **32**

4.1 Kesimpulan 32

4.2 Saran 33

DAFTAR PUSTAKA **34**

DAFTAR GAMBAR

II.1 Jarak titik u ke v ditulis $d(u, v) = 1$. 6

II.2 Graf G. 7

II.3 (a) Graf sederhana, (b) dan (c) Graf tidak sederhana. 7

II.4 Graf lengkap K_n, untuk $1 \leq n \leq 4$. 8

II.5 (a) Graf terhubung, (b) Graf tidak terhubung. 8

II.6 (a) Graf G, (b) Graf komplemen $G(\overline{G})$, (c) K_5. 9

II.7 Graf 3-reguler 9

II.8 Graf lingkaran C_n dengan $3 \leq n \leq 6$. 9

II.9 Contoh graf T_5. 10

II.10 Graf lintasan. 10

II.11 Graf lingkaran $C_4 - path$. 10

II.12 (a) Graf $G_{3,4}$, (b) Graf $K_{3,4}$. 11

II.13 Graf bintang $K_{1,n}$. 12

II.14 (a) Graf B_4, (b) Graf B_8. 12

II.15 Graf W_6. 12

II.16 Graf roda gigi. 13

II.17 (a) G, (b) Salah satu subgraf dari G, (c) Subgraf pembangun dari G, (d) Subgraf terinduksi dari G. 13

II.18 (a) Semua sisi berwarna sama (b) Tidak semua sisi berwarna sama. 15

II.19 Graf $K_{3,4}$. 16

III.1 Graf dengan $diam(G) = 4$. 19

III.2 Ilustrasi kasus 1. 20

III.3 Ilustrasi subkasus 2.1. 21

III.4 Ilustrasi subkasus 2.2. 22

III.5 Graf G_6. 24

III.6 Graf B_4. 26

III.7 Graf lingkaran $C_4 - path$. 27

III.8 (a) Graf C_8, (b) Graf $\overline{C}_8$. 28

III.9 Graf $\overline{C}_8$. 28

III.10 (a) Graf P_{10}, (b) Graf $\overline{P}_{10}$. 29

III.11 Graf $\overline{P}_{10}$. 29

III.12 (a) Graf P_4, (b) Graf $\overline{P}_4$. 30

III.13 Graf $\overline{P}_4$. 30

III.14 (a) Graf B_2, (b) Graf $\overline{B}_2$. 31

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Arti	Pemakaian pertama kali pada halaman
c	*Pewarnaan sisi pada graf G*	2
$rc(G)$	*Bilangan rainbow connection pada G*	2
u *dan* v	*Titik*	2
$\overline{G}$	*Komplemen G*	2
e	*Sisi*	5
$V(G)$	*Himpunan titik pada G*	5
$E(G)$	*Himpunan sisi pada G*	5
$\|V(G)\|$	*Order dari G*	5
$\|E(G)\|$	*Ukuran dari G*	5
δ_G	*Derajat minimum graf G*	5
$\Delta(G)$	*Derajat maksimum graf G*	5
$diam(G)$	*Diameter graf G*	6
$d(u,v)$	*Jarak dari titik u ke titik v*	6
$ecc(v)$	*Eksentrisitas titik dalam graf G*	7
$N_G^i(x)$	*Himpunan titik – titik yang berjarak i ke titik x*	18
$\diamondsuit$	*Hasil baru*	23

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Perkembangan teori graf saat ini tidak hanya secara teoritis, tetapi juga secara aplikatif seperti dalam ilmu jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, musik, dan ilmu-ilmu lainnya. Salah satu topik yang dipelajari dalam teori graf adalah *rainbow connection.*

Konsep *rainbow connection* pada graf pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk, pada tahun 2006 [4]. Misalkan G adalah graf terhubung tak trivial, didefinisikan pewarnaan sisi $c : E(G) \to \{1, 2, ..., k\}, k \in \mathbb{N}$, dimana sisi yang bertetangga boleh memiliki warna yang sama. Suatu *path* adalah jalan yang semua titik berbeda. Suatu *(u-v) path P* di G dikatakan *rainbow path* jika tidak ada dua sisi di P yang memiliki warna sama. Suatu pewarnaan sisi di G dikatakan *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda dihubungkan oleh *rainbow path.* Suatu pewarnaan sisi di mana G adalah *rainbow connected* dikatakan *rainbow coloring.* Bilangan *rainbow connection* dari graf terhubung G, ditulis $rc(G)$, didefinisikan sebagai minimum dari banyaknya warna yang diperlukan untuk membuat G menjadi *rainbow connected.* Suatu *rainbow coloring* yang menggunakan $rc(G)$ warna dikatakan sebagai *minimum rainbow coloring* [4].

Graf sederhana adalah graf yang tidak memuat *loop* maupun sisi ganda. Komplemen G dilambangkan dengan $\overline{G}$, adalah graf sederhana yang himpunan titiknya sama dengan himpunan titik G dan dua titik u dan v di $\overline{G}$ bertetangga jika dan hanya jika di G titik u dan v tersebut tidak bertetangga. Suatu graf dikatakan *triangle free* apabila dua titik yang bertetangga tidak mempunyai tetangga yang sama. Jarak didefinisikan sebagai panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v di G dan dinotasikan dengan $d(u, v)$. Diameter dari suatu graf G adalah maksimum jarak dari setiap dua titik di G. Subgraf terhubung maksimal dari graf G disebut komponen dari G. Banyaknya komponen di G dinotasikan dengan $c(G)$ [6].

Konsep *rainbow connection* dapat digunakan untuk pengamanan pengiriman informasi rahasia antar pemerintah dan agen. Dalam hal ini, pemerintah dan agen tidak diizinkan untuk saling mencek informasi karena berhubungan dengan keamanan nasional, sehingga informasi kepada agen satu dan lainnya harus menggunakan sandi. Dengan demikian, akan terdapat satu atau lebih lintasan informasi untuk setiap dua agen dan harus dipastikan tidak ada sandi yang berulang. Kata sandi setiap lintasan harus berbeda, sehingga harus ditentukan jumlah sandi yang dibutuhkan, agar terdapat satu lintasan yang aman antara dua agen. Situasi inilah yang dimodelkan dalam bilangan *rainbow connection*. Pada penelitian ini akan dibahas tentang bilangan *rainbow connection* dari suatu graf G dengan memperhatikan sifat-sifat tertentu dari komplemen graf tersebut.

1.2 Perumusan Masalah

Pada tesis ini akan dikaji tentang bagaimana menentukan bilangan *rainbow connection* dari suatu graf G dengan memperhatikan sifat-sifat tertentu dari graf lain yang merupakan komplemen dari graf G.

1.3 Pembatasan Masalah

Dalam penentuan bilangan *rainbow connection* dari suatu graf G, permasalahan dibatasi untuk:

1. $Diam(\overline{G})$ tidak sama dengan dua atau tiga, serta $\overline{G}$ tidak memuat dua komponen terhubung dan satu di antaranya trivial.
2. Graf G atau $\overline{G}$ merupakan graf yang tidak memuat segitiga atau *triangle free*.
3. $Diam(\overline{G})$ sama dengan dua atau tiga.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mencari dan menentukan bilangan *rainbow connection* dari suatu graf terhubung G dengan melihat sifat-sifat tertentu dari komplemen graf G tersebut.

1.5 Manfaat Penelitian

Kajian ini merupakan salah satu permasalahan dalam topik *rainbow connection.* Penulis berharap kajian ini dapat memberikan manfaat, khususnya bagi yang ingin menekuni topik tersebut.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dikemukakan definisi dan konsep dasar yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam kajian. Bab ini terdiri dari dua bagian yaitu bagian pertama mengenai definisi dan terminologi dalam graf, kemudian bagian kedua mengenai konsep *rainbow connection* pada graf.

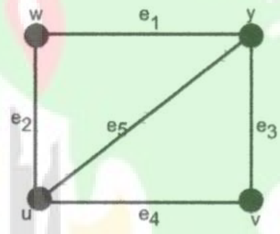
2.1 Definisi dan terminologi dalam graf

Pada bagian ini diberikan beberapa definisi dan terminologi dalam graf. Suatu **graf** G didefinisikan sebagai pasangan terurut himpunan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong yang berhingga dengan elemen-elemennya dinamakan **titik** (*vertex*) dan $E(G)$ adalah himpunan **sisi** (*edge*) yang menghubungkan sepasang titik [6].

Jika sisi $e = (uv) \in E(G)$ dengan $u, v \in V(G)$, maka titik u dikatakan **bertetangga** (*adjacent*) dengan v di G. Kemudian, sisi e dikatakan **terkait** (*incident*) dengan titik u dan v. **Orde** (*order*) dari G adalah banyaknya titik di G, dinotasikan dengan $|V(G)|$, dan **ukuran** (*size*) dari G adalah banyaknya sisi di G, dinotasikan dengan $|E(G)|$. **Derajat** (*degree*) suatu titik v di G adalah banyaknya sisi yang terkait dengan v, dan dinotasikan dengan $d_G(v) = |N_G(v)|$. **Derajat minimum** graf G dinyatakan dengan δ_G=min $\{d_G(v)\}$ dan **derajat**

maksimum graf G dinyatakan dengan $\Delta(G)$=maks $\{d_G(v)\}$ [6].

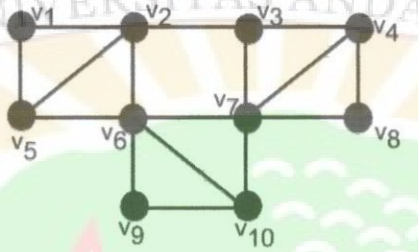
Jalan (*walk*) dari titik awal v_0 ke titik tujuan v_n di graf G adalah barisan hingga dari titik-titik dan sisi-sisi di G yaitu $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_i = (v_{i-1}v_i) \in E(G)$ untuk i= 1, 2..., n. **Lintasan** (*path*) adalah jalan yang semua titiknya berbeda. **Panjang** (*length*) dari lintasan adalah banyaknya sisi yang termuat dalam lintasan tersebut. Panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v didefinisikan sebagai **jarak** (*distance*) yang dinotasikan dengan $d(u, v)$ [6]. Perhatikan graf pada Gambar II.1.



Gambar II.1. Jarak titik u ke v ditulis $d(u, v) = 1$.

Misalkan Q_1, Q_2, Q_3 adalah lintasan yang menghubungkan titik u ke y. Misalkan lintasan $Q_1 : u, e_5, y$, lintasan $Q_2 : u, e_4, v, e_3, y$, dan lintasan $Q_3 : u, e_2, w, e_1, y$. Karena panjang lintasan Q_1, Q_2, dan Q_3 berturut-turut adalah 1, 2, dan 2, maka Q_1 merupakan lintasan terpendek yang menghubungkan u ke y, sehingga jarak $d(u, y) = 1$. **Diameter** dari graf G, dinotasikan dengan *diam(G)*, didefinisikan sebagai $diam(G)= \max_{u,v \in V(G)} d(u, v)$. Misalkan G adalah suatu graf pada Gambar II.1. Berdasarkan definisi jarak, maka $d(u, v) = 1, d(u, y) = 1, d(u, w) = 1, d(v, y) = 1, d(v, w) = 2, d(y, w) = 1$, karena jarak maksimum sebarang dua titik di G adalah dua, maka $diam(G) = 2$.

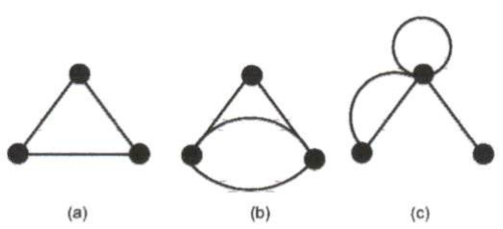
Eksentrisitas titik (*vertex eccentricity*) v dalam graf adalah jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari titik v ke setiap titik di G, dinotasikan dengan $ecc(v)$, dan dapat ditulis $ecc(v)$=max$\{d(u,v)|v \in V(G)\}$ [1]. Perhatikan Gambar II.2.



Gambar II.2. Graf G.

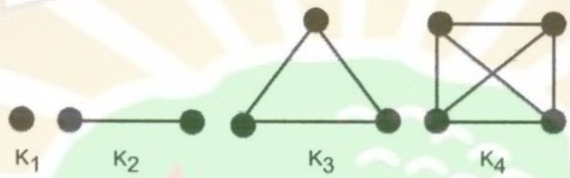
Berdasarkan Gambar II.2 diperoleh $ecc(v_6) = 2, ecc(v_2) = ecc(v_3) = ecc(v_4) = ecc(v_5) = ecc(v_7) = ecc(v_9) = ecc(v_{10}) = 3, ecc(v_1) = ecc(v_8) = 4$, dan $diam(G)$=4.

Suatu sisi graf yang menghubungkan sebuah titik dengan dirinya sendiri disebut *loop*. Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik u dan v pada suatu graf, maka sisi-sisi tersebut disebut **sisi-ganda** *(multiple-edges)*. **Graf sederhana** (*simple graph*) adalah graf yang tidak memuat *loop* maupun sisi ganda [6]. Pada tesis ini, yang dikaji hanya graf sederhana. Contoh graf sederhana dan graf tidak sederhana diperlihatkan pada Gambar II.3



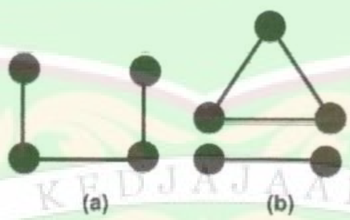
Gambar II.3. (a) Graf sederhana, (b) dan (c) Graf tidak sederhana.

Graf lengkap (*complete graph*) adalah graf sederhana yang setiap titiknya bertetangga ke semua titik lainnya. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n. Jadi, setiap titik pada K_n berderajat $n-1$. Banyaknya sisi pada graf lengkap n titik adalah $n(n-1)/2$. Contoh graf lengkap diperlihatkan pada Gambar II.4.



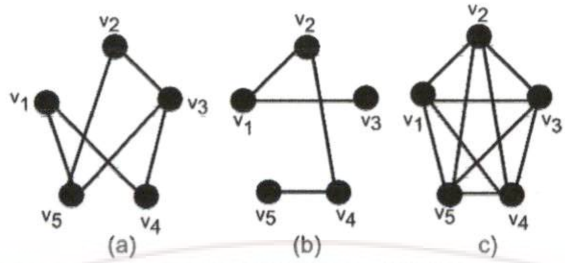
Gambar II.4. Graf lengkap K_n, untuk $1 \leq n \leq 4$.

Suatu graf G disebut **graf terhubung** (*connected graph*) jika terdapat lintasan yang menghubungkan setiap pasangan titik di graf G. Jika graf G tersebut tidak demikian, maka graf G dikatakan **graf tidak terhubung** [6]. Contoh graf terhubung dan tidak terhubung diperlihatkan pada Gambar II.5.



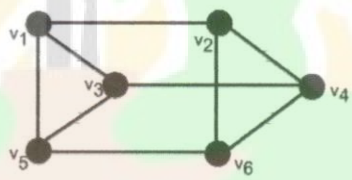
Gambar II.5. (a) Graf terhubung, (b) Graf tidak terhubung.

Komplemen dari suatu graf G, ditulis $\overline{G}$, yaitu suatu graf dimana jika $uv \in E(G)$ maka $uv \notin E(G)$ untuk setiap $u, v \in V(G)$[6]. Contoh graf $G, \overline{G}$, dan K_5 dapat dilihat pada Gambar II.6.

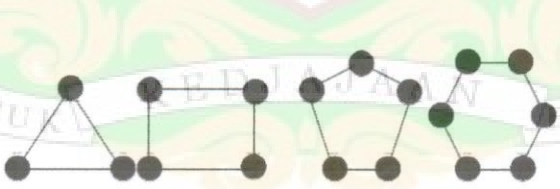


Gambar II.6. (a) Graf G, (b) Graf komplemen $G(\overline{G})$, (c) K_5.

Graf reguler adalah graf yang semua titiknya berderajat sama. Graf reguler dengan jumlah n titik dan derajat setiap titiknya adalah r, dinotasikan dengan r-reguler. Contoh graf 3-reguler dapat dilihat pada Gambar II.7. Graf **lingkaran** *(cycle)* adalah graf terhubung 2-reguler. Graf lingkaran dengan n titik dinotasikan dengan C_n [7]. Contoh graf C_n diperlihatkan pada Gambar II.7.



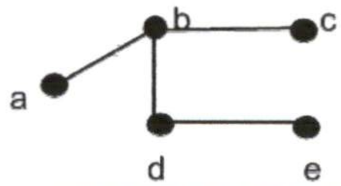
Gambar II.7. Graf 3-reguler



Gambar II.8. Graf lingkaran C_n dengan $3 \leq n \leq 6$.

Pohon (*tree*) adalah suatu graf terhubung yang tidak memuat lingkaran. Suatu titik pada graf terhubung dikatakan **titik pendan** *(pendant vertex)* jika titik tersebut berderajat satu. Pada graf pohon, titik yang berderajat satu disebut

daun (*leaf*) [6]. Contoh graf pohon diperlihatkan pada Gambar II.9.



Gambar II.9. Contoh graf T_5.

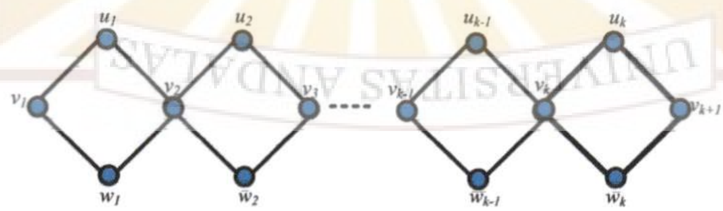
Graf lintasan (*path*) dengan n titik dinotasikan dengan P_n, yaitu graf yang terdiri dari lintasan tunggal. P_n memiliki $n-1$ sisi. Contoh graf lintasan diperlihatkan pada Gambar II.10.

Gambar II.10. Graf lintasan.

Misal k bilangan bulat positif, $k \geq 2$. Suatu graf G dengan

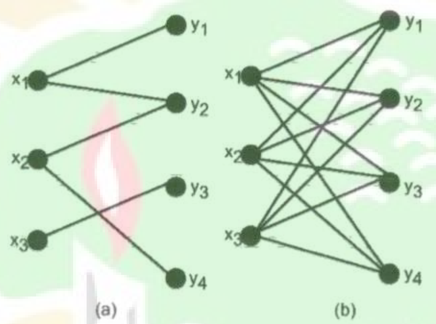
$V(G) = \{w_i | 1 \leq i \leq k\} \cup \{u_i | 1 \leq i \leq k\} \cup \{v_j | 1 \leq j \leq k+1\}$,

$E(G) = \{v_i w_i | 1 \leq i \leq k\} \cup \{v_i u_i | 1 \leq i \leq k\} \cup \{u_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq k\} \cup \{w_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq k\}$, adalah $C_4 - path$, didefinisikan v_1 dan v_{k+1} sebagai titik terakhir pada $C_4 - path$. Perhatikan Gambar II.11.



Gambar II.11. Graf lingkaran $C_4 - path$.

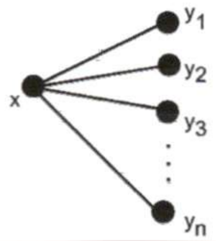
Suatu graf G dikatakan **graf bipartit** jika $V(G)$ dapat dipartisi menjadi dua buah sub-himpunan tak kosong X dan Y sedemikian sehingga untuk setiap sisi di G berlaku salah satu ujungnya berada di X dan ujung lainnya berada di Y. Misalkan banyaknya titik di X adalah m dan banyaknya titik di Y adalah n, dimana $m, n \geq 1$, maka graf G dinotasikan dengan $G_{m,n}$. Jika setiap titik di X bertetangga dengan setiap titik Y, maka G disebut **graf bipartit lengkap**, dinotasikan dengan $K_{m,n}$ [6]. Contoh graf $G_{m,n}$ dan $K_{m,n}$ diperlihatkan pada Gambar II.12.



Gambar II.12. (a) Graf $G_{3,4}$, (b) Graf $K_{3,4}$.

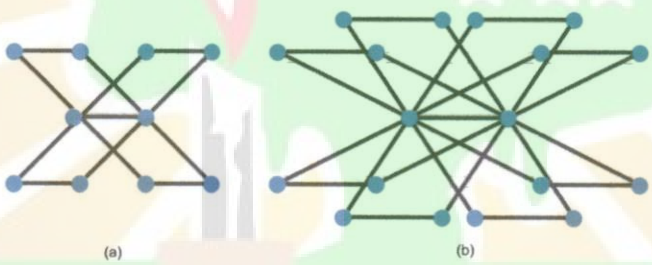
Suatu graf disebut **graf multipartit** (*multipartite graph*) yang dinotasikan dengan $B_{n_1,n_2,\cdots,n_k}$, jika himpunan titik pada graf tersebut dapat dikelompokkan ke dalam sub-sub himpunan tak kosong yang disebut **himpunan partit**. Graf multipartit dengan k himpunan partit disebut **k-partit**. **Graf multipartit** $B_{n_1,n_2,\cdots,n_k}$ disebut **graf multipartit lengkap** jika setiap titik disetiap partisi bertetangga dengan semua titik di partisi-partisi lainnya. Graf multipartit lengkap dinotasikan dengan $K_{n_1,n_2,\cdots,n_k}$.

Graf bintang adalah graf bipartit dengan $|X| = 1$ dan $|Y| = n$ yang dinotasikan dengan $K_{1,n}$ [7]. Graf bintang dapat dilihat pada Gambar II.13.



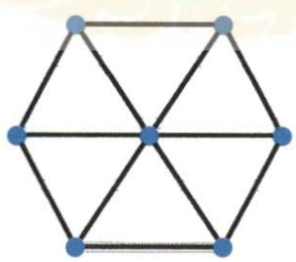
Gambar II.13. Graf bintang $K_{1,n}$.

Graf buku (*book graph*) adalah graf cartesian $S_{m+1} \times P_2$, dimana S_m adalah sebuah graf bintang dan P_2 adalah graf lintasan pada dua titik. Graf buku dinotasikan dengan B_n. Graf buku dapat dilihat pada Gambar II.14.



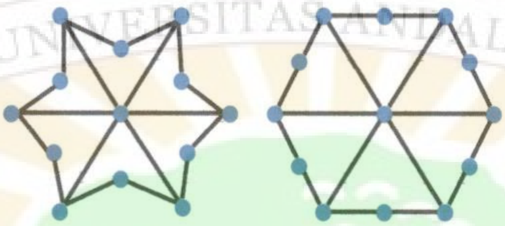
Gambar II.14. (a) Graf B_4, (b) Graf B_8.

Graf roda (*wheel*) adalah graf lingkaran yang setiap titiknya dihubungkan dengan titik di tengah lingkaran, dinotasikan dengan W_n. Graf roda dapat dilihat pada Gambar II.15.



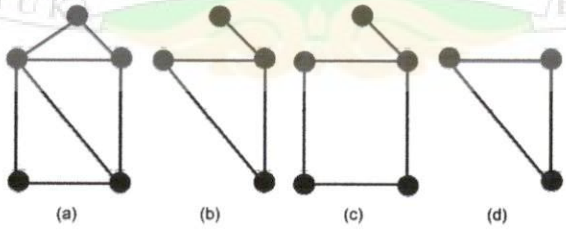
Gambar II.15. Graf W_6.

Graf roda gigi (*gear*) dengan $n \geq 3$ titik ditulis G_n, adalah suatu graf roda dengan menambahkan sebuah titik pada graf untuk setiap dua titik yang bertetangga di luar lingkaran. Jadi, graf *gear* G_n terdiri atas $2n+1$ titik dan $3n$ sisi. Contoh graf *Gear* diperlihatkan pada Gambar II.16.



Gambar II.16. Graf roda gigi.

Suatu graf H disebut **subgraf** (*subgraph*) dari graf G, ditulis $H \subseteq G$, jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika $H \subseteq G$ dan $V(H) = V(G)$, maka H disebut **subgraf pembangun** (*spanning subgraph*) dari G. Misalkan $V^* \subseteq V(G)$, **subgraf dari G yang diinduksi oleh V^*** (*induced subgraph*) dilambangkan dengan $G[V^*]$, adalah sebuah subgraf dari G yang himpunan titiknya adalah V^* dan himpunan sisi pada $G[V^*]$ adalah setiap dua titik yang bertetangga di G maka merupakan sisi pada $G[V^*]$ [6]. Perhatikan Gambar II.17.



Gambar II.17. (a) G, (b) Salah satu subgraf dari G, (c) Subgraf pembangun dari G, (d) Subgraf terinduksi dari G.

Subgraf terhubung maksimal dari graf G disebut **komponen** (*component*) dari G. Graf H dikatakan subgraf terhubung maksimal dari G jika tidak ada subgraf lain dari G yang terhubung dan memuat H. Graf terhubung memiliki satu komponen. Graf tidak terhubung memiliki paling sedikit dua komponen. Banyaknya komponen di G dinotasikan dengan $c(G)$. Jika $c(G \setminus e) = c(G) + 1$, untuk suatu sisi $e \in E(G)$, maka sisi e tersebut dinamakan *cut-edge*. Dengan kata lain, suatu *cut-edge* dari suatu graf terhubung G adalah suatu sisi yang apabila dihapus mengakibatkan graf tersebut tidak terhubung [6]. Suatu graf G dikatakan graf *triangle-free* apabila dua titik yang bertetangga di G tidak mempunyai tetangga yang sama [7].

2.2 Definisi *rainbow connection* pada graf

Pewarnaan sisi (*edge coloring*) dari sebuah graf G adalah penetapan warna pada sisi dari suatu graf. **Pewarnaan sisi sejati** adalah sebuah pewarnaan sisi dengan tambahan syarat bahwa dua sisi yang berdekatan tidak menerima warna yang sama[5].

Selanjutnya, akan diberikan beberapa definisi tentang *rainbow connection* pada graf dengan merujuk ke [4].

Suatu graf dikatakan **graf trivial** jika graf tersebut hanya terdiri dari satu titik. Jika graf tersebut memuat lebih dari satu titik disebut **graf tak trivial**. Misalkan G adalah graf terhubung tak trivial. Pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$, dimana sisi yang bertetangga boleh memiliki warna yang sama. Perhatikan Gambar II.18.

Gambar II.18. (a) Semua sisi berwarna sama (b) Tidak semua sisi berwarna sama.

Suatu *u-v path*, dinotasikan dengan ${}_uP_v$, di G dikatakan *rainbow path* jika tidak terdapat dua sisi di P yang memiliki warna sama. Suatu pewarnaan sisi di G dikatakan *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda dihubungkan oleh *rainbow path*.

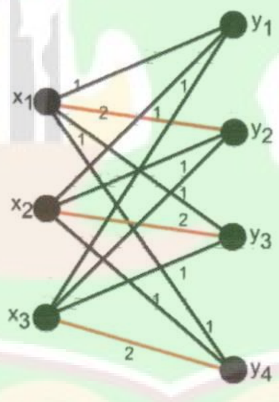
Suatu pewarnaan sisi dimana G bersifat *rainbow connected* dikatakan *rainbow coloring*. Jika G adalah *rainbow connected* maka G terhubung (*connected*). Sebaliknya, setiap graf terhubung memiliki pewarnaan sisi trivial sehingga G bersifat *rainbow connected*, yaitu setiap sisi diwarnai dengan warna berbeda. **Bilangan *rainbow connection*** dari graf terhubung G, ditulis $rc(G)$, didefinisikan sebagai banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk membuat G bersifat *rainbow connected*. Suatu *rainbow coloring* yang menggunakan sebanyak $rc(G)$ warna dikatakan *minimum rainbow coloring*.

Misalkan c merupakan suatu pewarnaan *rainbow* dari graf terhubung G, untuk dua titik $u - v$ di G, *rainbow u-v geodesic* pada G adalah *rainbow u-v path* yang panjang lintasan $u - v$ merupakan jarak terpendek dari titik u ke titik v. Graf G merupakan *strongly rainbow-connected* jika G memiliki suatu *rainbow u-v geodesic* untuk setiap dua titik u dan v di G. Dalam kasus ini, pewarnaan c dikatakan *strong rainbow coloring* di G. *Minimum* k yang terdapat pada pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ sedemikian sehingga G adalah *strongly rainbow-connected* dikatakan *strong rainbow connection number* $src(G)$ di G. Suatu *strong rainbow-connected* di G yang menggunakan $src(G)$ warna dikatakan *minimum strong rainbow coloring* di G.

Selanjutnya, jika G adalah graf terhubung tak trivial dengan ukuran m dan $diam(G) = max\{d(u, v)|u, v \in V(G)\}$ maka

$$diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m. \tag{2.1}$$

Untuk lebih memahami definisi di atas, berikut diberikan contoh *rainbow coloring* pada graf bipartit lengkap $K_{3,4}$. Perhatikan gambar II.19. Karena



Gambar II.19. Graf $K_{3,4}$.

$diam(K_{3,4})$=2, maka terdapat *rainbow path* pada $K_{3,4}$, maka banyaknya warna yang diberikan haruslah ≥ 2. Selanjutnya, karena minimum warna yang diberikan pada Graf $K_{3,4}$ agar *rainbow path* adalah dua sehingga $rc(K_{3,4}) = 2$.

2.3 Teori pendukung *rainbow connection*

Berikut adalah beberapa teorema dan proposisi yang akan digunakan dalam pembahasan selanjutnya.

Pada graf bipartit lengkap $K_{s,t}(2 \leq s \leq t)$ dan graf k-partisi lengkap $(k \geq 3)$ mempunyai bilangan *rainbow connection* seperti Teorema 2.1.

Teorema 2.1. *[4] Untuk bilangan bulat* s *dan* t *dengan* $2 \leq s \leq t, rc(K_{s,t}) = min$ $(\lceil \sqrt[s]{t} \rceil, 4)$.

Teorema 2.2. *[4] Misalkan* $G \cong K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ *merupakan graf k-partit lengkap, dimana* $k \geq 3$ *dan* $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_k$ *sehingga* $s = \sum_{i=1}^{k-1} n_i$ *dan* $t = n_k$. *Maka*

$$rc(G) = \begin{cases} 1, & jika\ n_k = 1; \\ 2, & jika\ n_k \geq 2\ dan\ s > t; \\ min(\lceil \sqrt[s]{t} \rceil, 3), & jika\ s \leq t. \end{cases}$$

Proposisi 2.3. *[4] Misalkan* G *adalah graf terhubung tak-trivial dengan ukuran* m*, maka*

(a) $rc(G) = src(G) = 1$ *jika dan hanya jika* G *adalah graf lengkap,*

(b) $rc(G) = 2$ *jika dan hanya jika* $src(G) = 2$,

(c) $rc(G) = m$ *jika dan hanya jika* G *adalah graf pohon.*

Proposisi 2.4. *[4] Misalkan* C_n *adalah graf lingkaran dengan banyak titik* n*, dimana* $n \geq 4$*, maka* $rc(C_n) = src(C_n) = \lceil n/2 \rceil$.

BAB III

BILANGAN *RAINBOW CONNECTION* UNTUK GRAF KOMPLEMEN

Pada bab ini akan disajikan bilangan *rainbow connection* dari suatu graf G dengan memperhatikan sifat-sifat tertentu dari graf komplemen G.

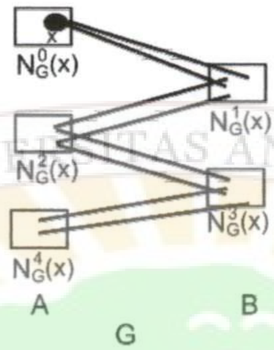
3.1 Bilangan *rainbow connection* dengan memperhatikan $diam(G)$ dan $diam(\overline{G})$

Bilangan *rainbow connection* pada suatu graf telah banyak dikaji oleh ilmuwan matematika sejak tahun 2006 sampai sekarang. Khusus untuk komplemen suatu graf, bilangan *rainbow connection* telah banyak ditemukan. Berikut ini, akan disajikan bilangan *rainbow connection* dari graf $\overline{G}$ dengan memperhatikan $diam(G)$.

Teorema 3.1. *[6] Misal G sebuah graf terhubung dengan $diam(G) \geq 4$, jika $\overline{G}$ terhubung, maka $rc(\overline{G}) \leq 4$.*

Bukti. Pilih sebuah titik x di G dengan $ecc(x) = diam(G) = d \geq 4$. Misal $N_G^i(x) = \{v : d(x, v) = i\}$ dimana $0 \leq i \leq d$. Maka $N_G^0(x) = \{x\}, N_G^1(x) = N_G(x)$. Maka $\bigcup_{0 \leq i \leq d} N_G^i(x)$ adalah sebuah partisi titik dari V(G) dengan $|N_G^i(x)| = n_i$.

Misal $A = \bigcup_{i\ genap} N_G^i(x)$, $B = \bigcup_{i\ ganjil} N_G^i(x)$. Untuk contoh, perhatikan Gambar III.1, yaitu ilustrasi suatu graf dengan $diam(G) = 4$.

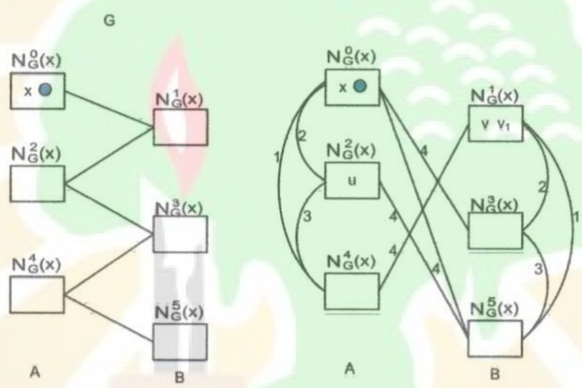


Gambar III.1. Graf dengan $diam(G) = 4$.

Jika $d = 2k(k \geq 2)$ maka $A = \bigcup_{0 \leq i \leq d\ genap} N_G^i(x)$, $B = \bigcup_{1 \leq i \leq d-1\ ganjil} N_G^i(x)$; jika $d = 2k+1(k \geq 2)$ maka $A = \bigcup_{0 \leq i \leq d-1\ genap} N_G^i(x)$, $B = \bigcup_{1 \leq i \leq d\ ganjil} N_G^i(x)$. Dari definisi pada graf komplemen, $\overline{G}[A](\overline{G}[B])$ memuat suatu subgraf pembangun partisi k_1 lengkap (subgraf partisi k_2 lengkap) dimana $k_1 = \lceil \frac{d+1}{2} \rceil (k_2 = \lceil \frac{d}{2} \rceil)$. Untuk contoh perhatikan Gambar III.1, $\overline{G}[A]$ memuat suatu subgraf pembangun tripartisi lengkap K_{n_0,n_2,n_4}, $\overline{G}[B]$ memuat suatu subgraf pembangun bipartisi lengkap K_{n_1,n_3}.

Kasus 1. Misalkan $d \geq 5$. Maka $k_1, k_2 \geq 3$. Dari Teorema 2.2, diperoleh $rc(\overline{G}[A])$, $rc(\overline{G}[B]) \leq 3$. Diberikan pewarnaan sisi pada $\overline{G}$ sebagai berikut: pertama diberikan subgraf $\overline{G}[A]$ sebuah pewarnaan sisi rainbow menggunakan 3-pewarnaan, kemudian berikan subgraf $\overline{G}[B]$ pewarnaan sisi rainbow menggunakan warna yang sama seperti pada subgraf $\overline{G}[A]$, selanjutnya kita memberikan suatu warna yang baru untuk semua sisi di antara subgraf $\overline{G}[A]$ dan $\overline{G}[B]$.

Akan ditunjukkan bahwa pewarnaan ini adalah rainbow, yaitu dengan menunjukkan bahwa untuk setiap $u \in \overline{G}[A], v \in \overline{G}[B]$, terdapat suatu lintasan rainbow pada $\overline{G}$. Pertama, pilih sisi uv_1, dimana $v_1 \in \overline{G}[B]$ (tanpa mengurangi perumuman, kita asumsikan $u \in N_G^2(x)$ dan u bertetangga untuk semua titik di $N_G^5(x)$), maka dengan penambahan lintasan rainbow $v_1 - v$ pada $\overline{G}[B]$, diperoleh lintasan yang diinginkan. Dengan demikian, $rc(\overline{G}) \leq 4$. Pada Gambar III.2 diberikan ilustrasi untuk Kasus 1.



Gambar III.2. Ilustrasi kasus 1.

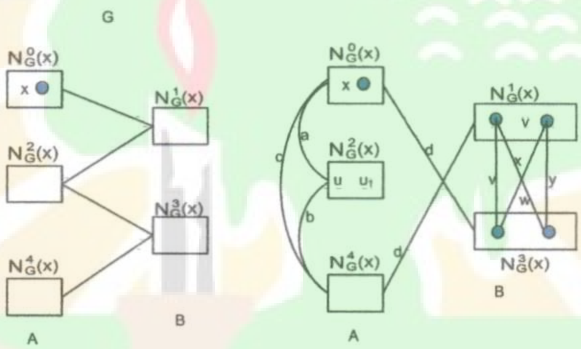
Kasus 2. $d = 4$, diperoleh $A = N_G^0(x) \cup N_G^2(x) \cup N_G^4(x)$, $B = N_G^1(x) \cup N_G^3(x)$. Maka $\overline{G}[A](\overline{G}[B])$ memuat suatu subgraf pembangun 3-partisi lengkap K_{n_0,n_2,n_4} (subgraf bipartisi lengkap) K_{n_1,n_3}. Jadi, dari Teorema 2.2 diperoleh $rc(\overline{G}[A]) \leq 3$.

Subkasus 2.1. $n_1, n_3 \geq 2$. Karena $\overline{G}[B]$ memuat suatu subgraf pembangun bipartisi lengkap K_{n_1,n_3}, dari Teorema 2.1 kita punya $rc(\overline{G}[B]) \leq 4$.

Diberikan pewarnaan sisi pada $\overline{G}$: pertama, diberikan subgraf suatu pewarnaan sisi rainbow menggunakan empat warna terhadap $\overline{G}[B]$, katakan v, w, x, y; selanjutnya, diberikan suatu pewarnaan sisi rainbow pada $\overline{G}[A]$ menggunakan warna a, b, c; selanjutnya kita berikan warna d untuk semua sisi di antara subgraf $\overline{G}[A]$

dan $\overline{G}[B]$.

Akan ditunjukkan bahwa pewarnaan ini adalah rainbow, yaitu dengan menunjukkan bahwa untuk setiap $u \in \overline{G}[A]$, $v \in \overline{G}[B]$, terdapat suatu lintasan *rainbow* yang menghubungkan u dan v di $\overline{G}$. Pertama, pilih sisi vu_1 dimana $u_1 \in \overline{G}[A]$ (tanpa mengurangi perumuman, asumsikan $v \in N^1_G(x)$, maka v bertetangga dengan semua titik di $N^4_G(x)$). Maka dengan penambahan lintasan rainbow $u_1 - u$ di $\overline{G}[B]$, diperoleh lintasan yang diinginkan, sehingga $rc(\overline{G}) \leq 4$. Pada Gambar III.3 diberikan ilustrasi subkasus 2.1.



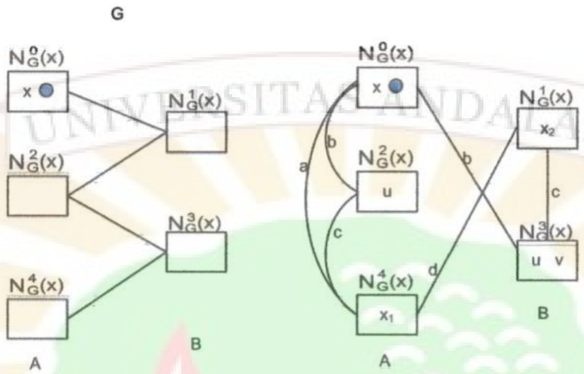
Gambar III.3. Ilustrasi subkasus 2.1.

Subkasus 2.2. Sekurang-kurangnya salah satu dari n_1, n_3 adalah 1, katakan $n_1 = 1$. Diberikan pewarnaan sisi pada $\overline{G}$: berikan warna a untuk sisi diantara $N^0_G(x)$ dan $N^4_G(x)$; berikan warna b untuk sisi diantara $N^0_G(x)$ dan $N^2_G(x)$; berikan warna c untuk sisi antara $N^2_G(x)$ dan $N^4_G(x)$; berikan warna d untuk sisi diantara $N^1_G(x)$ dan $N^4_G(x)$; berikan warna b untuk sisi diantara $N^0_G(x)$ dan $N^3_G(x)$; berikan warna c untuk sisi diantara $N^1_G(x)$ dan $N^3_G(x)$.

Akan ditunjukkan bahwa pewarnaan tersebut adalah rainbow, yaitu dengan menunjukkan bahwa terdapat suatu lintasan rainbow yang menghubungkan dua titik

$u, v \in N_G^3(x)$. Misalkan $P := u, x, x_1, x_2, v$ dimana $x_1 \in N_G^4(x), x_2 \in N_G^1(x)$. Jelas lintasan adalah *rainbow*, sehingga $rc(\overline{G}) \leq 4$. ■

Pada Gambar III.4 diberikan ilustrasi Subkasus 2.2.



Gambar III.4. Ilustrasi subkasus 2.2.

Bilangan *rainbow connection* untuk beberapa graf G diperoleh Xueliang Li, dan Yuefang Sun (2010) dengan melihat $diam(\overline{G})$ [7] di antaranya:

1. Untuk suatu graf terhubung G, jika $\overline{G}$ tidak memenuhi syarat berikut, (i) $diam(\overline{G}) = 2, 3$, (ii) $\overline{G}$ memuat dua komponen terhubung dan satu diantaranya trivial, maka $rc(G) \leq 4$.

2. Untuk suatu graf G terhubung, jika $\overline{G}$ terhubung dan $diam(\overline{G}) \geq 4$, maka $rc(G) \leq 4$.

3. Jika terdapat suatu titik x di G dengan $e(x) = diam(G) = 3$, diperoleh $rc(G) \leq 5$ untuk 3 kasus:(i) $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, (ii) $n_1, n_2 = 1, n_3 \geq 2$, (iii) $n_2 = 1, n_1, n_3 \geq 2$.

4. Untuk suatu graf G, jika $\overline{G}$ adalah *triangle-free* dan $diam(\overline{G}) = 3$, maka $rc(G) \leq 5$.

3.2 Bilangan *rainbow connection* dengan G tidak memuat segitiga *(triangle free)*

Selain memperhatikan $diam(\overline{G})$ pada graf komplemen, bilangan *rainbow connection* pada graf G juga diperoleh dengan mengasumsikan bahwa G tidak memuat segitiga (*triangle free*) yang ditemukan oleh Xueliang Li, dan Yuefang Sun [7] diantaranya,

- Jika G adalah *triangle-free* dan memuat dua komponen terhubung satu diantaranya adalah trivial, maka $rc(\overline{G}) \leq 6$.
- Misalkan G adalah graf *triangle-free* dengan $diam(G) = 2$. Jika $\overline{G}$ terhubung, maka $rc(\overline{G}) \leq 5$.

3.3 Bilangan *rainbow connection* pada beberapa graf G dan graf $\overline{G}$

Pada tesis ini, juga diperoleh hasil baru untuk bilangan $rc(G)$ untuk $G \cong G_n, B_n,$ dan $G \cong C_4 - path$ dengan $diam(G) \geq 4$, seperti yang diberikan pada Teorema 3.2 di bawah ini.

Teorema 3.2. $\diamondsuit$ *Misalkan G adalah suatu graf terhubung, bilangan rainbow connection dari graf G adalah*

$$rc(G)=\begin{cases} 4, & \textit{untuk } G \cong G_n \textit{ dengan } n \geq 4, \textit{ atau } G \cong B_n \textit{ dengan } n \geq 3; \\ 2k, & \textit{untuk } G \cong C_4 - path \textit{ dengan panjang } k. \end{cases}$$

Bukti. Perhatikan 2 kasus berikut.

Kasus 1. Untuk $G \cong G_n$ dengan $n \geq 4$, atau $G \cong B_n$ dengan $n \geq 3$.

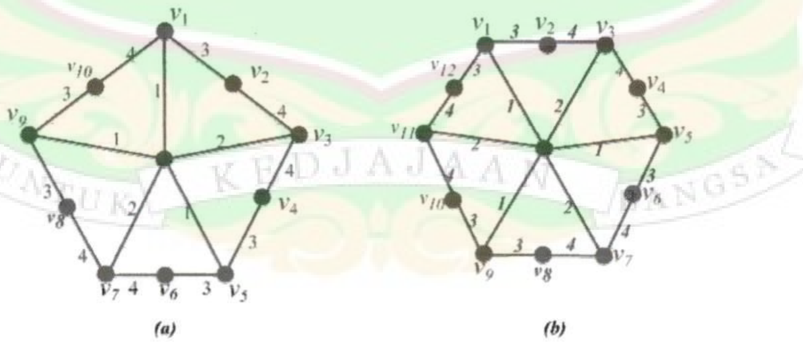
Kasus 1.1. Untuk G_n dengan $n \geq 4$.

Pertama, akan ditunjukkan bahwa $rc(G) \leq 4$. Diketahui graf $V(G_n) = V(C_{2n}) \cup \{v\}$ maka $V(G_n)$ terdiri dari $V(C_{2n}) = \{v_1, v_2, ..., v_n, v\}$. Definisikan pewarnaan pada G_n yaitu *rainbow 4-coloring* c: $E(G_n) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ sebagai berikut:

$$c(e)= \begin{cases} 1, & \text{jika } e = vv_{4i-3} \text{ dengan } i = 1, 2, \cdots, \lceil n/2 \rceil; \\ 2, & \text{jika } e = vv_{4i-1} \text{ dengan } i = 1, 2, \cdots, \lfloor n/2 \rfloor; \\ 3, & \text{jika } e = v_{4i-3}v_{4i-2} \text{ dan } e = v_{4i}v_{4i+1} \text{ dengan } i = 1, 2, \cdots, \lceil n/2 \rceil; \\ 4, & \text{jika } e = v_{4i-2}v_{4i-1} \text{ dan } e = v_{4i-1}v_{4i} \text{ dengan } i = 1, 2, \cdots, \lceil n/2 \rceil. \end{cases}$$

Dari definisi pewarnaan pada G_n tersebut, diperoleh $rc(G_n) \leq 4$ untuk $n \geq 4$. Karena $diam(G_n) = 4$, maka $rc(G_n) \geq 4$. Jadi, $rc(G_n) = 4$.

Contoh graf G_6 diperlihatkan pada Gambar III.5.



Gambar III.5. Graf G_6.

Kasus 1.2. Untuk $G \cong B_n$ dengan $n \geq 3$.

Graf B_n terdiri dari dua graf bintang S_n, dan S_m dengan titik-titiknya adalah p_i dan q_i, untuk $i = 1, 2, \cdots, n+1$, dimana untuk setiap p_i bertetangga dengan titik q_i. Masing-masing titik p dan q merupakan titik pusat S_n dan S_m. Didefinisikan pewarnaan $c : E(B_n) \to \{1, 2, 3, 4\}$ yaitu,

$$c(e)=\begin{cases} 1, & \text{untuk } pq; \\ 2, & \text{untuk } pp_i, \text{ dengan } i = 1, 2, \cdots, n+1; \\ 3, & \text{untuk } qq_i, \text{ dengan } i = 1, 2, \cdots, n+1; \\ 4, & \text{untuk } p_iq_i, \text{ dengan } i = 1, 2, \cdots, n+1. \end{cases}$$

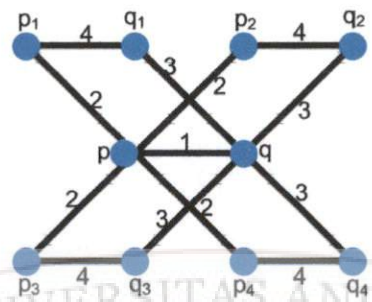
Berdasarkan definisi pewarnaan pada graf B_n tersebut, maka terdapat *rainbow 4-coloring* pada B_n. Sehingga $rc(B_n) \leq 4$ untuk $n \geq 3$.

Selanjutnya, akan dibuktikan $rc(B_n) \geq 4$ untuk $n \geq 3$. Karena $diam(B_n) = 3$, maka $rc(B_n) \geq 3$. Misalkan didefinisikan pewarnaan $c' : E(B_n) = \{1, 2, 3\}$, yaitu

$$c(e)=\begin{cases} 1, & \text{untuk } pq \text{ dan } p_iq_i, \text{ dengan } i = 1, 2, \cdots, n+1; \\ 2, & \text{untuk } pp_i, \text{ dengan } i = 1, 2, \cdots, n+1; \\ 3, & \text{untuk } qq_i, \text{ dengan } i = 1, 2, \cdots, n+1. \end{cases}$$

Perhatikan p_ip_{i+1}, bukan *rainbow path*, jadi haruslah $rc(B_n) > 3$, sehingga $rc(B_n) \geq 4$. Oleh karena itu $rc(B_n) \geq 4$. Jadi, $rc(B_n) = 4$.

Contoh graf B_4 diperlihatkan pada Gambar III.6.



Gambar III.6. Graf B_4.

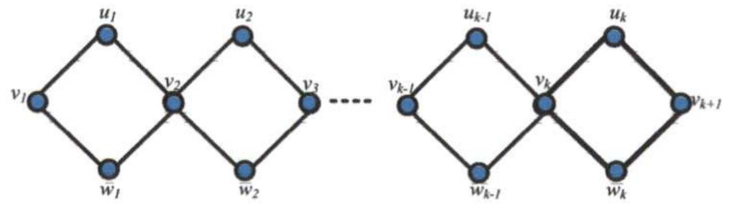
Kasus 2. Untuk $G \cong C_4 - Path$ dengan panjang k.

Graf C_4-path dikonstruksi dari graf C_4 sebanyak k, dengan $V(C_4) = v_i v_{i+1} w_i u_i v_i$. Pandang satu duplikat dari graf C_4, maka definisikan pewarnaan pada C_4 dengan $c : E(C_4) \to \{1, 2\}$, yaitu

$$c(e) = \begin{cases} 1, & \text{jika } e = v_i u_i, w_i v_{i+1} \text{ dengan } i = 1, 2, ...k; \\ 2, & \text{jika } e = v_i w_i, u_i v_{i+1} \text{ dengan } i = 1, 2, ...k. \end{cases}$$

Dari definisi pewarnaan pada C_4, diperoleh $rc(C_4) \leq 2$, karena graf $C_4 - path$ dikonstruksi dari graf C_4 sebanyak k, sehingga $rc(C_4 - path) \leq 2k$. Selanjutnya akan ditunjukkan $rc(C_4 - path) \geq 2k$. Didefinisikan pewarnaan c' pada sisi-sisi C_4-path sebanyak $2k-1$. Hal ini mengakibatkan ada salah satu sisi pada duplikat C_4 yang diwarnai dengan satu warna saja, maka $v_i u_i v_{i+1}$ bukan *rainbow path*, yang mengakibatkan $C_4 - path$ bukan *rainbow connected*. Sehingga, haruslah $rc(C_4 - path) \geq 2k$. Selain itu, karena $diam(C_4 - path) = d(v_1, v_{k+1}) = diam(C_4) \times k = 2k$, maka $rc(C_4-path) \geq 2k$ yaitu, diberikan dua pewarnaan untuk setiap duplikat dari C_4. Jadi, haruslah $rc(C_4 - path) = 2k$.

Contoh graf $C_4 - path$ diberikan oleh Gambar III.7.



Gambar III.7. Graf lingkaran $C_4 - path$.

Selain bilangan *rainbow connection* pada graf G juga diperoleh $rc(\overline{G})$ untuk $G \cong C_n, P_n$. Seperti yang diberikan Teorema 3.3 di bawah ini.

Teorema 3.3. $\diamondsuit$ *Misalkan G adalah suatu graf terhubung, bilangan rainbow connection dari graf $\overline{G}$ adalah*

$$rc(\overline{G}) = \begin{cases} 2, & \textit{untuk } G \cong C_n \textit{ dengan } n \geq 6, \textit{ atau } G \cong P_n \textit{ dengan } n \geq 5; \\ 3, & \textit{untuk } G \cong P_4, \textit{ atau } G \cong B_2. \end{cases}$$

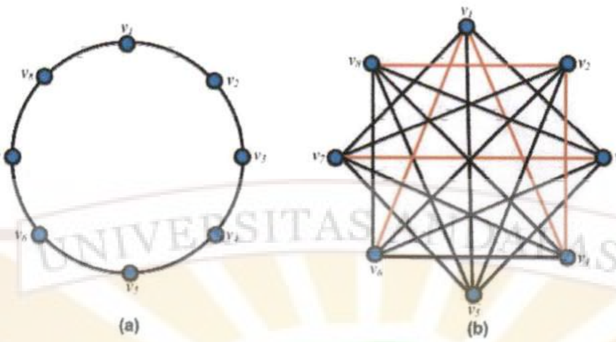
Bukti. Perhatikan dua kasus berikut.

Kasus 1. Untuk untuk $G \cong C_n$ dengan $n \geq 6$, atau $G \cong P_n$ dengan $n \geq 5$.

Kasus 1.1. Untuk $G \cong C_n$ dengan $n \geq 6$.

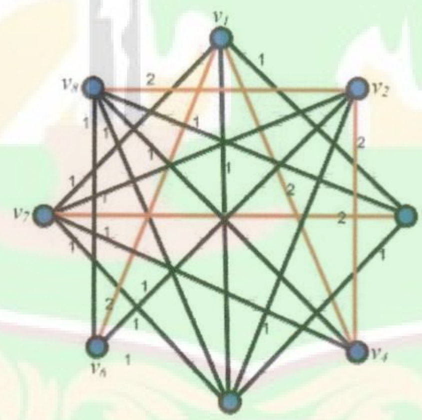
Untuk setiap C_n dengan $n \geq 6$, jelas bahwa $diam(\overline{C}_n) = 2$. Sehingga, dengan (2.1) diperoleh $rc(\overline{C}_n) \geq 2$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $rc(\overline{C}_n) \leq 2$. Karena C_n adalah graf 2-reguler, maka $\overline{C}_n$ adalah graf tidak lengkap. Akibatnya, terdapat dua titik, sebut titik u dan titik v, yang tidak bertetangga. Selanjutnya, karena $d(x) \geq n-2$ untuk setiap $x \in V(\overline{C}_n)$ dengan $n \geq 6$, maka $d(x) \geq 3$. Jadi, terdapat satu titik w di $V(\overline{C}_n)$ yang bertetangga dengan u dan juga dengan titik v. Akibatnya, terdapat *rainbow path* uPv dengan $\mid uPv \mid= 2$, sehingga $rc(\overline{C}_n) \leq 2$. Jadi, $rc(C_n) = 2$.

Contoh graf C_8 dan $\overline{C}_8$ diberikan oleh Gambar III.8.



Gambar III.8. (a) Graf C_8, (b) Graf $\overline{C}_8$.

Agar terdapat *rainbow path* pada graf $\overline{G}$ maka minimum dari warna yang diberikan pada *rainbow path* adalah dua, sehingga $rc(\overline{G}) = 2$.

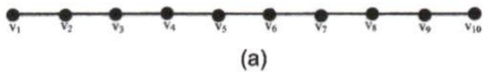


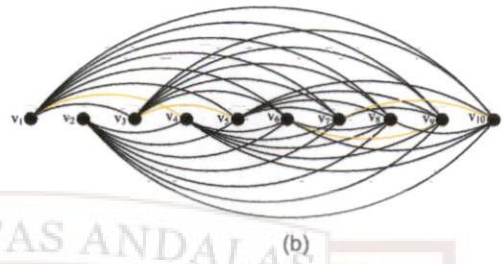
Gambar III.9. Graf $\overline{C}_8$.

Kasus 1.2. Untuk $G \cong P_n$ dengan $n \geq 5$.

Untuk setiap P_n dengan $n \geq 4$, $diam(\overline{P}_n) = 2$, maka *rainbow connection* dari $(\overline{P}_n) \geq 2$. Karena $P_n \subseteq C_n$ maka $rc(\overline{P}_n) \leq 2$ dengan titik $n \geq 5$. Jadi, $rc(\overline{P}_n) = 2$.

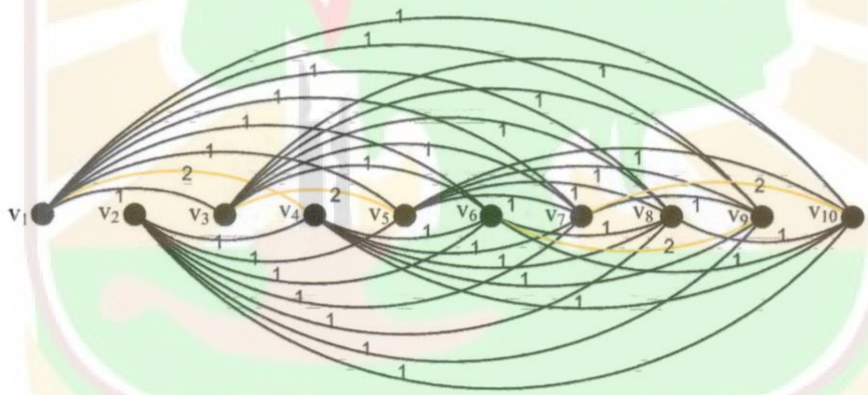
Contoh graf P_{10} dan $\overline{P}_{10}$ diberikan oleh Gambar III.10.





Gambar III.10. (a) Graf P_{10}, (b) Graf $\overline{P}_{10}$.

Agar terdapat *rainbow path* pada graf $\overline{G}$ maka minimum dari warna yang diberikan pada *rainbow path* adalah dua, sehingga $rc(\overline{G}) = 2$.



Gambar III.11. Graf $\overline{P}_{10}$.

Perhatikan dua kasus berikut.

Kasus 2. Untuk $G \cong P_4$, atau $G \cong B_2$.

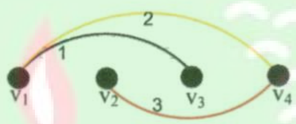
Kasus 2.1. Untuk $G \cong P_4$.

Untuk $n = 4$, pilih $P := u_1, u_2, u_3, u_4$. Komplemen dari lintasan P adalah $\overline{P} := u_2, u_4, u_1, u_3$. Maka $\overline{P}$ adalah sebuah *tree*. Dengan demikian, berdasarkan Proposisi 2.4 (c), diperoleh $rc(\overline{P}) = 3$.

Contoh graf P_4 dan $\overline{P}_4$ diberikan oleh Gambar III.12.

Gambar III.12. (a) Graf P_4, (b) Graf $\overline{P}_4$.

Agar terdapat *rainbow path* pada graf $\overline{G}$ maka minimum dari warna yang diberikan pada *rainbow path* adalah dua, sehingga $rc(\overline{G}) = 3$.



Gambar III.13. Graf $\overline{P}_4$.

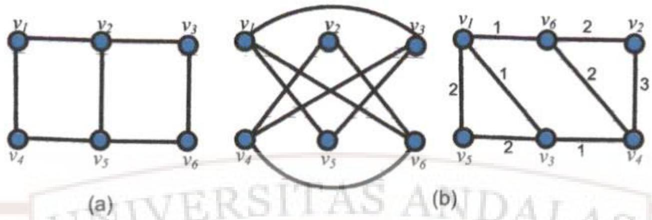
Kasus 2.2. Untuk $G \cong B_2$.

Misalkan $n = 2k$ dengan $k = 3$. Pertama akan ditunjukkan $rc(\overline{G}) \leq 3$. Definisikan pewarnaan

$$c(e): \begin{cases} 1, & \text{jika } e = v_1v_6, v_1v_3, \text{ dan } v_3v_4\ ; \\ 2, & \text{jika } e = v_2v_6, v_4v_6, v_1v_5, v_3v_5; \\ 3, & \text{jika } e = v_2v_4. \end{cases}$$

Dari definisi pewarnaan pada $\overline{B}_2$ tersebut, diperoleh $rc(\overline{B}_2) \leq 3$ untuk $n = 3$. Perhatikan bahwa $diam(\overline{B}_2) = 3$, sehingga $rc(\overline{B}_2) \geq 3$. Oleh karena itu $rc(\overline{B}_2) \geq 3$. Jadi, $rc(\overline{B}_2) = 3$.

Contoh graf B_2 dan $\overline{B}_2$



Gambar III.14. (a) Graf B_2, (b) Graf $\overline{B}_2$.

Berikut diberikan konjektur terkait bilangan *rainbow connection* pada graf $C_n - path$ dan $K_4 - path$.

Konjektur 3.1. $\diamondsuit$ *Bilangan rainbow connection untuk graf* $C_n - path$ *dan* $K_4 - path$ *adalah*

$$rc(G) = \begin{cases} \lceil n/2 \rceil \cdot k, & \textit{untuk } G \cong C_n - P_k; \\ k, & \textit{untuk } G \cong K_4 - P_k. \end{cases}$$

Pada Konjektur 3.2, diberikan bilangan *rainbow connection* untuk graf $\overline{G}$ yaitu $G \cong B_n$ dengan $n \geq 3$, $G \cong G_n$ dengan $n \geq 3$, atau $G \cong C_4$-path.

Konjektur 3.2. $\diamondsuit$ *Misalkan G adalah suatu graf terhubung, bilangan rainbow connection dari $\overline{G}$ adalah*

$rc(\overline{G})= 2$, untuk $G \cong B_n$ dengan $n \geq 3$, atau $G \cong G_n$ dengan $n \geq 3$, atau $G \cong C_4$-path.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Pada tulisan ini telah dikaji kembali tentang bilangan *rainbow connection* untuk suatu graf G, dengan melihat sifat-sifat dari graf komplemennya, $\overline{G}$. Misal terdapat suatu graf terhubung G, jika $\overline{G}$ tidak memenuhi dua kasus berikut: (i) $diam(\overline{G}) = 2, 3$, (ii) $\overline{G}$ memuat 2 komponen terhubung dan satu diantaranya trivial, maka $rc(G) \leq 4$. Selanjutnya, jika $\overline{G}$ adalah *triangle free*, maka $rc(G) \leq 6$.

Pada tulisan ini diperoleh beberapa bilangan $rc(G)$ untuk graf *gear* G_n, graf buku B_n, serta graf $C_4 - path$ dengan panjang k sebagai berikut:

$$rc(G)=\begin{cases} 4, & \text{untuk } G \cong G_n \text{ dengan } n \geq 4, \text{ atau } G \cong B_n \text{ dengan } n \geq 3; \\ 2k, & \text{untuk } G \cong C_4 - path \text{ dengan panjang } k. \end{cases}$$

Selain itu, juga diperoleh $rc(\overline{G})$ untuk graf lingkaran C_n, graf *Path* P_n sebagai berikut:

$$rc(\overline{G})=\begin{cases} 2, & \text{untuk } G \cong C_n \text{ dengan } n \geq 6, \text{ atau } G \cong P_n \text{ dengan } n \geq 5; \\ 3, & \text{untuk } G \cong P_4, \text{ atau } G \cong B_2. \end{cases}$$

4.2 Saran

Bagi peneliti yang berminat pada bilangan *rainbow connection* pada graf, dapat melanjutkan untuk mencari bilangan *rainbow connection* graf lain dan bilangan *rainbow connection* untuk graf komplemen lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] J.A. Bondy, dan Murty, U.S.R. 2008. *Graph Theory,* Graduated Texts In Mathematics. Springer. New York.

[2] Y. Caro, A. Lev, Y. Roditty, Z. Tuza, R. Yuster. 2008. *On rainbow connection,* Electronic J. Combin, **15**, R57.

[3] L.S. Chandran, A. Das, D.Rajendraprasad, N.M. Varma. 2010. *Rainbow connection number and connected dominating sets,* ArXIv: 1010.2296v1 [math.CO].

[4] G. Chartrand, G.L. Johns, K.A. McKeon, P. Zhang. 2008. *Rainbow connection in graphs,* Math. Bohem. **133**: 85-98.

[5] Chartrand. dkk. 2005. *Introduction to Graph Theory,* McGraw-Hill. Boston.

[6] Diestel, Reinhard. 2005. *Graph Theory,* Electronic Edition 3. New York.

[7] X. Li dan Y. Sun. 2010. *Rainbow connection numbers of complementary graphs* Arxiv preprint arXiv:1011.4572v3 [math.CO].