



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar Unand.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Unand.

PELABELAN GRACEFUL UNTUK GRAF RANTAI DAN GRAF CORONA C_n © mK1

SKRIPSI



FITRIA PRIMADINI
06 134 025

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS PADANG
2011

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah, Tuhan Pencipta alam semesta yang telah memberikan rahmat, hidayah, dan kekuatan-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **“PELABELAN *GRACEFUL* UNTUK GRAF RANTAI DAN GRAF *CORONA* $C_n \odot mK_1$ ”** ini, sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S. Si) di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Andalas.

Terima kasih yang sedalam-dalamnya penulis ucapkan kepada semua pihak yang telah membantu penulisan skripsi ini, terutama kepada:

1. Bapak **Dr. Syafrizal Sy** selaku pembimbing yang dengan sabar telah meluangkan banyak waktu untuk memberikan bimbingan, petunjuk, masukan, dan motivasi selama penyusunan skripsi ini.
2. Ibu **Ir. Hazmira Yozza, M. Si** dan Ibu **Des Welyyanti, M. Si** selaku penguji yang telah memberikan kritik dan saran pada seminar skripsi dan ujian sarjana.
3. Ibu **Izzati Rahmi HG, M. Si** selaku penasehat akademis yang telah memberikan nasehat dan motivasi akademis.
4. Seluruh staf pengajar Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Andalas yang memberikan bekal ilmu yang sangat bermanfaat, serta seluruh staf tata usaha Jurusan Matematika yang telah banyak membantu selama penulis melaksanakan studi di Jurusan Matematika Universitas Andalas.

5. Ayahanda **Editawarman, ST** dan **Ibunda Syafni** serta adik-adik penulis; **Fauzan Saputra, Rizky Oktaviandra**, dan **Reren Fadhilla**, yang senantiasa memberikan dukungan dan semangat selama ini.
6. Teman-teman mahasiswa di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Andalas, khususnya angkatan 2006, yang telah banyak menyumbangkan tenaga, inspirasi, dan motivasi selama penulis mengikuti studi.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat-Nya kepada mereka sebagai balasan atas semua kebaikan yang telah diberikan.

Penulis menyadari bahwa tulisan ini masih mempunyai banyak kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran sangat diharapkan demi penyempurnaannya. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat dalam perkembangan ilmu matematika, khususnya di Universitas Andalas.

Padang, Februari 2011

Penulis

ABSTRAK

Dalam skripsi ini, akan dikaji pelabelan *graceful* dari beberapa graf yang dihasilkan dari dua konstruksi yang berbeda. Konstruksi pertama adalah graf rantai. Graf rantai akan menjadi graf *graceful* jika setiap *block* pada rantai mempunyai pelabelan *graceful*. Konstruksi kedua adalah graf corona $C_n \odot mK_1$. Pada kedua konstruksi ini, akan ditunjukkan bahwa keduanya mempunyai pelabelan *graceful*. Graf yang mempunyai pelabelan *graceful* dinamakan graf *graceful*.

Kata kunci: *graceful*, graf rantai, *block*, graf corona $C_n \odot mK_1$



DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
ABSTRAK	iii
DAFTAR ISI	iv
DAFTAR GAMBAR	vi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Pembatasan Masalah	2
1.4 Tujuan	2
1.5 Sistematika Penulisan	2
BAB II LANDASAN TEORI	4
2.1 Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf	4
2.2 Beberapa Graf Sederhana Khusus	6
2.3 Pelabelan <i>Graceful</i>	7
2.4 Graf Rantai	8
2.5 Graf <i>Corona</i>	10
BAB III PEMBAHASAN	12
3.1 Pelabelan <i>Graceful</i> untuk Graf Rantai	12

3.2 Pelabelan Graceful untuk Graf <i>Corona</i>	19
BAB IV PENUTUP	61
4.1 Kesimpulan	61
4.2 Saran	61
DAFTAR PUSTAKA	62



DAFTAR GAMBAR

No.	Halaman
2.1.1 Graf G_1	5
2.1.2 Graf terhubung dan graf tak terhubung	5
2.2.1 Graf lengkap	6
2.2.2 Graf lingkaran	6
2.2.3 Graf bipartit	7
2.3.1 Contoh pelabelan <i>graceful</i>	8
2.4.1 Graf G dan E_1	8
2.4.2 Graf G	9
2.4.3 Graf G dan <i>block</i> dari graf G	9
2.4.4 Contoh graf rantai	10
2.5.1 Graf <i>corona</i> $C_5 \odot 2K_1$	11
2.5.2 Graf <i>corona</i> $C_4 \odot P_3$	11
3.1.1 Contoh pelabelan <i>graceful</i> untuk graf rantai	13
3.1.2 <i>Block</i> 1 ($B_1 = X_1 \cup Y_1$)	14
3.1.3 <i>Block</i> 2 ($B_2 = X_2 \cup Y_2$)	14
3.1.4 <i>Block</i> 3 ($B_3 = X_3 \cup Y_3$)	15
3.1.5 <i>Block</i> 4 ($B_4 = X_4 \cup Y_4$)	15
3.1.6 <i>Block</i> 5 ($B_5 = X_5 \cup Y_5$)	16
3.1.7 Pelabelan <i>graceful</i> pada graf rantai	19
3.2.1 Contoh pelabelan <i>graceful</i> pada graf $C_8 \odot 2K_1$	20

3.2.2	Pemberian label pada graf $C_4 \odot 3K_1$	21
3.2.3	Pelabelan <i>graceful</i> pada graf $C_4 \odot 3K_1$	26
3.2.4	Pemberian label pada graf $C_5 \odot 3K_1$	28
3.2.5	Pelabelan <i>graceful</i> pada graf $C_5 \odot 3K_1$	34
3.2.6	Pemberian label pada graf $C_6 \odot 3K_1$	36
3.2.7	Pelabelan <i>graceful</i> pada graf $C_6 \odot 3K_1$	45
3.2.8	Pemberian label pada graf $C_3 \odot 3K_1$	47
3.2.9	Pelabelan <i>graceful</i> pada graf $C_3 \odot 3K_1$	51
3.2.10	Pemberian label pada graf $C_8 \odot 2K_1$	52
3.2.11	Pelabelan <i>graceful</i> pada graf $C_8 \odot 2K_1$	60



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan atau menyatakan suatu persoalan agar lebih mudah dimengerti atau diselesaikan. Banyak persoalan akan lebih jelas untuk dikaji bila dapat direpresentasikan dalam bentuk graf.

Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Pertama kali pelabelan diperkenalkan oleh Sadlăck (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Pelabelan graf merupakan pemetaan satu-satu yang memetakan unsur himpunan titik dan atau unsur himpunan sisi ke bilangan bulat positif yang disebut label. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi. Hingga kini dikenal beberapa jenis pelabelan pada graf, antara lain pelabelan *graceful*, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib.

Suatu pelabelan f dari suatu graf G adalah pemetaan satu-satu dari himpunan titik di G ke suatu himpunan bilangan bulat positif. Untuk setiap sisi $e = uv \in E(G)$, bobot yang diinduksi oleh f pada e ditulis $f(e)$, adalah $|f(u) - f(v)|$. Misalkan G adalah suatu graf berorder n dan size m . Jika $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, m\}$ adalah suatu pelabelan dari G , sedemikian sehingga himpunan bobot yang diinduksi oleh f adalah

$\{1, 2, \dots, m\}$, maka f dikatakan pelabelan *graceful* dari G , dan G dinamakan graf *graceful*.

Aplikasi dari graf rantai dan graf *corona* banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari, seperti: instalasi listrik, jaringan internet, dan lain-lain.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana memberikan pelabelan *graceful* untuk graf rantai dan graf *corona*.

1.3 Pembatasan Masalah

Pada skripsi ini akan ditentukan pelabelan *graceful* untuk graf rantai dimana *block-blocknya* adalah graf bipartit, dan pelabelan *graceful* untuk graf *corona* $C_n \odot mK_1$ dengan m pendant di mana $m \geq 1$ dan $n \geq 3$.

1.4 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk menentukan pelabelan *graceful* pada graf rantai dimana *block-blocknya* adalah graf bipartit, dan pelabelan graf *corona* $C_n \odot mK_1$ dengan m pendant di mana $m \geq 1$ dan $n \geq 3$.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada skripsi ini terbagi menjadi empat bab. Bab I berisi latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan, dan sistematika

penulisan skripsi ini. Pada Bab II akan dibahas mengenai teori-teori dasar dalam pembahasan pelabelan *graceful* untuk graf rantai dan graf *corona*, serta definisi-definisi yang mendukung pembahasan dalam permasalahan yang akan dibahas. Bab III memuat pembahasan mengenai pelabelan *graceful* untuk graf rantai dimana *block-blocknya* adalah graf bipartit, dan pelabelan *graceful* untuk graf *corona* $C_n \odot mK_1$ dengan m *pendant* di mana $m \geq 1$ dan $n \geq 3$. Kesimpulan dan saran dari hasil pembahasan terdapat pada Bab IV.



BAB II LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diuraikan beberapa definisi dan terminologi dalam teori graf, serta definisi pelabelan *graceful* yang akan digunakan pada kajian permasalahan skripsi ini.

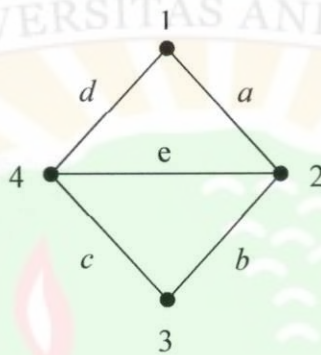
2.1 Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf

Suatu **graf** G adalah suatu struktur (V, E) di mana V adalah himpunan yang tak kosong dan E , adalah himpunan pasangan yang tak terurut dari elemen-elemen V . Elemen-elemen dari V disebut titik dari G sedangkan elemen-elemen dari E disebut sisi dari G . Himpunan titik dari G dinotasikan dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi dari G dinotasikan dengan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Banyak titik dari suatu graf G dinamakan **order**, yaitu $|V(G)| = n$. Kemudian, banyak sisi dari suatu graf G dinamakan **size**, yaitu $|E(G)| = m$.

Lintasan (path) yang panjangnya n dari titik awal v_0 ke titik akhir v_n di dalam graf G ialah barisan titik-titik dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G .

Perhatikan graf G_1 pada Gambar 2.1.1. Barisan 1, a , 2, b , 3, c , 4 merupakan suatu lintasan pada graf G_1 . Titik 1 dan titik 4 dikatakan titik ujung dari lintasan. Panjang lintasan adalah banyaknya sisi dalam lintasan tersebut. Lintasan 1, a , 2, b , 3, c , 4 memiliki panjang 3. Lintasan yang memuat n titik ditulis P_n . Lintasan yang

berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut *cycle*. Perhatikan pada Gambar 2.1.1, graf G_1 : 1, a , 2, b , 3, c , 4, d , 1 adalah sebuah *cycle*. Panjang *cycle* adalah jumlah sisi dalam *cycle* tersebut. *Cycle* 1, a , 2, b , 3, c , 4, d , 1 pada G_1 memiliki panjang 4. *Cycle* yang mempunyai n sisi ditulis C_n .



Gambar 2.1.1 Graf G_1

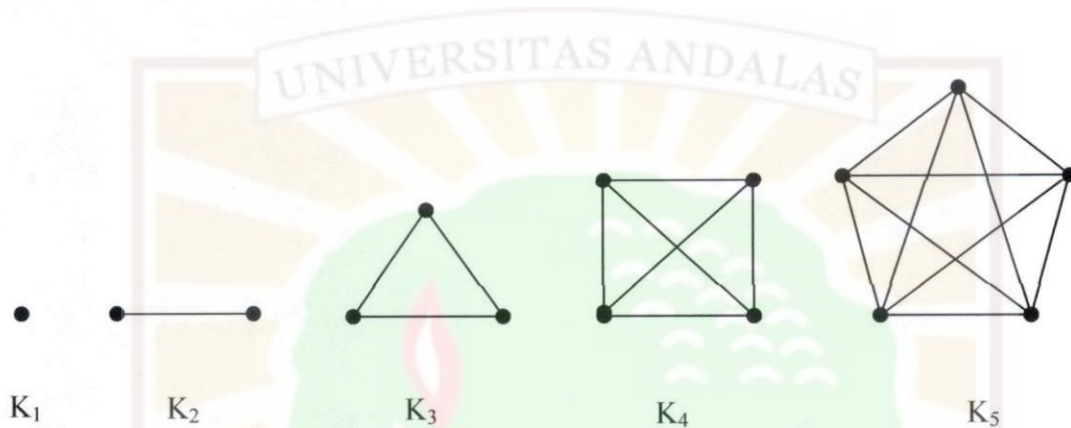
Dua buah titik v_1 dan titik v_2 disebut terhubung jika terdapat lintasan dari v_1 ke v_2 . Graf G disebut **graf terhubung (connected graph)** jika untuk setiap pasang titik v_i dan v_j dalam himpunan V terdapat lintasan dari v_i ke v_j . Jika tidak demikian, maka G disebut **graf tak terhubung (disconnected graph)**.



Gambar 2.1.2 Graf terhubung dan graf tak terhubung

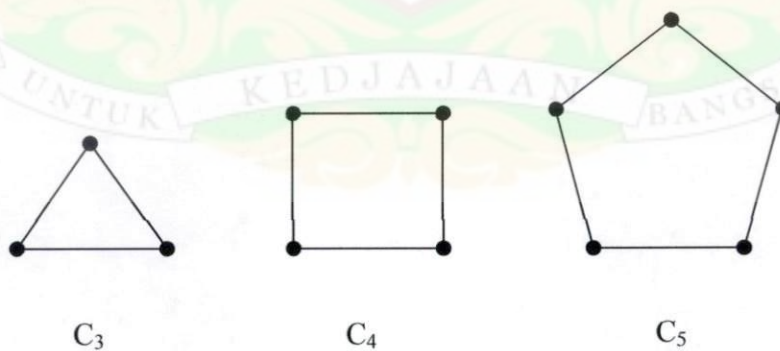
2.2 Beberapa Graf Sederhana Khusus

Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap titiknya mempunyai sisi ke semua titik lainnya. Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n . Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah titik adalah $n(n-1)/2$.



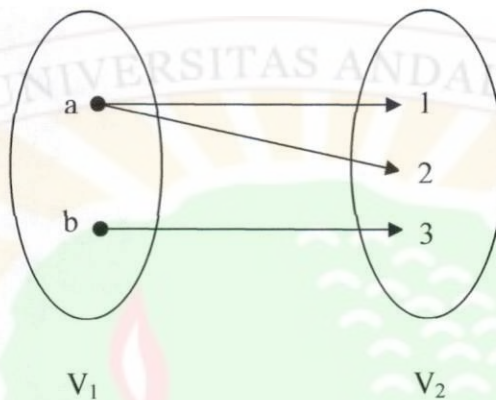
Gambar 2.2.1 Graf lengkap

Graf lingkaran adalah graf terhubung yang setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n titik dilambangkan dengan C_n .



Gambar 2.2.2 Graf lingkaran

Graf G yang himpunan titiknya dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2 , sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah titik di V_1 ke sebuah titik di V_2 disebut **graf bipartit**, dinyatakan sebagai $G(V_1, V_2)$.



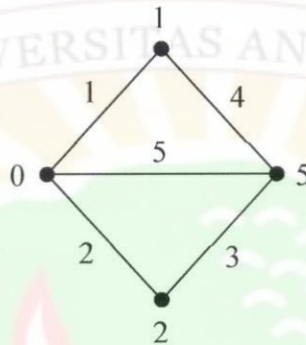
Gambar 2.2.3 Graf bipartit

2.3 Pelabelan *Graceful*

Pelabelan pada suatu graf merupakan pemetaan satu-satu yang memetakan unsur-unsur graf ke himpunan bilangan bulat positif. Unsur-unsur graf yang dipetakan dapat berupa himpunan titik, himpunan sisi dan himpunan titik sisi. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi. Himpunan yang digunakan adalah himpunan bilangan bulat positif yang selanjutnya disebut dengan label.

Suatu **pelabelan** f dari suatu graf G adalah pemetaan satu-satu dari himpunan titik di G ke suatu himpunan bilangan bulat positif. Untuk setiap sisi $e = uv \in E(G)$, **bobot** yang diinduksi oleh f pada e ditulis $f(e)$, adalah $|f(u) - f(v)|$.

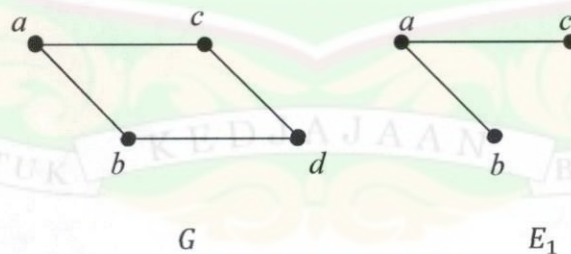
Definisi 2.3.1 Misalkan G adalah suatu graf berorder n dan size m . Jika $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, m\}$ adalah suatu pelabelan dari G , sedemikian sehingga himpunan bobot yang diinduksi oleh f adalah $\{1, 2, \dots, m\}$, maka f dikatakan **pelabelan graceful** dari G , dan G dinamakan **graf graceful**.



Gambar 2.3.1 Contoh pelabelan graceful

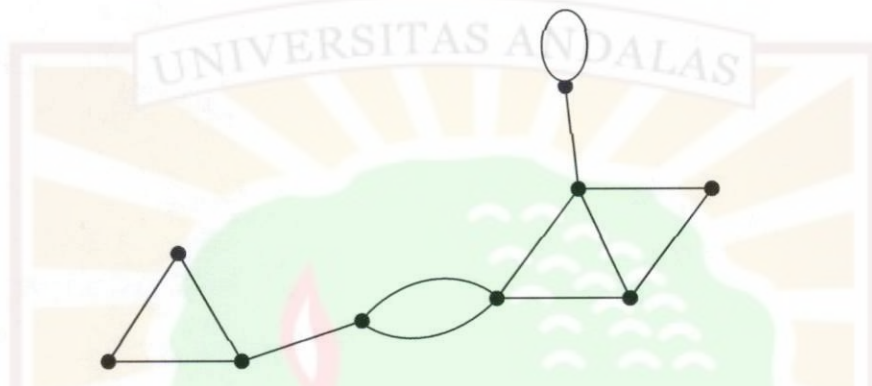
2.4 Graf Rantai

Suatu subgraf E_1 dikatakan **subgraf yang diinduksi** dari G apabila setiap dua titik di E_1 yang bertetangga di G juga harus bertetangga di E_1 , dinotasikan dengan $G[E_1]$. Pada Gambar 2.4.1, dapat dilihat bahwa jika a pada graf G bertetangga dengan b dan c , maka pada subgraf E_1 a juga bertetangga dengan b dan c .



Gambar 2.4.1 Graf G dan E_1

Titik v di G adalah sebuah **titik potong** (*cut-vertex*) jika E dapat dipisahkan menjadi dua bagian himpunan tak kosong E_1 dan E_2 di mana $G[E_1]$ dan $G[E_2]$ hanya mempunyai titik v yang sama. Pada Gambar 2.4.2, terdapat lima buah titik potong pada graf G .



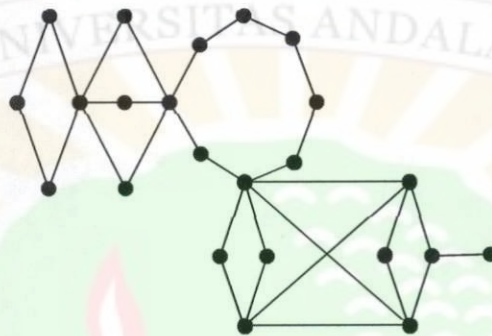
Gambar 2.4.2 Graf G

Block adalah graf terhubung yang tidak mempunyai titik potong. **Block** merupakan subgraf dari suatu graf. Contoh dari *block* dapat dilihat pada Gambar 2.4.3. **Block-cutpoint graph** dari graf G adalah graf bipartit yang terdiri dari himpunan titik potong dari graf G dan himpunan titik yang direpresentasikan oleh *block-block* di G .



Gambar 2.4.3 Graf G dan *block* dari graf G

Definisi 2.4.1 Misal graf $B_1, B_2, \dots, B_m$ adalah block-block dan untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, block B_i dan B_{i+1} mempunyai titik yang sama, maka jalan pada block-cutpoint graf adalah path. Graf G tersebut akan menghasilkan rangkaian yang disebut dengan graf rantai.



Gambar 2.4.4 Contoh Graf Rantai

2.5 Graf Corona

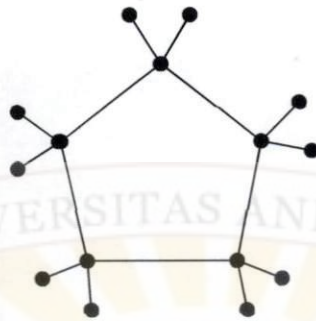
Definisi 2.5.1 Diberikan dua buah graf G dan H , **graf corona** dari G dengan H dinotasikan dengan $G \odot H$ adalah graf dengan

$$V(G \odot H) = V(G) \cup \bigcup_{i \in V(G)} V(H_i)$$

$$E(G \odot H) = E(G) \cup \bigcup_{v_i \in V(G)} E(H_i) \cup \{(v_i, u_i) : v_i \in V(G) \text{ and } u_i \in V(H_i)\}$$

dan $H_i \subseteq H, \forall h \in H_i, hv_i \in E(G \odot H)$.

Berikut ini diberikan beberapa contoh graf *corona* yang sederhana.



Gambar 2.5.1 Graf Corona $C_5 \odot 2K_1$



Gambar 2.5.2 Graf Corona $C_4 \odot P_3$

BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas hasil utama dari kajian skripsi ini, yaitu pelabelan *graceful* untuk graf rantai dan graf *corona*.

3. 1 Pelabelan *Graceful* untuk Graf Rantai

Teorema 3.1.1 Misal $B_1, B_2, \dots, B_m$ adalah block-block yang merupakan pelabelan *graceful*, maka terdapat graf rantai G dengan block-block $B_1, B_2, \dots, B_m$ yang merupakan pelabelan *graceful*.

Bukti. Didefinisikan q_i adalah banyak sisi dari B_i , dengan f_i adalah pelabelan *graceful* dari B_i dan misalkan X_i dan Y_i adalah himpunan bipartit dari B_i . Tanpa mengurangi konsep umum, misalkan f_i adalah pelabelan $0, 1, \dots, |X_i| - 1$ pada titik-titik di X_i . Untuk setiap $1 \leq i \leq m - 1$, identifikasi titik di B_i dengan label $|X_i| - 1$ dan titik B_{i+1} dengan label 0 , sehingga didapatkan graf rantai yang didefinisikan dengan G . Banyak titik dari G adalah $1 - m + \sum_{i=1}^m |X_i| + |Y_i|$, sedangkan banyak sisi adalah $q = \sum_{i=1}^m q_i$, dan himpunan bipartitnya adalah $X = \cup_{i=1}^m X_i$ dan $Y = \cup_{i=1}^m Y_i$. Semua titik potong dari G terdapat di X , jadi $|X| = \sum_{i=1}^m |X_i| - m + 1$.

Sekarang akan didapatkan pelabelan *graceful* dari G . Definisikan $\bar{q}_i$ adalah jumlah dari $q_{i+1} + \dots + q_m + 1$ untuk $1 \leq i \leq m - 1$ dan misal $\bar{q}_m = 1$. Akan dijumlahkan $\bar{q}_i - 1$ dengan mentransformasi f_i ke $\bar{q}_i$ -graceful labeling g_i . Maka bobot dari B_i adalah $\bar{q}_i, \bar{q}_i + 1, \dots, \bar{q}_i + q_i + 1$. Oleh karena itu, bobot di G adalah:

$$1, 2, \dots, q_m,$$

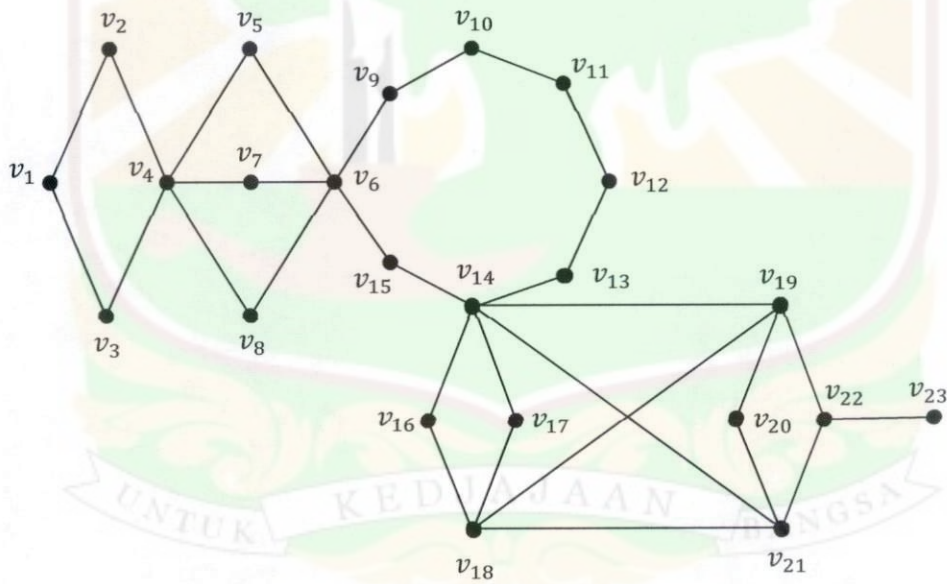
$$q_m + 1, q_m + 2, \dots, q_m + q_{m+1},$$

$$q_{m-1} + q_m + 1, q_{m-1} + q_m + 2, \dots, q_m + q_{m-1} + q_{m-2},$$

⋮

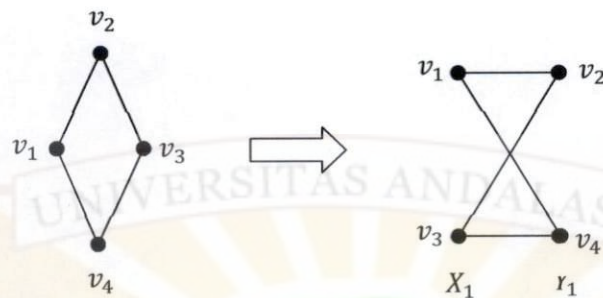
$$q_2 + \dots + q_m + 1, q_2 + \dots + q_m + 2, \dots, q_m + q_{m-1} + \dots + q_1$$

Untuk mendapatkan pelabelan *graceful* f , akan dijumlahkan label dari B_i untuk $i \geq 2$ dan $|X_{i-1}|$. Maka, B_{i-1} dan B_i mempunyai titik dengan label X_{i-1} , dan akan menjadi titik potong di antara keduanya. Akibatnya, label di G adalah himpunan $0, 1, \dots, g$. ■



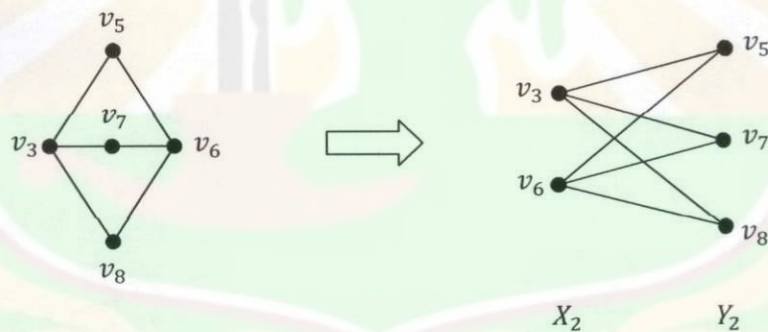
Gambar 3.1.1 Contoh graf rantai

Graf pada Gambar 3.1.1 terdiri dari lima *block*, yaitu B_1, B_2, B_3, B_4 , dan B_5 .
Berikut ini, akan diberikan uraian tentang masing-masing *block* dan graf bipartitnya.



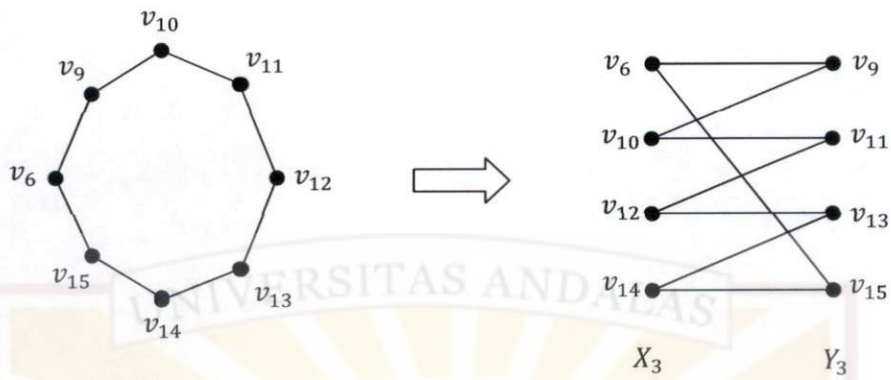
Gambar 3.1.2 Block 1 ($B_1 = X_1 \cup Y_1$)

Untuk *block* B_1 pada Gambar 3.1.2 diperoleh $|X_1| = 2$, $|Y_1| = 2$, dan $q_1 = 4$.



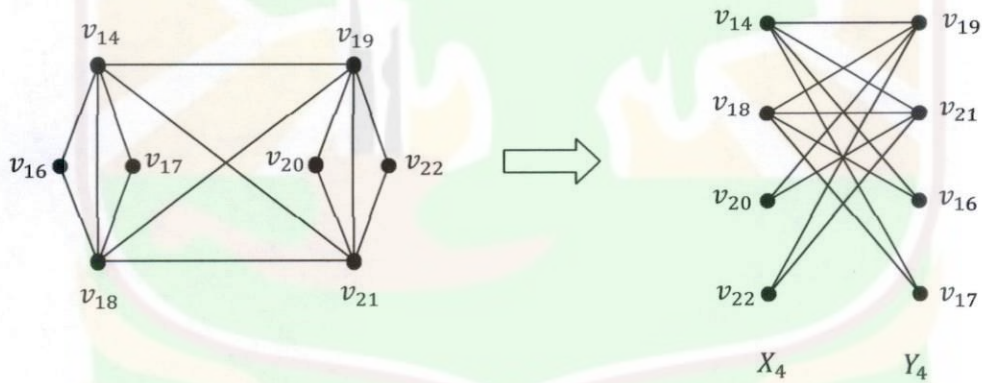
Gambar 3.1.3 Block 2 ($B_2 = X_2 \cup Y_2$)

Untuk *block* B_2 pada Gambar 3.1.3 diperoleh $|X_2| = 2$, $|Y_2| = 3$, dan $q_2 = 6$.



Gambar 3.1.4 Block 3 ($B_3 = X_3 \cup Y_3$)

Untuk block B_3 pada Gambar 3.1.4 diperoleh $|X_3| = 4$, $|Y_3| = 4$, dan $q_3 = 8$.



Gambar 3.1.5 Block 4 ($B_4 = X_4 \cup Y_4$)

Untuk block B_4 pada Gambar 3.1.5 diperoleh $|X_4| = 4$, $|Y_4| = 4$, dan $q_4 = 12$.



Gambar 3.1.6 Block 5 ($B_5 = X_5 \cup Y_5$)

Untuk block B_5 pada Gambar 3.1.6 diperoleh $|X_5| = 1$, $|Y_5| = 1$, dan $q_5 = 1$.

Jadi, banyak titik di G adalah $1 - m + \sum_{i=1}^m |X_i| + |Y_i|$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - 5 + \sum_{i=1}^5 |X_i| + |Y_i| \\
 &= 1 - 5 + (|2 + 2 + 4 + 4 + 1|) + (|2 + 3 + 4 + 4 + 1|) \\
 &= 1 - 5 + 13 + 14 \\
 &= 23.
 \end{aligned}$$

Banyak sisi di G adalah

$$\begin{aligned}
 q &= \sum_{i=1}^m q_i \\
 &= q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 \\
 &= 4 + 6 + 8 + 12 + 1 \\
 &= 31.
 \end{aligned}$$

Himpunan bipartit dari G adalah $X = \cup_{i=1}^m X_i$ dan $Y = \cup_{i=1}^m Y_i$. Karena

$X_i \cap X_j = \emptyset \forall i \neq j$, maka

$$\begin{aligned}
 |X| &= |X_1| + |X_2| + |X_3| + |X_4| + |X_5| \\
 &= 2 + 2 + 4 + 4 + 1 \\
 &= 13.
 \end{aligned}$$

Karena $Y_i \cap Y_j = \emptyset \forall i \neq j$, maka

$$\begin{aligned}|Y| &= |Y_1| + |Y_2| + |Y_3| + |Y_4| + |Y_5| \\&= 2 + 3 + 4 + 4 + 1 \\&= 14\end{aligned}$$

Semua titik potong dari G terdapat di X , jadi $|X| = \sum_{i=1}^m |X_i| - m + 1$

$$\begin{aligned}|X| &= \sum_{i=1}^m |X_i| - m + 1 \\&= \sum_{i=1}^5 |X_i| - 5 + 1 \\&= (2 + 2 + 4 + 4 + 1) - 5 + 1 \\&= 9\end{aligned}$$

Sekarang akan didapatkan α -labeling dari G . Definisikan $\bar{q}_i$ adalah jumlah dari $q_{i+1} + \dots + q_m + 1$ untuk $1 \leq i \leq m - 1$ dan misal $\bar{q}_m = 1$.

$$\begin{aligned}\bar{q}_1 &= q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + 1 \\&= 6 + 8 + 12 + 1 + 1 \\&= 29\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{q}_2 &= q_3 + q_4 + q_5 + 1 \\&= 8 + 12 + 1 + 1 \\&= 22\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{q}_3 &= q_4 + q_5 + 1 \\&= 12 + 1 + 1 \\&= 14\end{aligned}$$

$$\bar{q}_4 = q_5 + 1$$

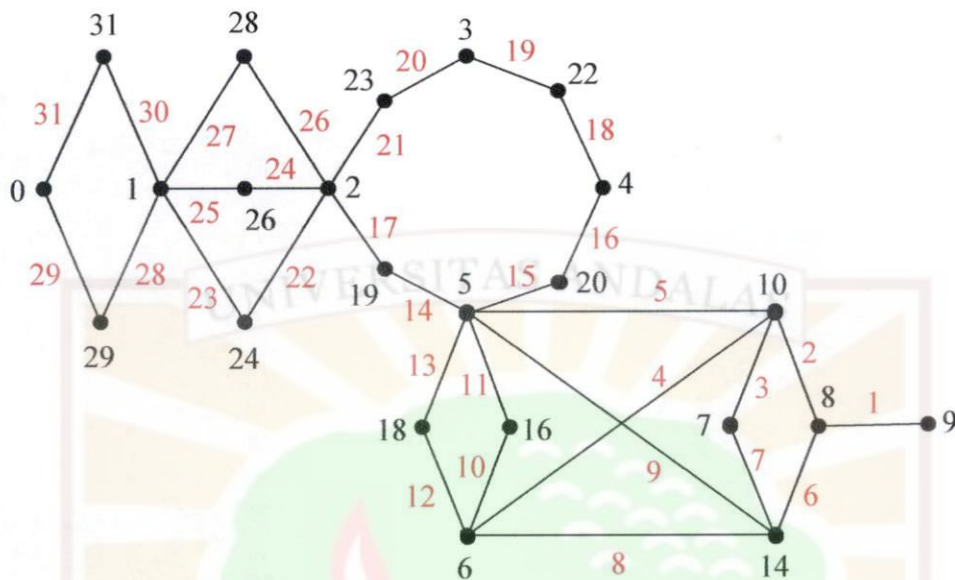
$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

$$\bar{q}_5 = 1$$

Maka, bobot di G dapat ditulis sebagai berikut

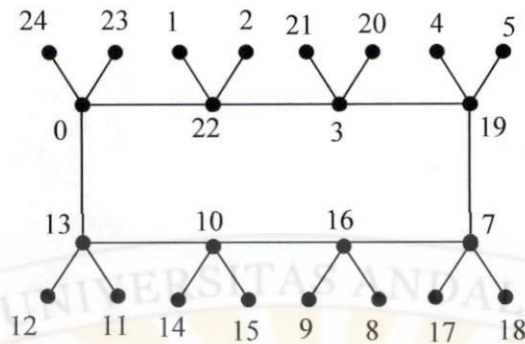
- $1, 2, \dots, q_m,$
 $\{1\}$
- $q_m + 1, q_m + 2, \dots, q_m + q_{m-1},$
 $q_5 + 1, q_5 + 2, \dots, q_5 + q_{5-1},$
 $1 + 1, 1 + 2, \dots, 1 + 12,$
 $\{2, 3, \dots, 13\}$
- $q_{m-1} + q_m + 1, q_{m-1} + q_m + 2, \dots, q_m + q_{m-1} + q_{m-2},$
 $q_{5-1} + q_5 + 1, q_{5-1} + q_5 + 2, \dots, q_5 + q_{5-1} + q_{5-2},$
 $12 + 1 + 1, 12 + 1 + 2, \dots, 1 + 12 + 8,$
 $\{14, 15, \dots, 21\}$
- $q_{m-2} + q_{m-1} + q_m + 1, q_{m-2} + q_{m-1} + q_m + 2, \dots, q_m + q_{m-1} + q_{m-2} +$
 $q_{m-3},$
 $q_{5-2} + q_{5-1} + q_5 + 1, q_{5-2} + q_{5-1} + q_5 + 2, \dots, q_5 + q_{5-1} + q_{5-2} + q_{5-3}$
 $\{22, 23, \dots, 27\}$
- $q_2 + \dots + q_m + 1, q_2 + \dots + q_m + 2, \dots, q_m + q_{m-1} + \dots + q_1$
 $q_2 + \dots + q_5 + 1, q_2 + \dots + q_5 + 2, \dots, q_5 + q_{5-1} + \dots + q_1$
 $\{28, 29, 30, \dots, 31\}$



Gambar 3.1.7 Pelabelan *graceful* pada graf rantai

3. 2 Pelabelan Graceful untuk Graf Corona

Salah satu jenis graf corona adalah $C_n \odot K_1$, yaitu cycle dengan pendant titik. Pada tahun 1979, [5] ditunjukkan bahwa graf ini adalah *graceful*. Melanjutkan gagasan Frucht, akan dipelajari pelabelan *graceful* untuk graf corona $C_n \odot mK_1$, yang dihasilkan pada setiap cycle dengan m pendant titik ($m \geq 1$). Untuk menghindari nomor yang berlebih pada gambar, pelabelan $C_n \odot mK_1$ dibuat dalam bentuk *array* dengan n kolom dan $m + 1$ baris. Baris pertama berisi label C_n dan baris berikutnya berisi label dari setiap *pendant*. Dapat dilihat pada Gambar 3.2.1.



Gambar 3.2.1 Contoh pelabelan *graceful* pada graf $C_8 \odot 2K_1$

Dalam bentuk *array* dapat ditulis sebagai berikut:

$$C_8 \odot 2K_1: \begin{cases} 0, 22, 3, 19, 7, 16, 10, 13 \\ 23, 1, 20, 4, 17, 8, 14, 11 \\ 24, 2, 21, 5, 18, 9, 15, 12 \end{cases}$$

Teorema 3.2.1 Graf corona $C_n \odot mK_1$ adalah graf *graceful* untuk setiap bilangan bulat positif $n \geq 3$ dan $m \geq 1$.

Bukti : Perhatikan *cycle* $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$, dan didefinisikan $v_{i,j}$ adalah titik berderajat satu yang bertetangga dengan v_i ($1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m$).

Perhatikan empat kasus berikut :

- Bila $n \equiv 0 \pmod{4}$, pelabelan f didefinisikan sebagai pelabelan *graceful* dari $C_n \odot mK_1$, yaitu:

$$f(v_{2k+1}) = \begin{cases} (m+1)k, & 0 \leq k \leq \frac{n-4}{4} \\ (m+1)k+1, & \frac{n}{4} \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

$$f(v_{2k}) = (m+1)(n-k)+1, 1 \leq k \leq \frac{n}{2}$$

dan

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} (m+1)n - f(v_i) - j + 1, & 1 \leq i \leq \frac{n}{2}, 1 \leq j \leq m \\ (m-1)n - f(v_i) - j + 2, & \frac{n}{2} + 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Contoh 1:

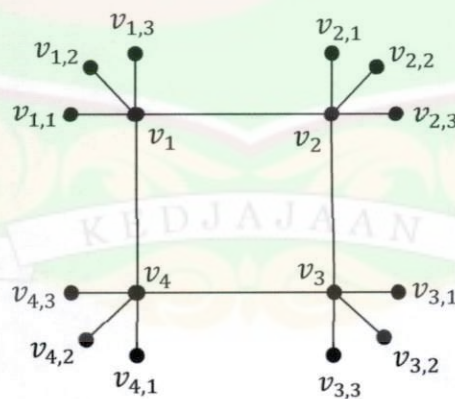
Tentukan pelabelan *graceful* untuk $C_4 \odot 3K_1$.

Solusi : Untuk menentukan pelabelan *graceful* untuk graf $C_4 \odot 3K_1$, dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Akan digambarkan graf $C_4 \odot 3K_1$ dengan $n = 4$ dan $m = 3$. Lalu beri label pada setiap titiknya. Titik pada *cycle* diberi label v_1, v_2, v_3 dan v_4 , sedangkan titik pada *pendant* diberi label

$v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}, v_{2,1}, v_{2,2}, v_{2,3}, v_{3,1}, v_{3,2}, v_{3,3}, v_{4,1}, v_{4,2}$ dan $v_{4,3}$.

Pemberian label pada graf $C_4 \odot 3K_1$ dapat dilihat pada Gambar 3.2.2.



Gambar 3.2.2 Pemberian label pada graf $C_4 \odot 3K_1$

2. Hitung bobot titik pada *cycle*.

$$\begin{aligned}f(v_1) &= (m+1)k, k=0 \\&= (3+1)0 \\&= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(v_2) &= (m+1)(n-k) + 1, k=1 \\&= (3+1)(4-1) + 1 \\&= (4 \times 3) + 1 \\&= 12 + 1 \\&= 13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(v_3) &= (m+1)k + 1, k=1 \\&= (3+1)1 + 1 \\&= (4 \times 1) + 1 \\&= 4 + 1 \\&= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(v_4) &= (m+1)(n-k) + 1, k=2 \\&= (3+1)(4-2) + 1 \\&= (4 \times 2) + 1 \\&= 8 + 1 \\&= 9\end{aligned}$$

3. Hitung bobot titik pada setiap *pendant*.

$$\begin{aligned}f(v_{1,1}) &= (m+1)n - f(v_1) - j + 1, i=1, j=1 \\&= (3+1)4 - 0 - 1 + 1\end{aligned}$$

$$= (4 \times 4) - 0$$

$$= 16$$

$$f(v_{1,2}) = (m+1)n - f(v_1) - j + 1, i = 1, j = 2$$

$$= (3+1)4 - 0 - 2 + 1$$

$$= (4 \times 4) - 1$$

$$= 15$$

$$f(v_{1,3}) = (m+1)n - f(v_1) - j + 1, i = 1, j = 3$$

$$= (3+1)4 - 0 - 3 + 1$$

$$= (4 \times 4) - 2$$

$$= 14$$

$$f(v_{2,1}) = (m+1)n - f(v_2) - j + 1, i = 2, j = 1$$

$$= (3+1)4 - 13 - 1 + 1$$

$$= (4 \times 4) - 13$$

$$= 16 - 13$$

$$= 3$$

$$f(v_{2,2}) = (m+1)n - f(v_2) - j + 1, i = 2, j = 2$$

$$= (3+1)4 - 13 - 2 + 1$$

$$= (4 \times 4) - 14$$

$$= 16 - 14$$

$$= 2$$

$$f(v_{2,3}) = (m+1)n - f(v_2) - j + 1, i = 2, j = 3$$

$$= (3+1)4 - 13 - 3 + 1$$

$$= (4 \times 4) - 15$$

$$= 16 - 15$$

$$= 1$$

$$f(v_{3,1}) = (m+1)n - f(v_3) - j + 2, i = 3, j = 1$$

$$= (3+1)4 - 5 - 1 + 2$$

$$= (4 \times 4) - 4$$

$$= 16 - 4$$

$$= 12$$

$$f(v_{3,2}) = (m+1)n - f(v_3) - j + 2, i = 3, j = 2$$

$$= (3 + 1)4 - 5 - 2 + 2$$

$$= (4 \times 4) - 5$$

$$= 16 - 5$$

$$= 11$$

$$f(v_{3,3}) = (m + 1)n - f(v_3) - j + 2, i = 3, j = 3$$

$$= (3 + 1)4 - 5 - 3 + 2$$

$$= (4 \times 4) - 6$$

$$= 16 - 6$$

$$= 10$$

$$f(v_{4,1}) = (m + 1)n - f(v_4) - j + 2, i = 4, j = 1$$

$$= (3 + 1)4 - 9 - 1 + 2$$

$$= (4 \times 4) - 8$$

$$= 16 - 8$$

$$= 8$$

$$f(v_{4,2}) = (m + 1)n - f(v_4) - j + 2, i = 4, j = 2$$

$$= (3 + 1)4 - 9 - 2 + 2$$

$$= (4 \times 4) - 9$$

$$= 16 - 9$$

$$= 7$$

$$f(v_{4,3}) = (m+1)n - f(v_4) - j + 2, i=4, j=3$$

$$= (3+1)4 - 9 - 3 + 2$$

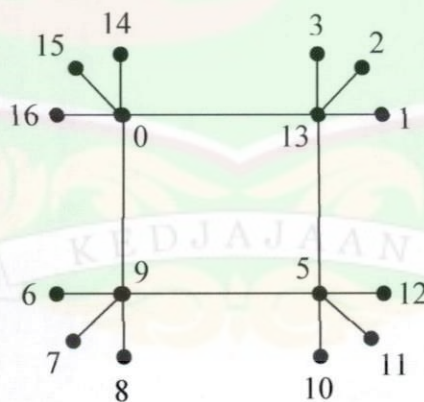
$$= (4 \times 4) - 10$$

$$= 16 - 10$$

$$= 6$$

Maka, didapat pelabelan *graceful* untuk graf $C_4 \odot 3K_1$ seperti pada Gambar

3.2.3.



Gambar 3.2.3 Pelabelan *graceful* pada graf $C_4 \odot 3K_1$

Dalam bentuk *array* dapat ditulis sebagai berikut:

$$C_4 \odot 3K_1: \begin{cases} 0, 13, 5, 9 \\ 14, 1, 10, 6 \\ 15, 2, 11, 7 \\ 16, 3, 12, 8 \end{cases}$$

ii. Bila $n \equiv 1 \pmod{4}$, pelabelan f didefinisikan sebagai pelabelan *graceful* dari

$C_n \odot mK_1$, yaitu:

$$f(v_{2k+1}) = \begin{cases} (m+1)k, & 0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}, k \neq \frac{n-1}{4} \\ (m+1)k - 1, & k = \frac{n-1}{4} \end{cases}$$

$$f(v_{2k}) = \begin{cases} (m+1)(n-k) + 1, & 1 \leq k \leq \frac{n-1}{4} \\ (m+1)(n-k), & \frac{n+3}{4} \leq k \leq \frac{n-1}{2} \end{cases}$$

dan

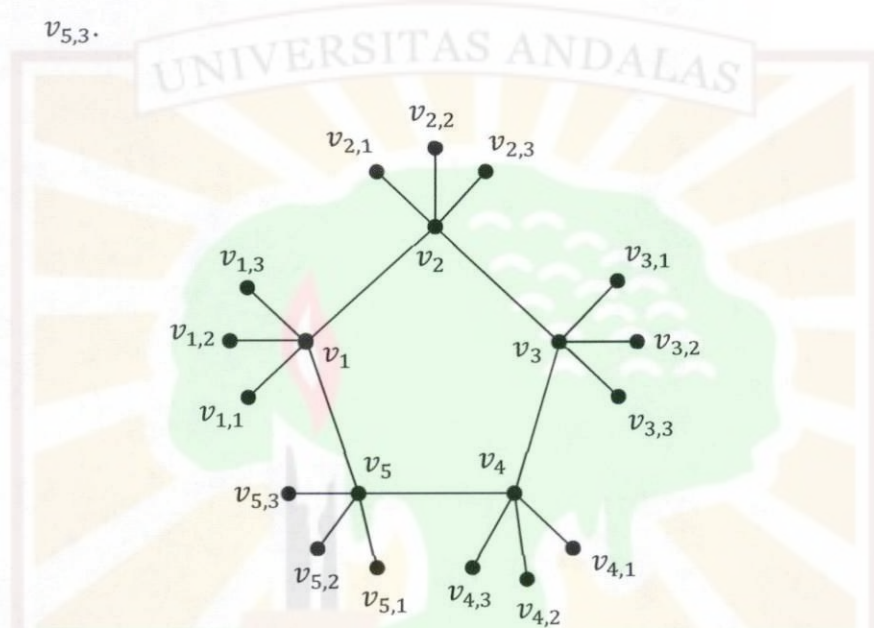
$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} (m+1)n - f(v_i) - j + 1, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, 1 \leq j \leq m \\ (m+1)n - f(v_i) + 1, & i = \frac{n-1}{2}, \text{ and } j = 1 \\ (m+1)n - f(v_i) - j + 1, & i = \frac{n-1}{2}, \text{ and } 2 \leq j \leq m \\ (m+1)n - f(v_i) - j - 1, & i = \frac{n+1}{2}, 1 \leq j \leq m \\ (m+1)n - f(v_i) - j, & \frac{n+3}{2} \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Contoh 2:

Tentukan pelabelan *graceful* untuk $C_5 \odot 3K_1$.

Solusi : Untuk menentukan pelabelan *graceful* untuk graf $C_5 \odot 3K_1$, dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Akan digambarkan graf $C_5 \odot 3K_1$ dengan $n = 5$ dan $m = 3$. Lalu beri label pada setiap titiknya. Titik pada *cycle* diberi label v_1, v_2, v_3, v_4 dan v_5 , sedangkan titik pada *pendant* diberi label $v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}, v_{2,1}, v_{2,2}, v_{2,3}, v_{3,1}, v_{3,2}, v_{3,3}, v_{4,1}, v_{4,2}, v_{4,3}, v_{5,1}, v_{5,2}$ dan $v_{5,3}$.



Gambar 3.2.4 Pemberian label pada graf $C_5 \odot 3K_1$

2. Hitung bobot titik pada *cycle*.

$$f(v_1) = (m + 1)k, k = 0$$

$$= (3 + 1)0$$

$$= 0$$

$$f(v_2) = (m + 1)(n - k) + 1, k = 1$$

$$= (3 + 1)(5 - 1) + 1$$

$$= (4 \times 4) + 1$$

$$= 16 + 1$$

$$= 17$$

$$f(v_3) = (m + 1)k - 1, k = 1$$

$$= (3 + 1)1 - 1$$

$$= (4 \times 1) - 1$$

$$= 4 - 1$$

$$= 3$$

$$f(v_4) = (m + 1)(n - k), k = 2$$

$$= (3 + 1)(5 - 2)$$

$$= 4 \times 3$$

$$= 12$$

$$f(v_5) = (m + 1)k, k = 2$$

$$= (3 + 1)2$$

$$= 4 \times 2$$

$$= 8$$

3. Hitung bobot titik pada setiap *pendant*.

$$f(v_{1,1}) = (m + 1)n - f(v_1) - j + 1, i = 1, j = 1$$

$$= (3 + 1)5 - 0 - 1 + 1$$

$$= (4 \times 5) - 0$$

$$= 20 - 0$$

$$= 20$$

$$f(v_{1,2}) = (m+1)n - f(v_1) - j + 1, i = 1, j = 2$$

$$= (3+1)5 - 0 - 2 + 1$$

$$= (4 \times 5) - 1$$

$$= 20 - 1$$

$$= 19$$

$$f(v_{1,3}) = (m+1)n - f(v_1) - j + 1, i = 1, j = 3$$

$$= (3+1)5 - 0 - 3 + 1$$

$$= (4 \times 5) - 2$$

$$= 20 - 2$$

$$= 18$$

$$f(v_{2,1}) = (m+1)n - f(v_2) + 1, i = 2, j = 1$$

$$= (3+1)5 - 17 + 1$$

$$= (4 \times 5) - 16$$

$$= 20 - 16$$

$$= 4$$

$$f(v_{2,2}) = (m+1)n - f(v_2) - j + 1, i = 2, j = 2$$

$$= (3 + 1)5 - 17 - 2 + 1$$

$$= (4 \times 5) - 18$$

$$= 20 - 18$$

$$= 2$$

$$f(v_{2,3}) = (m + 1)n - f(v_2) - j + 1, i = 2, j = 3$$

$$= (3 + 1)5 - 17 - 3 + 1$$

$$= (4 \times 5) - 19$$

$$= 20 - 19$$

$$= 1$$

$$f(v_{3,1}) = (m + 1)n - f(v_3) - j - 1, i = 3, j = 1$$

$$= (3 + 1)5 - 3 - 1 - 1$$

$$= (4 \times 5) - 5$$

$$= 20 - 5$$

$$= 15$$

$$f(v_{3,2}) = (m + 1)n - f(v_3) - j - 1, i = 3, j = 2$$

$$= (3 + 1)5 - 3 - 2 - 1$$

$$= (4 \times 5) - 6$$

$$= 20 - 6$$

$$= 14$$

$$f(v_{3,3}) = (m + 1)n - f(v_3) - j - 1, i = 3, j = 3$$

$$= (3 + 1)5 - 3 - 3 - 1$$

$$= (4 \times 5) - 7$$

$$= 20 - 7$$

$$= 13$$

$$f(v_{4,1}) = (m + 1)n - f(v_4) - j, i = 4, j = 1$$

$$= (3 + 1)5 - 12 - 1$$

$$= (4 \times 5) - 13$$

$$= 20 - 13$$

$$= 7$$

$$f(v_{4,2}) = (m + 1)n - f(v_4) - j, i = 4, j = 2$$

$$= (3 + 1)5 - 12 - 2$$

$$= (4 \times 5) - 14$$

$$= 20 - 14$$

$$= 6$$

$$f(v_{4,3}) = (m + 1)n - f(v_4) - j, i = 4, j = 3$$

$$= (3 + 1)5 - 12 - 3$$

$$= (4 \times 5) - 15$$

$$= 20 - 15$$

$$= 5$$

$$f(v_{5,1}) = (m + 1)n - f(v_5) - j, i = 5, j = 1$$

$$= (3 + 1)5 - 8 - 1$$

$$= (4 \times 5) - 9$$

$$= 20 - 9$$

$$= 11$$

$$f(v_{5,2}) = (m + 1)n - f(v_5) - j, i = 5, j = 2$$

$$= (3 + 1)5 - 8 - 2$$

$$= (4 \times 5) - 10$$

$$= 20 - 10$$

$$= 10$$

$$f(v_{5,3}) = (m+1)n - f(v_5) - j, i=5, j=3$$

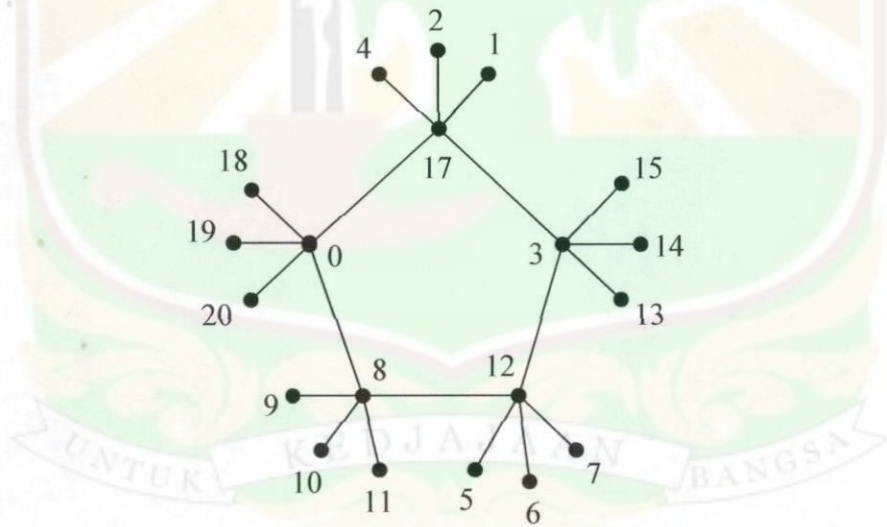
$$= (3+1)5 - 8 - 3$$

$$= (4 \times 5) - 11$$

$$= 20 - 11$$

$$= 9$$

Maka, didapat pelabelan *graceful* untuk graf $C_5 \odot 3K_1$ seperti pada Gambar 3.2.5.



Gambar 3.2.5 Pelabelan *graceful* untuk graf $C_5 \odot 3K_1$

Dalam bentuk *array*, pelabelan *graceful* untuk graf $C_5 \odot 3K_1$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$C_5 \odot 3K_1 = \begin{cases} 0, 17, 3, 12, 8 \\ 18, 1, 13, 5, 9 \\ 19, 2, 14, 6, 10 \\ 20, 4, 15, 7, 11 \end{cases}$$

- iii. Bila $n \equiv 2 \pmod{4}$, pelabelan f didefinisikan sebagai pelabelan *graceful* dari $C_n \odot mK_1$, yaitu:

$$f(v_{2k+1}) = \begin{cases} (m+1)k, & 0 \leq k \leq \frac{n-2}{2}, k \neq \frac{n-2}{4} \\ (m+1)k - 1, & k = \frac{n-2}{4} \end{cases}$$

$$f(v_{2k}) = \begin{cases} (m+1)(n-k) + 1, & 1 \leq k \leq \frac{n-2}{4} \\ (m+1)(n-k), & \frac{n+2}{4} \leq k \leq \frac{n}{2} \end{cases}$$

dan

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} (m+1)n - f(v_i) - j + 1, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, 1 \leq j \leq m \\ (m+1)n - f(v_i) + 1, & i = \frac{n-2}{2}, \text{ and } j = 1 \\ (m+1)n - f(v_i) - j + 1, & i = \frac{n-2}{2}, \text{ and } 2 \leq j \leq m \\ (m+1)n - f(v_i) - j - 1, & i = \frac{n}{2}, 1 \leq j \leq m \\ (m+1)n - f(v_i) - j, & \frac{n+2}{2} \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Contoh 3:

Tentukan pelabelan graceful untuk $C_6 \odot 3K_1$.

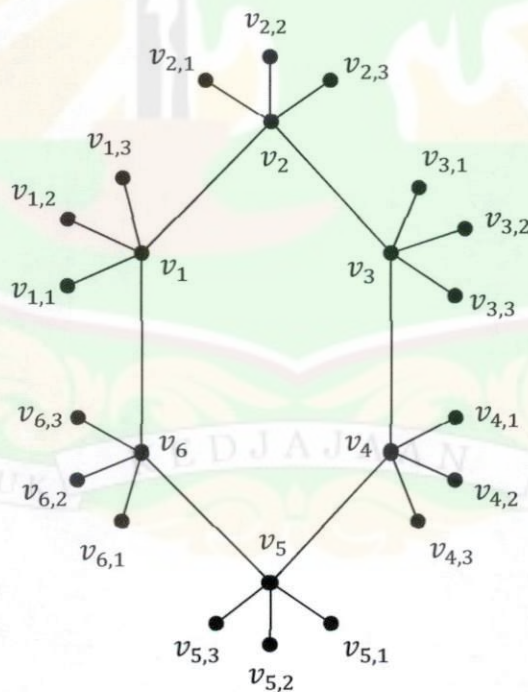
Solusi : Untuk menentukan pelabelan *graceful* untuk graf $C_6 \odot 3K_1$, dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Akan digambarkan graf $C_6 \odot 3K_1$ dengan $n = 6$ dan $m = 3$. Lalu beri label pada setiap titiknya. Titik pada *cycle* diberi label v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 dan v_6 .

Sedangkan titik pada *pendant* diberi label

$v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}, v_{2,1}, v_{2,2}, v_{2,3}, v_{3,1}, v_{3,2}, v_{3,3}, v_{4,1}, v_{4,2}, v_{4,3}, v_{5,1},$

$v_{5,2}, v_{5,3}, v_{6,1}, v_{6,2},$ dan $v_{6,3}$.



Gambar 3.2.6 Pemberian label pada graf $C_6 \odot 3K_1$

2. Hitung bobot titik pada *cycle*.

$$f(v_1) = (m + 1)k, k = 0$$

$$= (3 + 1)0$$

$$= 0$$

$$f(v_2) = (m + 1)(n - k) + 1, k = 1$$

$$= (3 + 1)(6 - 1) + 1$$

$$= (4 \times 5) + 1$$

$$= 20 + 1$$

$$= 21$$

$$f(v_3) = (m + 1)k - 1, k = 1$$

$$= (3 + 1)1 - 1$$

$$= (4 \times 1) - 1$$

$$= 4 - 1$$

$$= 3$$

$$f(v_4) = (m + 1)(n - k), k = 2$$

$$= (3 + 1)(6 - 2)$$

$$= 4 \times 4$$

$$= 16$$

$$f(v_5) = (m + 1)k, k = 2$$

$$= (3 + 1)2$$

$$= 4 \times 2$$

$$= 8$$

$$f(v_6) = (m + 1)(n - k), k = 3$$

$$= (3 + 1)(6 - 3)$$

$$= 4 \times 3$$

$$= 12$$

3. Hitung bobot titik pada setiap *pendant*.

$$f(v_{1,1}) = (m + 1)n - f(v_1) - j + 1, i = 1, j = 1$$

$$= (3 + 1)6 - 0 - 1 + 1$$

$$= (4 \times 6) - 0$$

$$= 24 - 0$$

$$= 24$$

$$f(v_{1,2}) = (m+1)n - f(v_1) - j + 1, i = 1, j = 2$$

$$= (3+1)6 - 0 - 2 + 1$$

$$= (4 \times 6) - 1$$

$$= 24 - 1$$

$$= 23$$

$$f(v_{1,3}) = (m+1)n - f(v_1) - j + 1, i = 1, j = 3$$

$$= (3+1)6 - 0 - 3 + 1$$

$$= (4 \times 6) - 2$$

$$= 24 - 2$$

$$= 22$$

$$f(v_{2,1}) = (m+1)n - f(v_2) + 1, i = 2, j = 1$$

$$= (3+1)6 - 21 + 1$$

$$= (4 \times 6) - 20$$

$$= 24 - 20$$

$$= 4$$

$$f(v_{2,2}) = (m+1)n - f(v_2) - j + 1, i = 2, j = 2$$

$$= (3+1)6 - 21 - 2 + 1$$

$$= (4 \times 6) - 22$$

$$= 24 - 22$$

$$= 2$$

$$f(v_{2,3}) = (m+1)n - f(v_2) - j + 1, i = 2, j = 3$$

$$= (3+1)6 - 21 - 3 + 1$$

$$= (4 \times 6) - 23$$

$$= 24 - 23$$

$$= 1$$

$$f(v_{3,1}) = (m+1)n - f(v_3) - j - 1, i = 3, j = 1$$

$$= (3+1)6 - 3 - 1 - 1$$

$$= (4 \times 6) - 5$$

$$= 24 - 5$$

$$= 19$$

$$f(v_{3,2}) = (m+1)n - f(v_3) - j - 1, i = 3, j = 2$$

$$= (3+1)6 - 3 - 2 - 1$$

$$= (4 \times 6) - 6$$

$$= 24 - 6$$

$$= 18$$

$$f(v_{3,3}) = (m+1)n - f(v_3) - j - 1, i = 3, j = 3$$

$$= (3+1)6 - 3 - 3 - 1$$

$$= (4 \times 6) - 7$$

$$= 24 - 7$$

$$= 17$$

$$f(v_{4,1}) = (m+1)n - f(v_4) - j, i = 4, j = 1$$

$$= (3+1)6 - 16 - 1$$

$$= (4 \times 6) - 17$$

$$= 24 - 17$$

$$= 7$$

$$f(v_{4,2}) = (m + 1)n - f(v_4) - j, i = 4, j = 2$$

$$= (3 + 1)6 - 16 - 2$$

$$= (4 \times 6) - 18$$

$$= 24 - 18$$

$$= 6$$

$$f(v_{4,3}) = (m + 1)n - f(v_4) - j, i = 4, j = 3$$

$$= (3 + 1)6 - 16 - 3$$

$$= (4 \times 6) - 19$$

$$= 24 - 19$$

$$= 5$$

$$f(v_{5,1}) = (m + 1)n - f(v_5) - j, i = 5, j = 1$$

$$= (3 + 1)6 - 8 - 1$$

$$= (4 \times 6) - 9$$

$$= 24 - 9$$

$$= 15$$

$$f(v_{5,2}) = (m + 1)n - f(v_5) - j, i = 5, j = 2$$

$$= (3 + 1)6 - 8 - 2$$

$$= (4 \times 6) - 10$$

$$= 24 - 10$$

$$= 14$$

$$f(v_{5,3}) = (m + 1)n - f(v_5) - j, i = 5, j = 3$$

$$= (3 + 1)6 - 8 - 3$$

$$= (4 \times 6) - 11$$

$$= 24 - 11$$

$$= 13$$

$$f(v_{6,1}) = (m + 1)n - f(v_6) - j, i = 6, j = 1$$

$$= (3 + 1)6 - 12 - 1$$

$$= (4 \times 6) - 13$$

$$= 24 - 13$$

$$= 11$$

$$f(v_{6,2}) = (m + 1)n - f(v_6) - j, i = 6, j = 2$$

$$= (3 + 1)6 - 12 - 2$$

$$= (4 \times 6) - 14$$

$$= 24 - 14$$

$$= 10$$

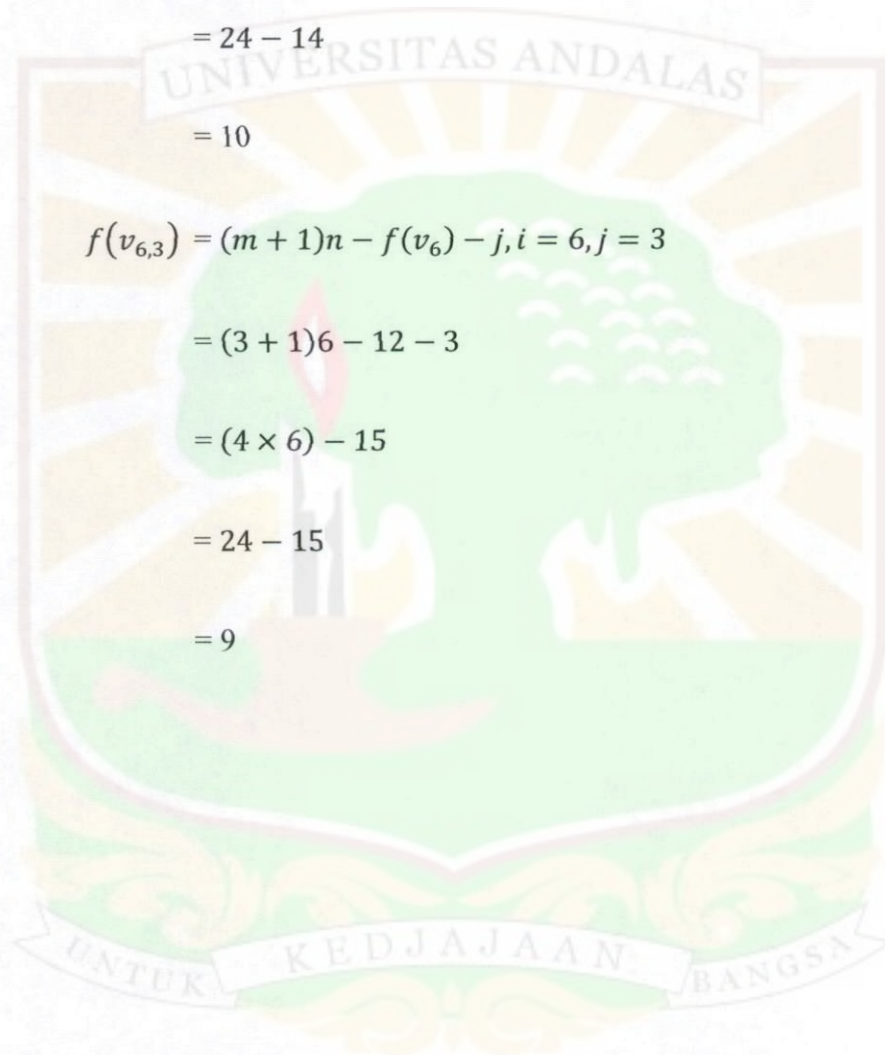
$$f(v_{6,3}) = (m + 1)n - f(v_6) - j, i = 6, j = 3$$

$$= (3 + 1)6 - 12 - 3$$

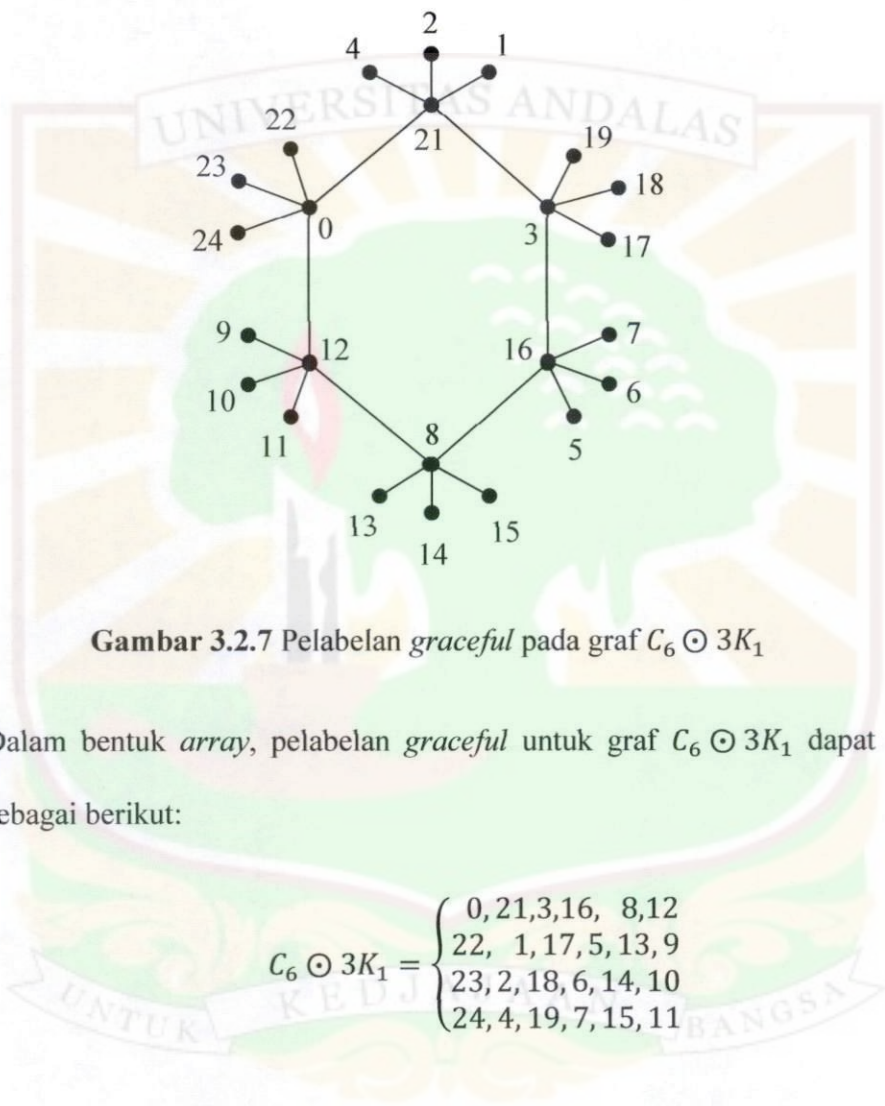
$$= (4 \times 6) - 15$$

$$= 24 - 15$$

$$= 9$$



Maka, didapat pelabelan *graceful* untuk graf $C_6 \odot 3K_1$ seperti pada Gambar 3.2.7.



iv. Bila $n \equiv 3 \pmod{4}$, pelabelan f didefinisikan sebagai pelabelan *graceful* dari

$C_n \odot mK_1$, yaitu:

$$f(v_{2k+1}) = \begin{cases} (m+1)k, & 0 \leq k \leq \frac{n-3}{4} \\ (m+1)k+1, & \frac{n+5}{4} \leq k \leq \frac{n-1}{2} \end{cases}$$

$$f(v_{2k}) = (m+1)(n-k) + 1, 1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$$

dan

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} (m+1)n - f(v_i) - j + 1, & 1 \leq i \leq \frac{n+1}{2}, 1 \leq j \leq m \\ (m-1)n - f(v_i) - j + 2, & \frac{n+3}{2} \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Contoh 4:

Tentukan pelabelan *graceful* untuk $C_3 \odot 3K_1$.

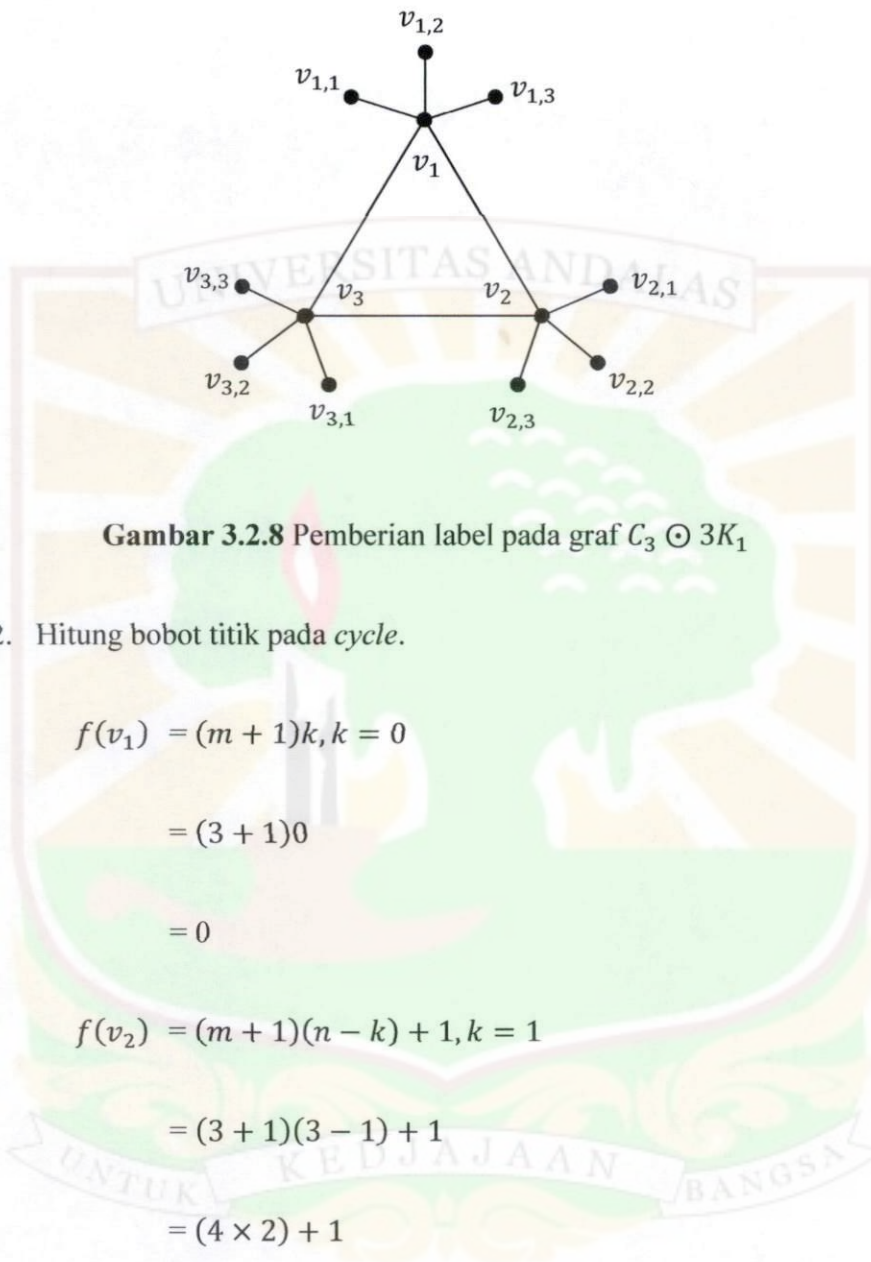
Solusi : Untuk menentukan pelabelan *graceful* untuk graf $C_3 \odot 3K_1$, dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Akan digambarkan graf $C_3 \odot 3K_1$ dengan $n = 3$ dan $m = 3$. Lalu beri

label pada setiap titiknya. Titik pada *cycle* diberi label v_1, v_2 , dan v_3 .

Sedangkan titik pada *pendant* diberi label

$v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}, v_{2,1}, v_{2,2}, v_{2,3}, v_{3,1}, v_{3,2}$, dan $v_{3,3}$.



Gambar 3.2.8 Pemberian label pada graf $C_3 \odot 3K_1$

2. Hitung bobot titik pada *cycle*.

$$f(v_1) = (m + 1)k, k = 0$$

$$= (3 + 1)0$$

$$= 0$$

$$f(v_2) = (m + 1)(n - k) + 1, k = 1$$

$$= (3 + 1)(3 - 1) + 1$$

$$= (4 \times 2) + 1$$

$$= 8 + 1$$

$$= 9$$

$$f(v_3) = (m + 1)k + 1, k = 1$$

$$= (3 + 1)1 + 1$$

$$= (4 \times 1) + 1$$

$$= 4 + 1$$

$$= 5$$

3. Hitung bobot titik pada setiap *pendant*.

$$f(v_{1,1}) = (m + 1)n - f(v_1) - j + 1, i = 1, j = 1$$

$$= (3 + 1)3 - 0 - 1 + 1$$

$$= (4 \times 3) - 0$$

$$= 12 - 0$$

$$= 12$$

$$f(v_{1,2}) = (m + 1)n - f(v_1) - j + 1, i = 1, j = 2$$

$$= (3 + 1)3 - 0 - 2 + 1$$

$$= (4 \times 3) - 1$$

$$= 12 - 1$$

$$= 11$$

$$f(v_{1,3}) = (m+1)n - f(v_1) - j + 1, i = 1, j = 3$$

$$= (3+1)3 - 0 - 3 + 1$$

$$= (4 \times 3) - 2$$

$$= 12 - 2$$

$$= 10$$

$$f(v_{2,1}) = (m+1)n - f(v_2) + 1, i = 2, j = 1$$

$$= (3+1)3 - 9 + 1$$

$$= (4 \times 3) - 9$$

$$= 12 - 9$$

$$= 3$$

$$f(v_{2,2}) = (m+1)n - f(v_2) - j + 1, i = 2, j = 2$$

$$= (3+1)3 - 9 - 2 + 1$$

$$= (4 \times 3) - 10$$

$$= 12 - 10$$

$$= 2$$

$$f(v_{2,3}) = (m+1)n - f(v_2) - j + 1, i = 2, j = 3$$

$$= (3+1)3 - 9 - 3 + 1$$

$$= (4 \times 3) - 11$$

$$= 12 - 11$$

$$= 1$$

$$f(v_{3,1}) = (m+1)n - f(v_3) - j + 2, i = 3, j = 1$$

$$= (3+1)3 - 5 - 1 + 2$$

$$= (4 \times 3) - 4$$

$$= 12 - 4$$

$$= 8$$

$$f(v_{3,2}) = (m+1)n - f(v_3) - j + 2, i = 3, j = 2$$

$$= (3+1)3 - 5 - 2 + 2$$

$$= (4 \times 3) - 5$$

$$= 12 - 5$$

$$= 7$$

$$f(v_{3,3}) = (m+1)n - f(v_3) - j + 2, i = 3, j = 3$$

$$= (3+1)3 - 5 - 3 + 2$$

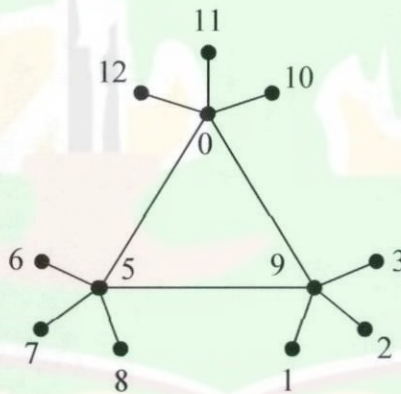
$$= (4 \times 3) - 6$$

$$= 12 - 6$$

$$= 6$$

Maka, didapat pelabelan *graceful* untuk graf $C_3 \odot 3K_1$ seperti pada Gambar

3.2.9.



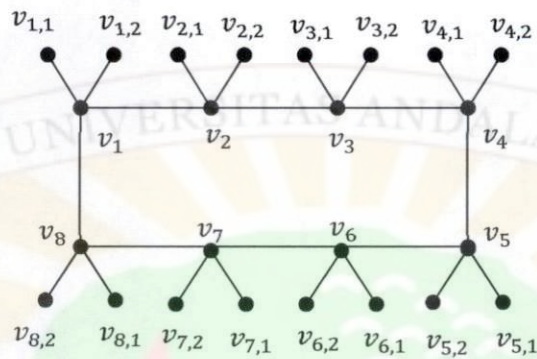
Gambar 3.2.9 Pelabelan *graceful* untuk graf $C_3 \odot 3K_1$

Dalam bentuk *array*, pelabelan *graceful* untuk graf $C_3 \odot 3K_1$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$C_3 \odot 3K_1 = \begin{cases} 0, 9, 5 \\ 10, 1, 6 \\ 11, 2, 7 \\ 12, 3, 8 \end{cases}$$

Pelabelan *graceful* untuk $C_8 \odot 2K_1$ diberikan dengan menggunakan Teorema

3 Kasus 1.



Gambar 3.2.10 Pemberian label pada graf $C_8 \odot 2K_1$

Solusi : Untuk menentukan pelabelan *graceful* untuk graf $C_8 \odot 2K_1$, dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Akan digambarkan graf $C_8 \odot 2K_1$ dengan $n = 8$ dan $m = 2$. Lalu beri label pada setiap titiknya. Titik pada *cycle* diberi label $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ dan v_8 . Sedangkan titik pada *pendant* diberi label $v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,2}, v_{3,1}, v_{3,2}, v_{4,1}, v_{4,2}, v_{5,1}, v_{5,2}, v_{6,1}, v_{6,2}, v_{7,1}, v_{7,2}, v_{8,1}$, dan $v_{8,2}$. Seperti pada Gambar 3.2.10.
2. Hitung bobot titik pada *cycle*.

$$f(v_1) = (m + 1)k, k = 0$$

$$= (2 + 1)0$$

$$= 0$$

$$f(v_2) = (m + 1)(n - k) + 1, k = 1$$

$$= (2 + 1)(8 - 1) + 1$$

$$= (3 \times 7) + 1$$

$$= 21 + 1$$

$$= 22$$

$$f(v_3) = (m + 1)k, k = 1$$

$$= (2 + 1)1$$

$$= (3 \times 1)$$

$$= 3$$

$$f(v_4) = (m + 1)(n - k) + 1, k = 2$$

$$= (2 + 1)(8 - 2) + 1$$

$$= (3 \times 6) + 1$$

$$= 18 + 1$$

$$= 19$$

$$f(v_5) = (m + 1)k + 1, k = 2$$

$$= (2 + 1)2 + 1$$

$$= (3 \times 2) + 1$$

$$= 6 + 1$$

$$= 7$$

$$f(v_6) = (m + 1)(n - k) + 1, k = 3$$

$$= (2 + 1)(8 - 3) + 1$$

$$= (3 \times 5) + 1$$

$$= 15 + 1$$

$$= 16$$

$$f(v_7) = (m + 1)k + 1, k = 3$$

$$= (2 + 1)3 + 1$$

$$= (3 \times 3) + 1$$

$$= 9 + 1$$

$$= 10$$

$$f(v_8) = (m + 1)(n - k) + 1, k = 4$$

$$= (2 + 1)(8 - 4) + 1$$

$$= (3 \times 4) + 1$$

$$= 12 + 1$$

$$= 13$$

3. Hitung bobot titik pada setiap *pendant*.

$$f(v_{1,1}) = (m + 1)n - f(v_1) - j + 1, i = 1, j = 1$$

$$= (2 + 1)8 - 0 - 1 + 1$$

$$= (3 \times 8) - 0$$

$$= 24$$

$$f(v_{1,2}) = (m + 1)n - f(v_1) - j + 1, i = 1, j = 2$$

$$= (2 + 1)8 - 0 - 2 + 1$$

$$= (3 \times 8) - 1$$

$$= 24 - 1$$

$$= 23$$

$$f(v_{2,1}) = (m + 1)n - f(v_2) - j + 1, i = 2, j = 1$$

$$= (2 + 1)8 - 22 - 1 + 1$$

$$= (3 \times 8) - 22$$

$$= 24 - 22$$

$$= 2$$

$$f(v_{2,2}) = (m+1)n - f(v_2) - j + 1, i = 2, j = 2$$

$$= (2+1)8 - 22 - 2 + 1$$

$$= (3 \times 8) - 23$$

$$= 24 - 23$$

$$= 1$$

$$f(v_{3,1}) = (m+1)n - f(v_3) - j + 1, i = 3, j = 1$$

$$= (2+1)8 - 3 - 1 + 1$$

$$= (3 \times 8) - 3$$

$$= 24 - 3$$

$$= 21$$

$$f(v_{3,2}) = (m+1)n - f(v_3) - j + 1, i = 3, j = 2$$

$$= (2+1)8 - 3 - 2 + 1$$

$$= (3 \times 8) - 4$$

$$= 24 - 4$$

$$= 20$$

$$f(v_{4,1}) = (m+1)n - f(v_4) - j + 1, i = 4, j = 1$$

$$= (2+1)8 - 19 - 1 + 1$$

$$= (3 \times 8) - 19$$

$$= 24 - 19$$

$$= 5$$

$$f(v_{4,2}) = (m+1)n - f(v_4) - j + 1, i = 4, j = 2$$

$$= (2+1)8 - 19 - 2 + 1$$

$$= (3 \times 8) - 20$$

$$= 24 - 20$$

$$= 4$$

$$f(v_{5,1}) = (m+1)n - f(v_5) - j + 2, i = 5, j = 1$$

$$= (2+1)8 - 7 - 1 + 2$$

$$= (3 \times 8) - 6$$

$$= 24 - 6$$

$$= 18$$

$$f(v_{5,2}) = (m+1)n - f(v_5) - j + 2, i = 5, j = 2$$

$$= (2+1)8 - 7 - 2 + 2$$

$$= (3 \times 8) - 7$$

$$= 24 - 7$$

$$= 17$$

$$f(v_{6,1}) = (m+1)n - f(v_6) - j + 2, i = 6, j = 1$$

$$= (2+1)8 - 16 - 1 + 2$$

$$= (3 \times 8) - 15$$

$$= 24 - 15$$

$$= 9$$

$$f(v_{6,2}) = (m+1)n - f(v_6) - j + 2, i = 6, j = 2$$

$$= (2+1)8 - 16 - 2 + 2$$

$$= (3 \times 8) - 16$$

$$= 24 - 16$$

$$= 8$$

$$f(v_{7,1}) = (m+1)n - f(v_7) - j + 2, i = 7, j = 1$$

$$= (2+1)8 - 10 - 1 + 2$$

$$= (3 \times 8) - 9$$

$$= 24 - 9$$

$$= 15$$

$$f(v_{7,2}) = (m+1)n - f(v_7) - j + 2, i = 7, j = 2$$

$$= (2+1)8 - 10 - 2 + 2$$

$$= (3 \times 8) - 10$$

$$= 24 - 10$$

$$= 14$$

$$f(v_{8,1}) = (m+1)n - f(v_8) - j + 2, i = 8, j = 1$$

$$= (2+1)8 - 13 - 1 + 2$$

$$= (3 \times 8) - 12$$

$$= 24 - 12$$

$$= 12$$

$$f(v_{8,2}) = (m+1)n - f(v_8) - j + 2, i = 8, j = 2$$

$$= (2+1)8 - 13 - 2 + 2$$

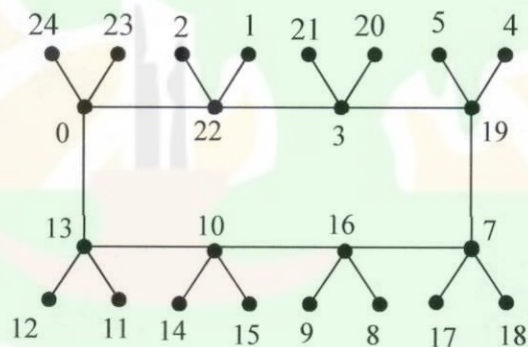
$$= (3 \times 8) - 13$$

$$= 24 - 13$$

$$= 11$$

Maka, didapat pelabelan graceful untuk graf $C_8 \odot 2K_1$ seperti pada Gambar

3.2.11.



Gambar 3.2.11 Pelabelan *graceful* pada graf $C_8 \odot 2K_1$

Dalam bentuk *array*, pelabelan *graceful* untuk graf $C_8 \odot 2K_1$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$C_8 \odot 2K_1: \begin{cases} 0, 22, 3, 19, 7, 16, 10, 13 \\ 23, 1, 20, 4, 17, 8, 14, 11 \\ 24, 2, 21, 5, 18, 9, 15, 12 \end{cases}$$

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh pada Bab III, dapat disimpulkan bahwa:

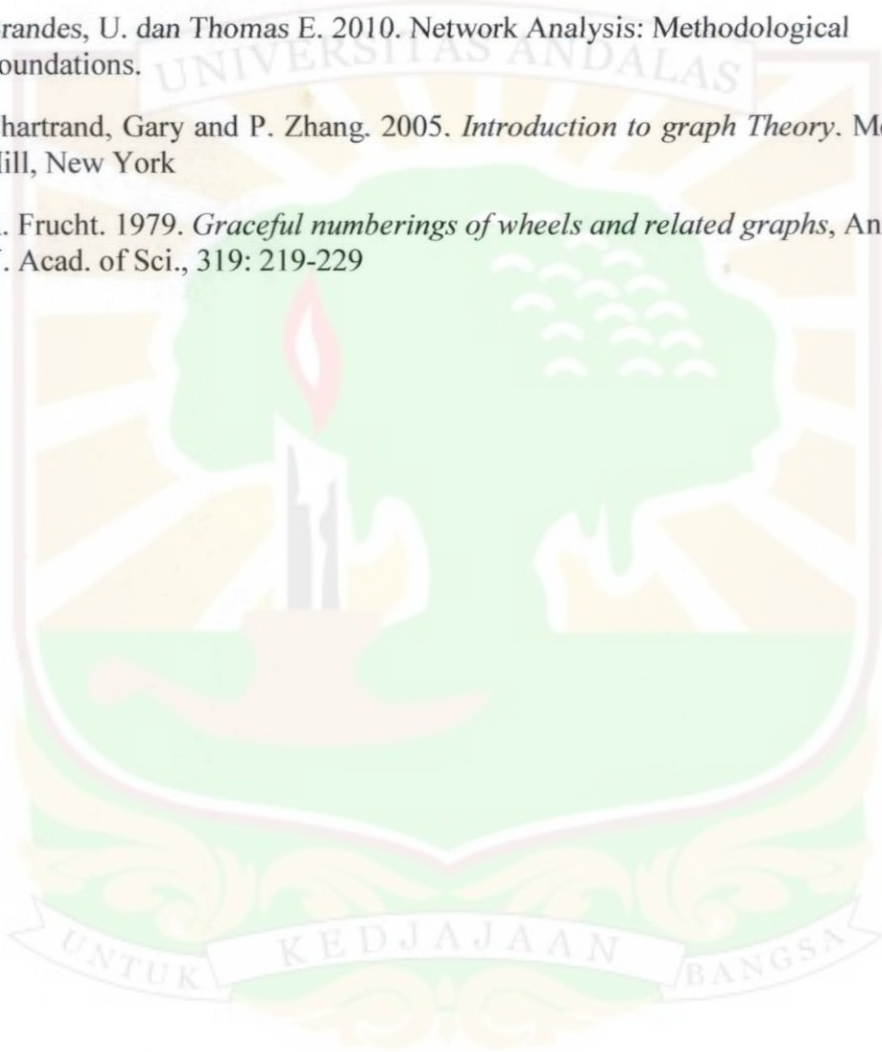
1. Graf rantai dimana semua *blocknya* adalah graf bipartit dapat diberikan pelabelan *graceful*.
2. Graf *corona* $C_n \odot mK_1$ dengan m *pendant* dimana $m \geq 1$ dan $n \geq 3$, juga dapat diberikan pelabelan *graceful*.

4.2 Saran

Karena begitu banyak pelabelan *graceful* yang belum ditemukan, maka penulis menyarankan untuk mengkaji pelabelan *graceful* pada graf lainnya, seperti graf rantai dengan semua *blocknya* merupakan graf bipartit lengkap dan graf *corona* $C_n \odot P_3$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Barrientos, C. 2002. *Graceful Labelings of Chain and corona Graphs*. Bulletin of the ICA, Vol. 34: 17-26, Spain
- [2] Bondy, J. A. dan U. S. R. Murty. 2008. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics, Springer
- [3] Brandes, U. dan Thomas E. 2010. *Network Analysis: Methodological Foundations*.
- [4] Chartrand, Gary and P. Zhang. 2005. *Introduction to graph Theory*. McGraw Hill, New York
- [5] R. Frucht. 1979. *Graceful numberings of wheels and related graphs*, Ann. N. Y. Acad. of Sci., 319: 219-229



RIWAYAT HIDUP



Penulis bernama Fitria Primadini, dilahirkan di Bukittinggi pada tanggal 5 Mei 1988 dari pasangan Editiawarman, ST dan Syafni. Penulis adalah anak pertama dari empat bersaudara. Penulis menamatkan pendidikan di SDN 10 Pakan Kurai pada tahun 2000, SMP Negeri 6 Bukittinggi pada tahun 2003, dan SMA Negeri 5 Bukittinggi pada tahun 2006. Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur Seleksi Penerimaan Mahasiswa Baru (SPMB).

Selama menjadi mahasiswa di Jurusan Matematika FMIPA Unand, penulis aktif menjadi anggota HIMATIKA FMIPA UNAND. Pada tahun 2008, penulis menjadi Koordinator Konsumsi dalam Musyawarah Nasional IX IHMSI (Ikatan Himpunan Mahasiswa Statistika Indonesia). Pada tahun 2009, penulis menjadi Koordinator Konsumsi dalam acara PSB (Pekan Seni Bermatematika). Penulis pernah diangkat menjadi Sekretaris Bidang Diplomatik HIMATIKA FMIPA UNAND periode 2009/2010. Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) pada tahun 2009 di Jorong Koto Unggan Kenagarian Unggan Kabupaten Sijunjung dalam rangka menyelesaikan salah satu mata kuliah wajib fakultas. Selama kuliah penulis juga aktif dalam paduan suara fakultas. Selain itu, penulis juga pernah menjadi anggota KPPS (kelompok Penyelenggara Pemungutan Suara) Pemilu Presiden dan Wakil Presiden tahun 2009 dan Pemilu Kepala Daerah dan Wakil Kepala Daerah Propinsi Sumatera Barat tahun 2010.

