PELABELAN TOTAL (a, d) -SISI-ANTI AJAIB PADA GRAF BINTANG

SKRIPSI

DWI NOVA RIZA
05134046

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2011

ABSTRAK

Graf bintang (*star*) S_n adalah suatu graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat $n+1$ yang disebut dengan pusat, dan n titik lain yang berderajat satu yang disebut daun.

Untuk graf $G=(V,E)$, sebuah fungsi bijeksi $g:(V(G)\cup E(G))\longrightarrow \{1,2,\dots,|V(G)|+|E(G)|\}$ disebut pelabelan total $(a,d\,)$-sisi anti ajaib dari graf G jika himpunan bobot sisi dari semua sisi di G, $w(xy)=g(x)+g(xy)+g(y), xy\in E(G)$, membentuk barisan aritmatika $W=\{a,a+d,\dots,+a(e-1)d\}$, dengan a adalah suku pertama dan d adalah selisih bobot sisi. Selanjutnya, pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib disebut pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib super jika $g\big(V(G)\big)=\{1,2,\dots,|V(G)|\}$ dan $g(E(G)=\{\,|V(G)|+1,\dots,|V(G)|+|E(G)|\}$.

Graf bintang mempunyai pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib super jika $d\in\{0,1,2\}$ dan $n\geq 1$, atau $d=3$ dan $1\leq n\leq 2$.

Kata kunci : Graf Bintang, Pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib super.

KATA PENGANTAR

Assalammu'alaikum Wr. Wb.

Puji dan syukur penulis ucapkan kepada Allah SWT atas segala limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul "**PELABELAN TOTAL (a, d)-SISI ANTI AJAIB PADA GRAF BINTANG**". Selanjutnya tak lupa shalawat dan salam penulis sampaikan kepada Nabi Besar Muhammad SAW.

Skripsi ini ditulis sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Andalas.

Penyelesaian skripsi ini tak lepas dari semua pihak yang terlibat baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu pada kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada :

1. Ibu **Dr. Lyra Yulianti** selaku Pembimbing I yang dengan sabarnya telah meluangkan banyak waktunya untuk memberikan bimbingan, membaca penulisan, petunjuk, masukan dan motivasi selama proses penyelesaian pembuatan skripsi ini sekaligus koordinator pendidikan jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas.
2. Bapak **Dr. Syafrizal Sy** selaku Pembimbing II yang telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, petunjuk, masukan, dan motivasi selama proses penyelesaian pembuatan skripsi ini sekaligus ketua jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas.
3. Bapak **Narwen, M.si** selaku penguji yang telah membaca, memberi masukan dan saran kepada penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini sekaligus

pembimbing Akademik yang telah banyak memberikan masukan dan saran dalam pengambilan mata kuliah.

4. Bapak **Effendi, M.si** dan Bapak **Zulakmal, M.Si** selaku penguji yang telah membaca, memberi masukan dan saran kepada penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.
5. Bapak dan Ibu Dosen beserta Staf jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas.
6. Keluarga tercinta yang senatiasa memberi dukungan dan semangat selama ini.
7. Teman-teman mahasiswa di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas, khususnya angkatan 2005 atas segala bantuan dan kerjasamanya.
8. Semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa tulisan ini masih mempunyai banyak kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran sangat diharapkan demi penyempurnaannya. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat dalam perkembangan ilmu matematika, khususnya di Universitas Andalas.

Wassalamu 'alaikum warahmatullahi wabarakatuh.

Padang, November 2011

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Pengaitan titik-titik pada graf membentuk sisi dan dapat dipresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola tertentu. Pola-pola yang terbentuk didefinisikan dan dikelompokkan menjadi kelas-kelas graf. Beberapa kelas graf menurut banyaknya sisi yang terkait (*incident*) terhadap titik antara lain graf reguler, yang derajat setiap titiknya adalah sama dan graf irreguler, yang derajat setiap titiknya ada yang tidak sama.

Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pelabelan tersebut pertama kali diperkenalkan oleh Sedlàček (1964), kemudian Stewart (1966), serta Kotzig dan Rosa (1970).

Secara umum, pelabelan adalah pemetaan satu-satu yang memetakan unsur himpunan titik dan atau unsur himpunan sisi ke bilangan asli yang disebut label. Pelabelan titik (*vertex labeling*) adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi (*edge labeling*) adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total (*total labeling*) adalah dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi.

Terdapat beberapa jenis pelabelan graf, diantaranya adalah pelabelan ajaib dan pelabelan anti ajaib. Jika graf memiliki bobot titik atau bobot sisi yang sama, maka graf ini disebut graf dengan pelabelan ajaib. Jika graf memiliki bobot titik atau bobot sisi yang berbeda, maka graf ini disebut graf dengan pelabelan anti ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmatika $\{a, a+d, \dots, a+(e-1)d\}$, dengan suku pertama a dan beda d, maka pelabelan tersebut dinamakan pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib.

Salah satu aplikasi pelabelan graf yang digunakan saat ini adalah dalam pengkodean pada radar dan peluru kendali. Dalam perang di dunia modern ini penggunaan peluru kendali sudah tidak asing lagi. Penggunaan peluru kendali mengurangi perang secara fisik dalam jarak dekat, karena peluru kendali dapat diluncurkan dari jarak jauh. Dalam peluncurannya perlu diperhitungkan secara matang agar tepat sasaran. Untuk mengantisipasi kedatangan peluru kendali dari pihak musuh, peluru kendali ini dapat dideteksi dengan menggunakan pendeteksi sinyal radar, sehingga dapat dilakukan antisipasi secepat mungkin. Desain penting dari kode nonperiodik untuk sinyal radar dan peluru kendali ini sama dengan pelabelan pada graf bintang, dimana setiap titik yang terhubung dengan titik pusat dihubungkan dengan satu sisi yang mempunyai label yang selalu berbeda. Label sisi ini menggambarkan jarak antar titik, sedangkan titiknya merupakan posisi pada saat sinyal dikirimkan [3].

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah bagaimana cara menentukan pelabelan total (a, d)-sisi-anti ajaib pada suatu graf, dimana a adalah bobot sisi minimum dan d adalah selisih bobot sisi.

1.3 Pembatasan Masalah

Pada tulisan ini, permasalahan dibatasi pada pelabelan total (a, d)-sisi-anti ajaib untuk graf bintang S_n dengan $n + 1$ titik.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan dalam penulisan tugas akhir ini adalah menunjukkan bahwa graf bintang S_n dapat dilabeli dengan pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib dengan batasan $d \leq 3$.

1.5 Sistematika Penulisan

Bab I berisikan pendahuluan yang didalamnya tercakup latar belakang, permasalahan, pembatasan masalah, tujuan dan sistematika penulisan tugas akhir ini. Konsep dasar dari teori graf berupa definisi, pengertian pelabelan total (a, d) - sisi-anti ajaib, serta beberapa definisi dan lema pendukung yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan tugas akhir ini disajikan pada Bab II sebagai landasan teori. Kemudian, pembahasan dari permasalahan tersebut akan diuraikan pada Bab III, yaitu pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib pada graf bintang S_n. Penulisan tugas akhir ini diakhiri dengan bagian kesimpulan yang disajikan pada Bab IV.

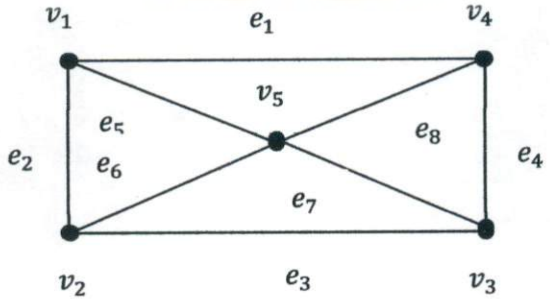
BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas beberapa konsep dasar dan istilah dalam graf serta notasi yang akan digunakan pada bab-bab selanjutnya. Semua konsep dikutip dari [4]. Bahasan pada bab ini adalah pendefinisian graf, graf bintang, pelabelan graf dan beberapa definisi serta lema pendukung.

2.1 Definisi Graf

Suatu **graf** G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan $G = (V, E)$, dimana V adalah himpunan tak kosong dan E adalah himpunan pasangan tak terurut dari elemen-elemen V. Elemen-elemen dari V disebut **titik** (*vertex*) dari G dan elemen-elemen dari E disebut **sisi** (*edge*) dari G. Himpunan titik dari G dinotasikan dengan $V(G)$ sedangkan himpunan sisi dari G dinotasikan dengan $E(G)$. Jadi graf G yang terdiri dari n titik dan m sisi memberikan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ di mana $e_i = v_j, v_k$ untuk $v_j, v_k \in V(G), j \neq k$ dan $j, k \in \{1,2, \dots,, m\}$. Banyaknya titik yang ada pada graf G adalah $v = |V(G)|$, dan disebut **orde** (*order*) dari G, sedangkan banyaknya sisi pada graf G adalah $e = |E(G)|$, dan disebut **ukuran** (*size*) dari G, sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 2.1.1.

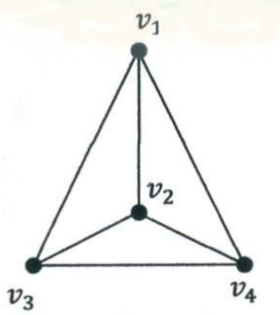


Gambar 2.1.1 Graf G_1

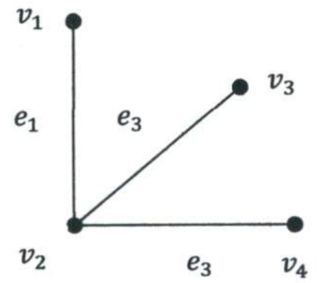
Gambar 2.1.1 menunjukkan sebuah graf, misal graf G_1 yang mempunyai titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$. Jadi $|V(G)| = 5$ dan $|E(G)| = 8$.

Misalkan v_i dan v_j adalah titik pada graf G untuk suatu i dan j tertentu, $i \neq j$. Titik v_i dikatakan **bertetangga** (***adjacent***) dengan v_j bila terdapat sebuah sisi yang menghubungkan v_i dan v_j . Misalkan $e = (v_i v_j)$, maka e dikatakan **terkait** (***incident***) dengan v_i dan v_j. Pada Gambar 2.1.1, titik v_1 bertetangga dengan v_2,v_4 dan v_5, tetapi v_1 tidak bertetangga dengan v_3, sementara sisi e_1 terkait dengan v_1 dan v_4.

Derajat (*degree*) dari titik x di G adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik x, dinotasikan dengan $d(x)$. Jika $d(x) = 0$, maka x dikatakan **titik terisolasi**. **Derajat minimum** dari G, dinotasikan dengan $\delta(G)$, adalah derajat terkecil dari titik-titik di G, sedangkan derajat terbesarnya disebut **derajat maksimum** dari G, dinotasikan dengan $\Delta(G)$. Jika setiap titik mempunyai derajat yang sama maka graf G disebut **graf regular**. Sebuah graf G dikatakan **r-regular** atau regular dengan derajat r, jika setiap titik pada graf Gmempunyai derajat r. Sebagai contoh, graf G pada gambar 2.1.2 adalah graf 3-regular.



Gambar 2.1.2 Graf 3-regular G_2

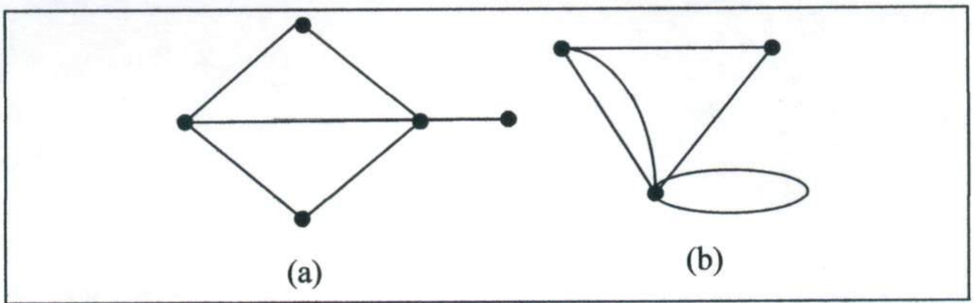


Gambar 2.1.3 Graf G_3

Graf G_3 pada gambar 2.1.3 adalah sebuah graf dengan titik- titik v_1, v_2, v_3 dan v_4, di mana $d(v_2) = 3$ dan $d(v_1) = d(v_3) = d(v_4) = 1$. Maka dapat dilihat bahwa $\delta(G) = 1$ dan $\Delta(G) = 3$.

Jalan (*walk*) dengan panjang k adalah barisan $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$, di mana $v_i \in V(G)$ dan $e_j \in E(G)$ untuk $i = 0, 1, \dots, k$ dan $j = 1, 2, \dots, k$ yang terdiri dari titik dan sisi di G. **Panjang** (*length*) dari jalan adalah banyaknya sisi dari barisan tersebut. **Jalur** (*trail*) adalah jalan di mana tidak ada sisi yang berulang. **Lintasan** (*path*) adalah jalan dimana tidak ada titik yang berulang. Jalan dikatakan **tertutup** jika memiliki panjang dengan titik akhir yang sama. Lintasan tertutup dinamakan juga **siklus** (*cycle*).

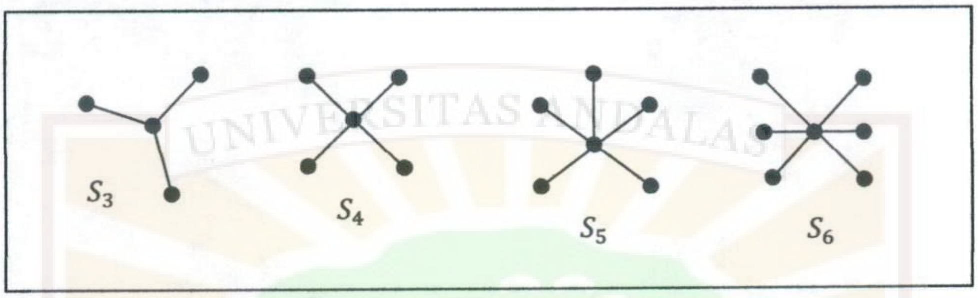
Dua atau lebih sisi-sisi yang saling menghubungkan sepasang titik disebut **sisi ganda** (***multiple edge***). Sementara sisi yang menghubungkan suatu titik dengan titik itu sendiri disebut **loop**. Graf yang dikaji pada tulisan ini adalah **graf sederhana**, yaitu graf yang tidak memuat loop dan sisi ganda.



Gambar 2.1.4 (a) Graf sederhana, (b) Graf yang memuat sisi ganda

2.2 Graf Bintang (Star)

Graf bintang (*star*) S_n adalah suatu graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat $n + 1$ yang disebut dengan pusat, dan n titik lain yang berderajat satu yang disebut daun.



Gambar 2.3.1 Graf Bintang

2. 3 Pelabelan Graf

Pelabelan pada suatu graf adalah sebarang pemetaan atau fungsi yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan bulat positif. Domain dari pemetaan tersebut dapat berupa himpunan semua titik atau himpunan semua sisi, atau himpunan semua titik dan sisi. Berdasarkan domainnya, pelabelan berturut-turut disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), pelabelan sisi (*edge labeling*) dan pelabelan total (*total labeling*).

Jumlah label titik dan label semua sisi yang menempel pada titik tersebut disebut **bobot titik (*vertex-weight*)**. Jumlah label sisi dan label dua titik yang menempel pada sisi disebut **bobot sisi (*edge-weight*)**.

Jika graf memiliki bobot titik atau bobot sisi yang sama, maka graf ini disebut **graf dengan pelabelan ajaib** atau dinamakan juga **graf ajaib**. Jika graf memiliki bobot titik atau bobot sisi yang berbeda, maka graf ini disebut **graf**

dengan pelabelan anti ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmatika $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{d}, \ldots, \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{e} - \mathbf{1})\boldsymbol{d}\}$, dengan suku pertama a dan selisih bobot sisi d maka pelabelan tersebut disebut **pelabelan total (a,d)-sisi-anti ajaib.**

Misal $G = (V, E)$ dengan $|V(G)| = v$ dan $|E(G)| = e$. Berikut adalah beberapa jenis pelabelan (a, d)-anti ajaib pada G, yang dikutip dari [1] :

a) **Pelabelan sisi $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})$-titik anti ajaib (*Vertex-antimagic edge labeling*)**

   Graf G dikatakan mempunyai pelabelan sisi (a, d) titik anti ajaib jika terdapat bilangan bulat $a > 0$, $d \geq 0$ dan $f_1 \colon E(G) \to \{1,2, \ldots, e\}$, sedemikian sehingga himpunan bobot titik dari G notasikan $W_1 = \{w(v) |\, w(v) = \sum f_1(uv),\ uv \in E(G)\}$ dapat ditulis sebagai $W_1 = \{a, a + d, \ldots, a + (v - 1)d\}$ untuk suatu $a > 0$, dan $d \geq 0$.

b) **Pelabelan total $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})$-titik anti ajaib (*Vertex-antimagic total labeling*)**

   Sebuah fungsi bijeksi $f_2 : V(G) \cup E(G) \to \{1,2, \ldots, v + e\}$ dikatakan pelabelan total titik-anti ajaib pada graf G jika himpunan bobot titik untuk semua titik di G, $W_2 = \{w(x) |\, w(x) = f_2(x) + \sum f_x(xy),\ xy \in E(G)\}$ dapat dituliskansebagai $W_2 = \{a, a + d, \ldots, a(v - 1)d\}$, untuk suatu $a > 0$, dan $d \geq 0$.

c) **Pelabelan titik $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})$- sisi anti ajaib (*Edge-antimagic vertex labeling*)**

   Graf G dikatakan mempunyai pelabelan titik (a, d)-sisi anti ajaib jika terdapat $f_3 \colon V(G) \to \{1,2, \ldots, v\}$ sedemikian sehingga himpunan bobot sisi untuk semua sisi di G, $W_3 = w(uv) |\, w(uv) = f_3(u) + f_3(v),\ u, v\ \in V(G)\}$, dapat ditulis sebagai $W_3 = \{a, a+d, a+d, \ldots, a+(e-1)d\}$, untuk suatu $a > 0$ dan $d \geq 0$.

d) **Pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib (*Edge-antimagic total labeling*)**

Pelabelan total sisi anti ajaib dari graf V, E didefinisikan sebagai pemetaan satu-satu $f_4 : V(G) \cup E(G) \longrightarrow \{1, 2, \ldots, v, v+1, \ldots, v+e\}$, sedemikian sehingga himpunan bobot sisi $W_4 = w(uv) | \, w(uv) = f_4(u) + f_4(uv) + f_4(v), uv \in E(G)\}$ himpunan bobot sisi dapat ditulis sebagai $W_4 = \{a, a+d, a+2d, \ldots, a+(e-1)d\}$, untuk suatu $a > 0$ dan $d \geq 0$.

2.4 Definisi dan Lema pendukung

Definisi 2.4.1 [2] *Sebuah fungsi bijeksi* $g: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2, \ldots, v+e\}$ *disebut* ***pelabelan total (a,d)-sisi-anti ajaib*** *dari graf G jika himpunan bobot sisi dari semua sisi di G, notasikan W ,dapat ditulis sebagai* $W = \{a, a+d, \ldots a+(e-1)d\}$, *untuk bilangan bulat* $a > 0$ *dan* $d \geq 0$.

Pelabelan total (a, d)-sisi-anti ajaib g disebut ***pelabelan total (a, d) sisi anti ajaib super*** *jika* $g(V(G)) = \{1,2, \ldots v\}$ *dan* $g(E(G)) = \{v+1, v+2, \ldots, v+e\}$.

Lema 2.4.2 [2] *Misalkan terdapat barisan* $\mathfrak{A} = \{c, c+1, c+2, \ldots c+k\}$, *untuk suatu k genap. Maka terdapat suatu permutasi* $\Pi(\mathfrak{A})$ *dari elemen* $\mathfrak{A}$ *sehingga* $\mathfrak{A} + \Pi(\mathfrak{A}) = \{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, 2c + \frac{k}{2} + 2, \ldots, 2c + \frac{3k}{2} - 1, 2c + \frac{3k}{2}\}$.

Bukti :

Misalkan terdapat barisan $\mathfrak{A} = \{a_i | a_i = c + (i-1), 1 \leq i \leq k+1\}$, dengan k genap. Didefinisikan $\Pi(\mathfrak{A}) = \{b_i | k \leq i \leq 1\}$ di mana elemen-elemen dari $\mathfrak{A}$ didefinisikan sebagai berikut :

$$b_i = \begin{cases} c + \frac{k}{2} + \frac{i-1}{2}, & \text{jika } i \text{ ganjil}, \quad 1 \leq i \leq k+1 \\ c + k + \frac{2-i}{2}, & \text{jika } i \text{ genap}, \quad 2 \leq i \leq k \end{cases}$$

- Untuk i ganjil,

$$a_i + b_i = c + (i-1) + c + \frac{k}{2} + \frac{1-i}{2}$$

$$= 2c + \frac{k}{2} + \frac{i-1}{2}$$

Untuk $i = 1, 3, \dots, k-1, k+1$, diperoleh

$$\mathfrak{A} + \prod(\mathfrak{A}) = \left\{2c + \frac{k}{2} + \frac{1-1}{2}, 2c + \frac{k}{2} + \frac{3-1}{2}, \dots\dots, 2c + \frac{k}{2} + \frac{k-1-1}{2}, 2c + \frac{k}{2} + \frac{(k+1-1)}{2}\right\}$$

$$= \left\{2c + \frac{k}{2},\ 2c + \frac{k}{2} + 1, \dots\dots, 2c + \frac{2k}{2} - 1, 2c + \frac{2k}{2}\right\}$$

- Untuk i genap

$$a_i + b_i = c + (i-1) + c + k + \frac{2-i}{2}$$

$$= 2c + k + \frac{i}{2} \qquad \dots (2.4.1)$$

Untuk $i = 2, 4, \dots, k-2, k$

$$\mathfrak{A} + \prod(\mathfrak{A}) = \left\{2c + k + \frac{2}{2}, 2c + k + \frac{4}{2}, \dots\dots, 2c + k + \frac{k-2}{2}, 2c + k + \frac{k}{2}\right\}$$

$$= \left\{2c + k + 1, 2c + k + 2, \dots\dots, 2c + \frac{3k}{2} - 1, 2c + \frac{3k}{2}\right\} \qquad \dots (2.4.2)$$

Dari persamaan (2.4.1) dan persamaan (2.4.2), diperoleh

$$\mathfrak{A} + \prod(\mathfrak{A}) = \{a_i + b_i | 1 \leq i \leq k\} = \left\{c + \frac{k}{2} + \frac{i-1}{2} \middle| i\ ganjil, 1 \leq i \leq k+1\right\} \cup$$

$$\left\{c + k + \frac{2-i}{2} \mid i\ genap, 2 \leq i \leq k\right\}$$

$$= \left\{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, \ldots\ldots, 2c + \frac{2k}{2} - 1, 2c + \frac{2k}{2}\right\} \cup \left\{2c + k + 1, 2c + k + 2, \ldots\ldots, 2c + \frac{3k}{2} - 1, 2c + \frac{3k}{2}\right\}$$

$$= \left\{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, 2c + \frac{k}{2} + 2, \ldots, 2c + \frac{3k}{2} - 1, 2c + \frac{3k}{2}\right\}. \quad \blacksquare$$

Lema 2.4.3 [2] *Misalkan terdapat barisan* $\mathfrak{P} = \{c, c+1, c+2, \ldots, c + \frac{k-3}{2}, c + \frac{k-1}{2}, c + \frac{k+3}{2}, c + \frac{k+5}{2}, \ldots, c + k + 1\}$, *untuk suatu* k *ganjil. Maka terdapat sebuah barisan bilangan bulat* $\mathfrak{R} = \{1, 2, 3, \ldots, k+1\}$ *sehingga barisan* $\mathfrak{P} + \mathfrak{R}$ *terdiri dari bilangan bulat terurut.*

Bukti :

Misalkan k ganjil, $k \geq 1$ dan $\mathfrak{B} = \{p_i |\ p_i = c - 1 + i, 1 \leq i \leq \frac{(k+1)}{2}\} \cup \{p_i \mid p_i = c + i, \frac{(k+3)}{2} \leq i \leq k+1\}$. Pembuktian dibedakan menjadi tiga kasus.

1. ***Kasus 1***: $\boldsymbol{k + 1 \equiv 2\ (mod\ 6)}$

   Untuk $k \geq 1$ definisikan barisan $\mathfrak{R} = \{r_i | 1 \leq i \leq k+1\}$ sebagai berikut:

$$r_i = \begin{cases} k + 1 - 2i, & \text{jika } i \equiv 1\ (mod\ 3) \text{ dan } 1 \leq i < \frac{k-1}{2} \\ k + 1 - 2i, & \text{jika } i \equiv 2\ (mod\ 3) \text{ dan } 2 \leq i < \frac{k-1}{2} \\ k + 4 - 2i, & \text{jika } i \equiv 0\ (mod\ 3) \text{ dan } 3 \leq i \leq \frac{k-1}{2} \end{cases}$$

$$r_i = \begin{cases} k+1, & \text{jika } \quad i = \dfrac{k+1}{2} \\ k, & \text{jika } \quad i = \dfrac{k+3}{2} \end{cases}$$

$$r_i = \begin{cases} 2k+1-2i, & \text{jika } \quad i \equiv 0 \ (mod\ 3) \quad \text{dan } \frac{k+5}{2} \leq i \leq k-1 \\ 2k+1-2i, & \text{jika } \quad i \equiv 1 (mod\ 3) \quad \text{dan } \frac{k+7}{2} \leq i \leq k \\ 2k+4-2i, & \text{jika } \quad i \equiv 2 (mod\ 3) \quad \text{dan } \frac{k+9}{2} \leq i \leq k+1 \end{cases}$$

2. ***Kasus 2:*** $\boldsymbol{k + 1 \equiv 4 \ (mod\ 6)}$

Untuk $k \geq 3$, gunakan barisan berikut $\mathfrak{R} = \{ r_i \mid 1 \leq i \leq k+1\}$

$$r_i = \begin{cases} k\,, & \text{jika } \quad i = 1 \\ k+1, & \text{jika } \quad i = \dfrac{k+1}{2} \end{cases}$$

$$r_i = \begin{cases} k+4-2i, & \text{jika } i \equiv 1 (mod\ 3) \ \text{dan } \ 4 \leq i \leq \dfrac{k-1}{2} \\ k+1-2i, & \text{jika } \ i \equiv 2 \ (mod\ 3) \ \text{dan } \ 2 \leq i \leq \dfrac{k-1}{2} \\ k+1-2i, & \text{jika } \ i \equiv 0 \ (mod\ 3) \ \text{dan } \ 3 \leq i \leq \dfrac{k-1}{2} \end{cases}$$

$$r_i = \begin{cases} 2k+4-2i, & \text{jika } \quad i \equiv 1 \ (mod\ 3) \quad \text{dan } \frac{k+5}{2} \leq i \leq k+1 \\ 2k+1-2i, & \text{jika } \quad i \equiv 2 \ (mod\ 3) \quad \text{dan } \frac{k+7}{2} \leq i \leq k-1 \\ 2k+1-2i, & \text{jika } \quad i \equiv 0 \ (mod\ 3) \quad \text{dan } \frac{k+3}{2} \leq i \leq k \end{cases}$$

3. ***Kasus 3 :*** $\boldsymbol{k + 1 \equiv 0 \ (mod\ 6)}$

Untuk $k \geq 5$, dikonstruksikan barisan $\mathfrak{R} = \{ r_i \mid 1 \leq i \leq k+1 \}$ dengan cara berikut:

$$r_i = \begin{cases} k, & \text{jika } i = 1 \\ k-2, & \text{jika } i = 2 \\ k+1, & \text{jika } i = \dfrac{k+1}{2} \\ k-3, & \text{jika } i = \dfrac{k+3}{2} \\ k-1, & \text{jika } i = \dfrac{k+5}{2} \\ k-4, & \text{jika } i = \dfrac{k+7}{2} \end{cases}$$

$$r_i = \begin{cases} k+1-2i & \text{jika } i \equiv 1 (mod\ 3) \text{ dan } 4 \le i < \frac{k-1}{2} \\ k+4-2i & \text{jika } i \equiv 2 (mod\ 3) \text{ dan } 5 \le i < \frac{k-1}{2} \\ k+1-2i & \text{jika } i \equiv 0\ (mod\ 3) \text{ dan } 3 \le i < \frac{k-1}{2} \end{cases}$$

$$r_i = \begin{cases} 2k+1-2i & \text{jika } i \equiv 1 (mod\ 3) \text{ dan } \dfrac{k+9}{2} \le i \le k-1 \\ 2k+1-2 & \text{jika } i \equiv 2 (mod\ 3) \text{ dan } \dfrac{k+11}{2} \le i \le k \\ 2k+4-2i & \text{jika } i \equiv 0 (mod\ 3) \text{ dan } \dfrac{k+13}{2} \le i \le k+1 \end{cases}$$

Dapat disimpulkan bahwa untuk semua kasus, barisan $\mathfrak{B} + \mathfrak{R}$ terdiri dari bilangan bulat berurutan. ■

Contoh 1 :

Misalkan diberikan $k = 15$, maka $\mathfrak{B} = \{c, c+1, c+2, .., c+6, c+7, c+8, c+9, c+10, \dots, c+16\}$ dan $\mathfrak{R} = \{1, 2, \dots, 16\}$, sehingga $\mathfrak{B} + \mathfrak{R}$ terdiri dari bilangan bulat terurut.

Karena $k = 15$, maka dapat ditulis $k + 1 \equiv 4\ (mod\ 6)$. Sehingga pada contoh ini digunakan pembuktian Lema 2.5.3, bagian kasus 2.

Kasus 2 : $k + 1 \equiv 4\ (mod\ 6)$

$\Rightarrow 15 + 1 \equiv 4\ (mod\ 6)$

$\mathfrak{B} = \{\, p_i |\ p_i\ = c - 1 + i, 1 \leq i \leq \frac{(k+1)}{2}\} \cup \{\, p_i \mid p_i\ = c + i,$

$\frac{(k+3)}{2} \leq i\ \leq k + 1\}\,.$

$\mathfrak{R} = \{r_i | 1 \leq i \leq 16\}$

Dengan $k + 1 = 16$ diperoleh r_i sebagai berikut :

$$r_i = \begin{cases} 15 & \text{jika } i = 1 \\ 16 & \text{jika } i = 8 \end{cases}$$

$$r_i = \begin{cases} 19 - 2i, & i \equiv 1\ (mod\ 3) \text{ dan } 4 \leq i \leq 7 \\ 16 - 2i, & i \equiv 2\ (mod\ 3) \text{ dan } 2 \leq i \leq 7 \\ 16 - 2i, & i \equiv 0\ (mod\ 3) \text{ dan } 3 \leq i \leq 7 \end{cases} \qquad \ldots(\,2.4.3)$$

Persamaan (2.4.3) diuraikan menjadi :

- $r_i = 19 - 2i,\ i \equiv 1\ (mod\ 3);\ \ 4 \leq i \leq 7$

  $r_i = 5, 11$ untuk $i = 4, 7$

- $r_i = 16 - 2i,\ i \equiv 2\ (mod\ 3);\ 2 \leq i \leq 7$

  $r_i = 6$ untuk $i = 5$

- $r_i = 16 - 2i,\ i \equiv 0\ (mod\ 3);\ 3 \leq i \leq 7$

  $r_i = 4, 10$ untuk $i = 3, 6$

$$r_i = \begin{cases} 34 - 2i, & i \equiv 1\ (mod\ 3) \text{ dan } 10 \leq i \leq 16 \\ 31 - 2i, & i \equiv 2\ (mod\ 3) \text{ dan } 11 \leq i \leq 15 \\ 31 - 2i, & i \equiv 0\ (mod\ 3) \text{ dan } 9 \leq i \leq 15 \end{cases}$$

- $r_i = 34 - 2i,\ i \equiv 1\ (mod\ 3);\ 10 \leq i \leq 16$

  $r_i = 2{,}8$ untuk $i = 13, 16$

- $r_i = 31 - 2i,\ \ i \equiv 2\ (mod\ 3);\ 11 \leq i \leq 15$

  $r_i = 3$ untuk $i = 14$

- $r_i = 31 - 2i,\ \ i \equiv 0\ (mod\ 3)\ dan\ 9 \leq i \leq 15$

- $r_i = 1{,}7{,}13$ untuk $i = 9, 12, 15$

Jadi diperoleh $\mathfrak{B} + \mathfrak{R} = \{1, 2, 3, \dots, 16\}$.

BAB III

PELABELAN TOTAL (a, d) SISI ANTI AJAIB PADA GRAF BINTANG

Pada bab ini akan dijelaskan tentang pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib pada graf bintang S_n, untuk $n \geq 1$.

Misalkan x_0 adalah titik pusat dan x_i , $1 \leq i \leq n$, adalah daun S_n, $n \geq 1$. Pertama-tama diberikan batas atas untuk parameter d pada pelabelan total (a, d)-sisi-anti ajaib super terhadap graf bintang S_n.

Teorema 3.1 *Jika graf bintang* $S_n, n \geq 1$ *adalah pelabelan total* (a, d)*-sisi-anti ajaib super maka* $d \leq 3$.

Bukti :

Misalkan terdapat pemetaan bijeksi $g : V(S_n) \cup E(S_n) \to \{1,2, \dots ,2n + 1\}$ yang merupakan pelabelan total (a, d) sisi anti ajaib super. Misal $W=\{w(xy) \mid w(xy)=g(x)+g(y)+g(xy),\ xy \in E(S_n)\}=\{a,\ a+d,\ a+2d, \dots,\ a+(n-1)d\}$ adalah himpunan bobot sisi. Bobot sisi minimum yang mungkin untuk graf bintang S_n diperoleh dengan cara :

- Titik pusat x_0 diberi label $g(x_0) = 1$, salah satu titik pada daun, misalkan x_i, diberi label $g(x_i) = 2$ sementara sisi x_0x_i diberi label $g(x_0x_i) = n + 2$, untuk suatu $i, 1 \leq i \leq n$. Maka diperoleh :

$$w_i = g(x_0) + g(x_0x_i) + g(x_i)$$

$$= 1 + 2 + (n + 2)$$

$$= n + 5$$

sehingga :

$$n + 5 \leq a \qquad \dots (3.1)$$

Selanjutnya, bobot sisi maksimum diperoleh dengan cara :

- Titik pusat x_0 dilabeli dengan $g(x_0) = n + 1$, titik lain, misalkan x_j dilabeli dengan $g(x_j) = n$ sementara sisi $x_0 x_j$ diberi label $g(x_0 x_j) = 2n + 1$, untuk suatu $j, 1 \leq j \leq n$. Maka diperoleh

$$w_j = g(x_0) + g(x_0 x_j) + g(x_j)$$

$$= (n + 1) + n + (2n + 1)$$

$$= 4n + 2$$

sehingga

$$a + (n - 1)d \leq 4n + 2 \qquad \dots (3.2)$$

Dari pertaksamaan (3.1) dan pertaksamaan (3.2), diperoleh :

$$(n + 5) + (n - 1)d \leq a + (n - 1)d \leq 4n + 2$$

$$\Leftrightarrow (n - 1)d \leq 4n + 2 - (n + 5)$$

$$\Leftrightarrow (n - 1)d \leq 3n - 3$$

$$\Leftrightarrow d \leq \frac{3n-3}{(n-1)}$$

$$\Leftrightarrow d \leq \frac{3(n - 1)}{(n - 1)}$$

$$\Leftrightarrow d \leq 3. \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.2 *Graf bintang $S_n, n \geq 1$ mempunyai pelabelan titik $(a, 1)$-sisi-anti ajaib.*

Bukti :

Misalkan $f: V(S_n) \longrightarrow \{1, 2, \dots, n+1\}$ adalah pelabelan titik dari graf S_n. Bobot sisi untuk setiap sisi $e_i = x_0 x_i$, adalah $w(e_i) = f(x_0) + f(x_i)$, untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$. Himpunan bobot sisi, namakan W adalah $\{a, a+1, \dots, a+(n-1)\}$ jika dan hanya jika nilai $f(x_i)$, untuk $1 \leq i \leq n$ adalah bilangan bulat berurutan. Misalkan label dari titik pusat $f(x_0) = 1$ atau $f(x_0) = n+1$, maka diperoleh dua kemungkinan himpunan bobot sisi, yaitu :

i. Jika $f(x_0) = 1$ dan $f(x_i) = \{2, 3, \dots, n+1\}$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ maka diperoleh

$$w(e_i) = f(x_0) + f(x_i)$$

$$= 1 + j, \; untuk \; j \in \{2, 3, \dots, n+1\},$$

dan

$$W = \{w(e_i) | i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$= \{3, 4, \dots, n+2\}$$

ii. Jika $f(x_0) = n+1$ dan $f(x_i) = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ maka diperoleh

$$w(e_i) = f(x_0) + f(x_i)$$

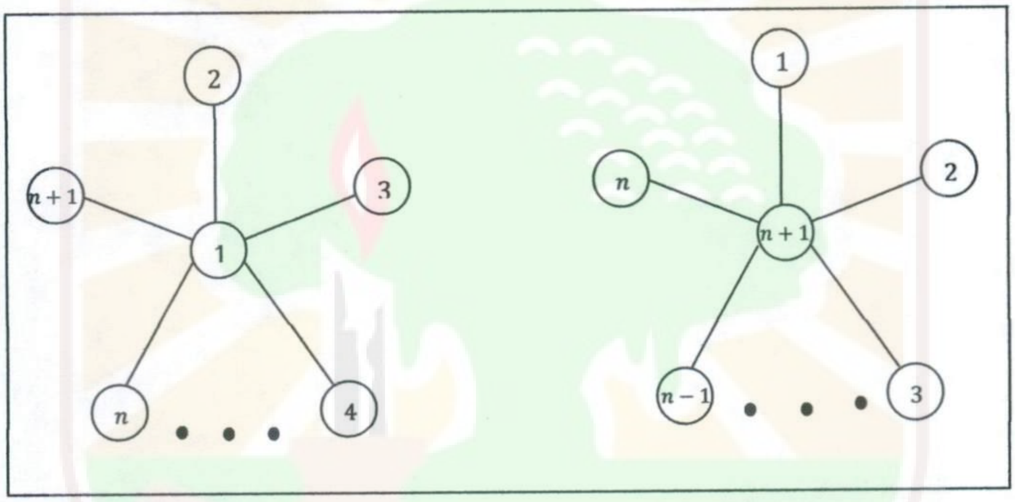
$$= (n+1) + i, \quad untuk \; i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

dan

$$W = \{w(e_i)|i = 1,2,\dots,n\}$$

$$= \{n+2, n+3, \dots, 2n+1\}$$

Dapat disimpulkan bahwa jika label titik pusat $f(x_0) = 1$, maka himpunan bobot sisi $W = \{3,4,\dots,n+2\}$, sementara jika label titik pusat $f(x_0) = n+1$, maka himpunan bobot sisi yang diperoleh adalah $W = \{n+2, n+3, \dots, 2n+1\}$. Sehingga graf bintang S_n mempunyai pelabelan titik (3,1)-sisi anti ajaib atau pelabelan titik $(n+2,1)$-sisi anti ajaib. ■



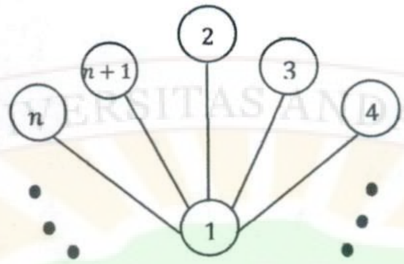
Gambar 3.1 Pelabelan titik $(a, 1)$ sisi anti ajaib pada graf bintang S_n

Teorema 3.3 *Graf bintang S_n, $n \geq 1$ mempunyai pelabelan total $(a, 0)$-sisi-anti ajaib super dan pelabelan total $(a, 2)$-sisi-anti ajaib super.*

Bukti :

Misalkan digunakan pelabelan titik $(3,1)$-sisi anti ajaib atau $(n+2,1)$-sisi-anti ajaib dari Teorema 3.2. Karena yang akan dikonstruksi adalah pelabelan super, maka label untuk himpunan bobot sisi adalah $\{n+2, n+3, \dots, 2n+1\}$. Maka diperoleh :

(a) Berdasarkan pelabelan titik $(3, 1)$-sisi anti ajaib seperti pada bukti Teorema 3.2 bagian (i), diperoleh himpunan bobot sisi $\{3, 4, \dots, n+2\}$. Pada pelabelan tersebut titik pusat x_0 dilabeli dengan $g(x_0) = 1$ dan titik-titik pada daun dilabeli berturut-turut dengan $\{2, 3, \dots, n+1\}$, seperti pada gambar berikut :

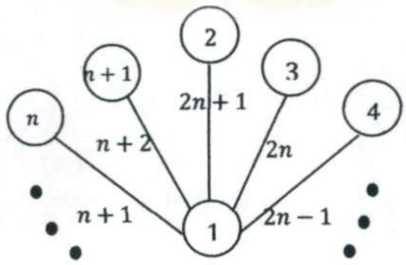


Gambar 3.2 Graf bintang S_n

Untuk mendapatkan pelabelan total super, diberikan himpunan label sisi $\{n+2,\ n+3, \dots, 2n+1\}$, dengan syarat label terkecil $n+2$, diberikan pada sisi dengan jumlah label titik terbesar, yaitu $2n+1$, seperti dalam tabel berikut :

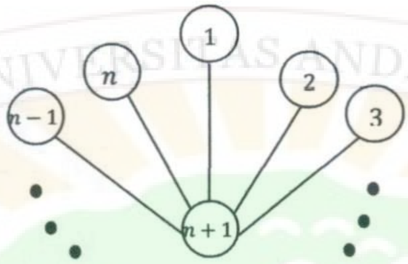
Titik ke-	Bobot sisi
1	$3 + (2n+1) = 2n+4$
2	$4 + 2n = 2n+4$
$\vdots$	$\vdots$
n	$(n+2) + (n+2) = 2n+4$

Tabel 3.1 Pelabelan total $(2n+4, 0)$-sisi anti ajaib super



Gambar 3. 3 Pelabelan total $(2n+4, 0)$-sisi anti ajaib super pada graf S_n

Berdasarkan pelabelan titik $(3, 1)$-sisi anti ajaib seperti pada bukti Teorema 3.2 bagian (ii), diperoleh himpunan bobot sisi $\{n + 2, n + 3, \dots, 2n + 1\}$. Pada pelabelan tersebut, titik pusat x_0 dilabeli dengan $g(x_0) = n + 1$ dan titik-titik pada daun dilabeli berturut-turut dengan $\{1, 2, \dots, n\}$, seperti pada gambar berikut :



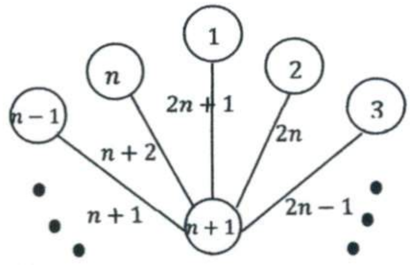
Gambar 3. 4 Graf bintang S_n

Untuk mendapatkan pelabelan total super, diberikan himpunan label sisi $\{n + 2,\ n + 3, \dots, 2n + 1\}$, dengan syarat label terkecil $n + 2$, diberikan pada sisi dengan jumlah label titik terbesar, yaitu $2n + 1$, seperti dalam tabel berikut :

Titik ke-	Bobot sisi
1	$(n + 2) + (2n + 1) = 3n + 3$
2	$(n + 3) + 2n = 3n + 3$
$\vdots$	$\vdots$
n	$(2n + 1) + (n + 2) = 3n + 3$

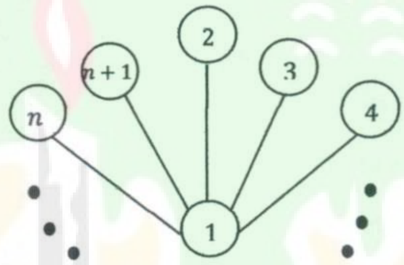
Tabel 3.2 Pelabelan total $(3n + 3, 0)$-sisi anti ajaib super

Jadi, dari kedua tabel diatas didapatkan bahwa graf bintang S_n, dengan $n \geq 1$ mempunyai pelabelan total super $(2n + 4, 0)$-sisi anti ajaib atau pelabelan total super $(3n + 3, 0)$ -sisi anti ajaib dengan selisih bobot sisi masing-masing adalah 0. Pelabelan tersebut dapat juga dikatakan pelabelan ajaib.



Gambar 3. 5 Pelabelan total $(3n+3, 0)$-sisi anti ajaib super pada graf S_n

(b) Berdasarkan pelabelan titik $(3, 1)$-sisi anti ajaib seperti pada bukti Teorema 3.2 bagian (i), diperoleh himpunan bobot sisi $\{3, 4, \dots, n+2\}$. pada pelabelan tersebut, titik pusat x_0 dilabeli dengan $g(x_0) = 1$ dan titik-titik pada daun dilabeli berturut-turut dengan $\{2, 3, \dots, n+1\}$, seperti pada gambar berikut :

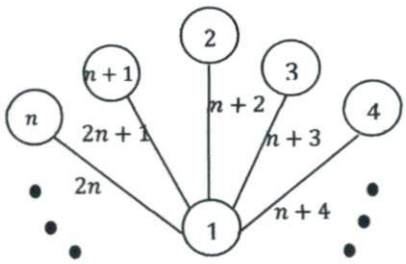


Gambar 3.6 Graf Bintang S_n

Untuk mendapatkan pelabelan total super, diberikan himpunan label sisi $\{n+2,\ n+3, \dots, 2n+1\}$, dengan syarat label terkecil $n+2$, diberikan pada sisi dengan jumlah label titik terkecil, yaitu 3, seperti dalam tabel berikut :

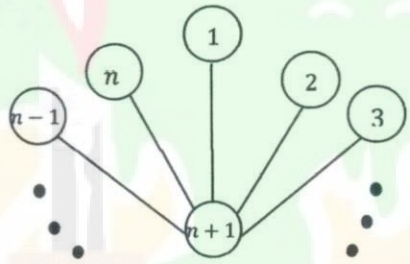
Titik ke-	Bobot sisi
1	$3 + (n+2) = n+5$
2	$4 + (n+3) = n+7$
$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$(n+2) + 2n = 3n+1$
n	$(n+2) + (2n+1) = 3n+3$

Tabel 3.3 Pelabelan total $(n+5, 2)$-sisi anti ajaib super



Gambar 3.7 Pelabelan total $(n+5,2)$-sisi anti ajaib super pada graf S_n

Berdasarkan pelabelan titik (3,1)-sisi anti ajaib seperti pada bukti Teorema 3.2 bagian (ii), diperoleh himpunan bobot sisi $\{n+2, n+3, \dots, 2n+1\}$. Pada pelabelan tersebut, titik pusat x_0 dilabeli dengan $g(x_0) = n+1$ dan titik-titik pada daun dilabeli berturut-turu dengan $\{1, 2, \dots, n\}$, seperti pada gambar berikut :

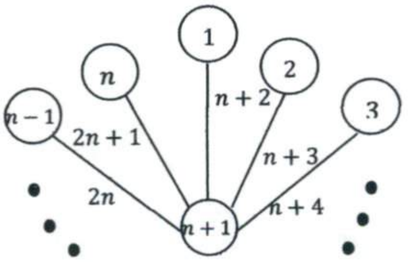


Gambar 3.8 Graf bintang S_n

Untuk mendapatkan pelabelan total super, diberikan himpunan label sisi $\{n+2,\ n+3, \dots, 2n+1\}$, dengan syarat label terkecil $n+2$, diberikan pada sisi dengan jumlah label titik terkecil, yaitu $n+2$, seperti dalam tabel berikut:

Titik ke-	Bobot sisi
1	$(n+2)+(n+2)=2n+4$
2	$(n+3)+(n+3)=2n+6$
$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$2n+2n=4n$
n	$(2n+1)+(2n+1)=3n+3$

Tabel 3.4 Pelabelan total $(2n+4,2)$-sisi anti ajaib super

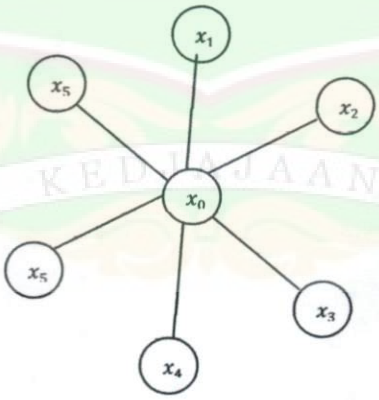


Gambar 3.9 Pelabelan total $(2n+4,2)$-sisi anti ajaib super pada graf S_n

Jadi, dari kedua tabel diatas didapatkan bahwa graf bintang S_n, dengan $n \geq 1$ mempunyai pelabelan total super $(n+5,2)$-sisi anti ajaib atau pelabelan total super $(2n+4,2)$ -sisi anti ajaib dengan selisih bobot sisi masing-masing adalah 2. ■

Contoh 1:

Akan ditentukan pelabelan total $(16,0)$-sisi anti ajaib super pada graf bintang S_6. Misal $V(S_6) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ dan $E(S_6) = \{x_0x_i | 1 \leq i \leq 6\}$. Karena pelabelan yang diberikan adalah pelabelan total, maka himpunan label titik adalah$M = \{1,2,\dots,7\}$ dan himpunan label sisi sisi adalah $N = \{8,9,\dots,13\}$.



Gambar 3.10 Graf bintang S_6

Langkah –langkah pelabelan pada graf bintang S_6 sebagai berikut :

a. Berikan pengaitan $f: V(S_6) \rightarrow \{1, 2, \dots, 7\}$ berdasarkan bukti Teorema 3.2 bagian (i).

   - $f(x_0) = 1$,
   - $f(x_1) = 2$,
   - $f(x_2) = 3$,
   - $f(x_3) = 4$,
   - $f(x_4) = 5$,
   - $f(x_5) = 6$,
   - $f(x_6) = 7$.

b. Labeli sisi-sisi dengan cara sebagai berikut :

   - Pandang pelabelan titik pada bagian a.
   - Bobot sisi pada pelabelan titik tersebut adalah $w(x_0x_i) = f(x_0) + f(x_i)$, untuk setiap $i = 1, 2, \dots, 6$. Untuk melengkapi pelabelan menjadi pelabelan total, dilakukan cara sebagai berikut, untuk sisi (x_0x_i) dengan bobot sisi $w(x_0x_i)$ terkecil, berikan label sisi yang bernilai terbesar.

   $w(x_0x_1) = f(x_0) + f(x_1)$

   $= 1 + 2 = 3$,

   $w(x_0x_2) = f(x_0) + f(x_2)$

   $= 1 + 3 = 4$,

   $w(x_0x_3) = f(x_0) + f(x_3)$

   $= 1 + 4 = 5$,

   $w(x_0x_4) = f(x_0) + f(x_4)$

   $= 1 + 5 = 6$,

$$w(x_0x_5) = f(x_0) + f(x_5)$$

$$= 1 + 6 = 7,$$

$$w(x_0x_6) = f(x_0) + f(x_6)$$

$$= 1 + 7 = 8.$$

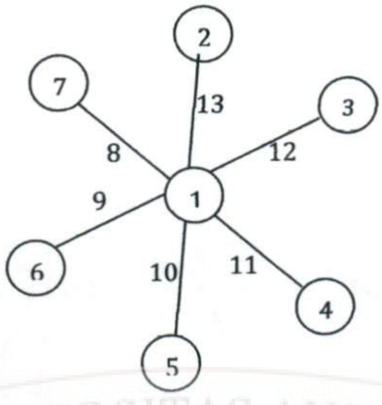
Diperoleh bahwa bobot sisi terkecil adalah $w(x_0x_1) = 3$ maka haruslah :

- $f(x_0x_1) = 13,$
- $f(x_0x_2) = 12,$
- $f(x_0x_3) = 11,$
- $f(x_0x_4) = 10,$
- $f(x_0x_5) = 9,$
- $f(x_0x_6) = 8.$

c. Diperoleh bobot sisi untuk setiap sisi pada pelabelan total tersebut, diperoleh bobot sisi sebagai berikut :

- $w_1 = f(x_0) + f(x_0x_1) + f(x_1) = 1 + 13 + 2 = 16,$
- $w_2 = f(x_0) + f(x_0x_2) + f(x_2) = 1 + 12 + 3 = 16,$
- $w_3 = f(x_0) + f(x_0x_3) + f(x_3) = 1 + 11 + 4 = 16,$
- $w_4 = f(x_0) + f(x_0x_4) + f(x_4) = 1 + 10 + 5 = 16,$
- $w_5 = f(x_0) + f(x_0x_5) + f(x_5) = 1 + 9 + 6 = 16,$
- $w_6 = f(x_0) + f(x_0x_6) + f(x_6) = 1 + 8 + 7 = 16.$

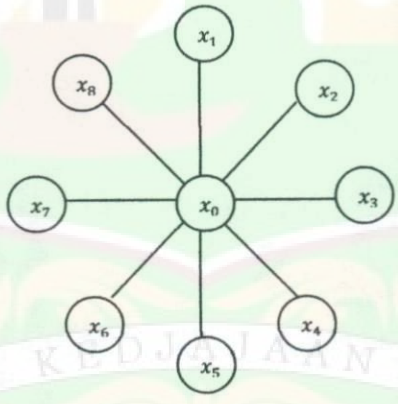
Sehingga himpunan bobot sisi graf bintang $S_{6,}$ $W = \{16, 16, \dots, 16\}$. Karena selisih bobot sisi $d = 0$, maka pelabelan ini dapat juga dikatakan pelabelan ajaib.



Gambar 3.11 Pelabelan total $(16, 0)$-sisi anti ajaib super pada graf bintang S_6

Contoh 2 :

Akan ditentukan pelabelan total $(20, 1)$-sisi anti ajaib super pada graf bintang S_8. Misal $V(S_8) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_8\}$ dan $E(S_8) = \{x_0 x_i | 1 \leq i \leq 8\}$. Karena pelabelan yang diberikan adalah pelabelan total, maka himpunan label titik adalah$M = \{1, 2, \dots, 9\}$ dan himpunan label sisi sisi adalah $N = \{10, 11, \dots, 17\}$.



Gambar 3.12 Graf bintang S_8

Langkah –langkah pelabelan pada graf bintang S_8 sebagai berikut :

a. Berikan pengaitan $f: V(S_8) \rightarrow \{1, 2, \ldots, 9\}$ berdasarkan bukti Teorema 3.2 bagian (ii).

- $f(x_0) = 9,$
- $f(x_1) = 1,$
- $f(x_2) = 2,$
- $f(x_3) = 3,$
- $f(x_4) = 4,$
- $f(x_5) = 5,$
- $f(x_6) = 6,$
- $f(x_7) = 7,$
- $f(x_8) = 8.$

b. Labeli sisi-sisi dengan cara sebagai berikut :

➢ Pandang pelabelan titik pada bagian a.

➢ Bobot sisi pada pelabelan titik tersebut adalah $w(x_0x_i) = f(x_0) + f(x_i)$, untuk setiap $i = 1,2, \ldots, 8$. Untuk melengkapi pelabelan menjadi pelabelan total, dilakukan cara sebagai berikut, untuk sisi x_0x_i dengan bobot sisi $w(x_0x_i)$ terkecil, berikan label sisi yang bernilai kecil.

$$
\begin{aligned}
w(x_0x_1) &= f(x_0) + f(x_1) \\
&= 9 + 1 = 10, \\
w(x_0x_1) &= f(x_0) + f(x_1) \\
&= 9 + 2 = 11, \\
&\vdots \\
w(x_0x_8) &= f(x_0) + f(x_8) \\
&= 9 + 8 = 17.
\end{aligned}
$$

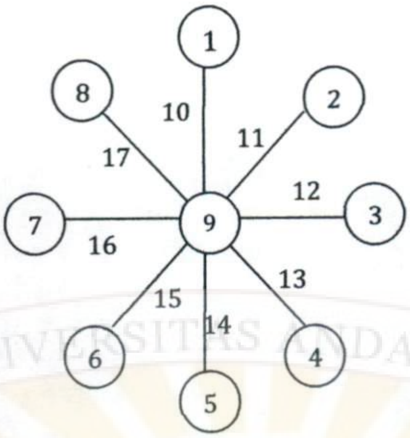
Diperoleh bahwa bobot sisi terkecil adalah $w(x_0x_1) = 10$ maka haruslah :

- $f(x_0x_1) = 10$,
- $f(x_0x_2) = 11$,
- $f(x_0x_3) = 12$,
- $f(x_0x_4) = 13$,
- $f(x_0x_5) = 14$,
- $f(x_0x_6) = 15$,
- $f(x_0x_7) = 16$,
- $f(x_0x_8) = 17$.

c. Diperoleh bobot sisi untuk setiap sisi pada pelabelan total tersebut, diperoleh bobot sisi sebagai berikut :

- $w_1 = f(x_0) + f(x_0x_1) + f(x_1) = 9 + 10 + 1 = 20$,
- $w_2 = f(x_0) + f(x_0x_2) + f(x_2) = 9 + 11 + 2 = 22$,
- $w_3 = f(x_0) + f(x_0x_3) + f(x_3) = 9 + 12 + 3 = 24$,
- $w_4 = f(x_0) + f(x_0x_4) + f(x_4) = 9 + 13 + 4 = 26$,
- $w_5 = f(x_0) + f(x_0x_5) + f(x_5) = 9 + 14 + 5 = 28$,
- $w_6 = f(x_0) + f(x_0x_6) + f(x_6) = 9 + 15 + 6 = 30$,
- $w_7 = f(x_0) + f(x_0x_6) + f(x_7) = 9 + 16 + 7 = 32$,
- $w_8 = f(x_0) + f(x_0x_6) + f(x_8) = 9 + 17 + 8 = 34$.

Sehingga himpunan bobot sisi graf bintang $S_{8,}$ $W = \{20, 22, \dots, 34\}$.



Gambar 3.13 Pelabelan total $(20, 2)$-sisi anti ajaib super pada graf bintang S_8

Teorema 3.4 *Graf bintang* $S_n, n \geq 1$ *mempunyai pelabelan total* $(a, 1)$*-sisi-anti ajaib super.*

Bukti :

Pembuktian dibagi menjadi dua kasus.

Kasus 1: Banyaknya daun, n ganjil.

Misalkan pelabelan yang digunakan adalah pelabelan titik $(3, 1)$-sisi anti ajaib atau pelabelan titik $(n + 2, 1)$-sisi anti ajaib pada Teorema 3.2. Himpunan bobot sisi membentuk barisan $\mathfrak{A} = \{c, c + 1, c + 2, \ldots, c + k\}$ untuk $c = 3$ atau $c = n + 2$ dan $k = n - 1$. Berdasarkan Lema 2.4.2 terdapat permutasi $\Pi(\mathfrak{A})$ dari elemen-elemen dari $\mathfrak{A}$, sedemikian sehingga

$\mathfrak{A} + [\Pi(\mathfrak{A}) - c + n + 2]$

$= [\mathfrak{A} + \Pi(\mathfrak{A})] - c + n + 2$

$$= \left\{2c + \frac{k}{2},\ 2c + \frac{k}{2} + 1,\ 2c + \frac{k}{2} + 2, \ldots., 2c + \frac{3k}{2} - 1, 2 + \frac{3k}{2}\right\} - c + n + 1$$

$$= \left\{2c + \frac{n-1}{2},\ 2c + \frac{n-1}{2} + 1,\ 2c + \frac{n-1}{2} + 2, \ldots, 2c + \frac{3(n-1)}{2} - 1,\ 2 + \frac{3(n-1)}{2}\right\} -$$

$$c + n + 2$$

$$= \left\{2c + \frac{n-1}{2} - c + n + 2,\ 2c + \frac{n-1}{2} + 1 - c + n + 2, 2c + \frac{n-1}{2} + 2 - c + n + 2,\right.$$

$$\left. \ldots, 2c + \frac{3(n-1)}{2} - 1 - c + n + 2,\ 2 + \frac{3(n-1)}{2} - c + n + 2\right\}$$

$$= \left\{2c - c + \frac{n-1}{2} + n + 2,\ 2c - c + \frac{n-1}{2} + 1 + n + 2,\ 2c - c + \frac{n-1}{2} + 2 + n +\right.$$

$$\left. 2, \ldots, 2c - c + \frac{3(n-1)}{2} - 1 + n + 2,\ 2c + -c + \frac{3(n-1)}{2} n + 2\right\}$$

$$= \left\{c + \frac{n-1+2n+4}{2}, c + \frac{n-1+2n+6}{2}, c + \frac{n-1+2n+8}{2}, \ldots, c + \frac{3n-3+2n+2}{2},\right.$$

$$\left. c + \frac{3n-3+2n+4}{2}\right\}$$

$$= \left\{c + \frac{3n+3}{2},\ c + \frac{3n+5}{2},\ c + \frac{3n+7}{2}, \ldots,\ c + \frac{5n-1}{2},\ c + \frac{5n+1}{2}\right\}$$

$$= \left\{c + \frac{3n+1}{2} + \frac{2}{2},\ c + \frac{3n+1}{2} + \frac{4}{2},\ c + \frac{3n+1}{2} + \frac{6}{2}, \ldots,\ c + \frac{5n+1}{2} - \frac{2}{2},\ c + \frac{5n+1}{2}\right\}$$

$$= \left\{c + \frac{3n+1}{2} + 1,\ c + \frac{3n+1}{2} + 2, \ldots,\ c + \frac{5n+1}{2} - 1,\ c + \frac{5n+1}{2}\right\}.$$

Berikan label untuk sisi-sisi S_n dengan $[\Pi(\mathfrak{A}) - c + n + 2]$ maka $\mathfrak{A} + [\Pi(\mathfrak{A}) - c + n + 2]$ merupakan himpunan bobot sisi S_n. Maka diperoleh bahwa pelabelan total tersebut adalah pelabelan total (a, d)-sisi-anti ajaib super untuk $a = c + \frac{3n+1}{2}$ +1 dan $c = 3$ atau $c = n + 2$.

Kasus 2 : Banyaknya daun n genap.

Konstruksikan pelabelan titik $f: V(S_n) \to \{1,2,\dots,n\}$ sebagai berikut :

$$f(x_0) = \frac{n}{2} + 1$$

$$f(x_i) = \begin{cases} i, & \text{jika } 1 \le i \le \frac{n}{2} \\ i+1, & \text{jika } \frac{n}{2} + 1 \le i \le n \end{cases}$$

Maka diperoleh himpunan bobot sisi dari semua sisi di S_n, terhadap pelabelan titik f adalah $\mathfrak{P} = \{c,\ c+1,\ c+2, \dots, c + \frac{k-3}{2},\ c + \frac{k-1}{2},\ c + \frac{k+3}{2}, c + \frac{k+5}{2}, \dots, c + k + 1\}$ dimana $c = \frac{n}{2} + 2$ dan $k = n - 1$.

Berdasarkan Lema 2.4.3, diperoleh bahwa terdapat barisan bilangan bulat terurut $\mathfrak{R} = \{1, 2, 3, \dots, k+1\}$ sedemikian sehingga $\mathfrak{P} + [\mathfrak{R} + n + 1]$ terdiri dari bilangan bulat berurutan. Jika $[\mathfrak{R} + n + 1]$ adalah himpunan label sisi dari S_n, maka $\mathfrak{P} + [\mathfrak{R} + n + 1]$ adalah himpunan bobot sisi dari S_n, dan dapat dilihat bahwa pelabelan total untuk S_n merupakan $(a, 1)$ – sisi-anti ajaib super. ■

Untuk melengkapi karakteristik pelabelan total (a, d)-sisi –anti ajaib super dari S_n , sekarang akan dilihat kasus $d = 3$.

Teorema 3.5 *Untuk graf bintang S_n , $n \ge 3$, tidak terdapat pelabelan total $(a, 3)$-sisi-anti ajaib super.*

Bukti :

Misalkan S_n , $n \geq 1$, adalah graf total $(a, 3)$-sisi anti ajaib super dengan pelabelan total $g: V(S_n) \cup E(S_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2n+1\}$. Dalam perhitungan bobot sisi S_n, label titik pusat x_0, digunakan sebanyak n kali, label semua titik dan label semua sisi digunakan tepat satu kali. Sehingga diperoleh :

$$\sum_{i=1}^{n+1} i + (n-1)g(x_0) + \sum_{j=1}^{n} (n+1+j) = \sum_{j=1}^{n} (a + 3(j-1)) \qquad \dots (3.3)$$

Maka diperoleh :

- $\sum_{i=1}^{n+1} i = 1 + 2 + \cdots + n + (n+1)$

  $= \frac{n+1}{2}(2+n)$

  $= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad \dots (3.4)$

- $\sum_{j=1}^{n} (n+1+j) = (n+1+1) + (n+1+2) + \cdots + (n+1+n)$

  $= (n+2) + (n+3) + \cdots + (2n+1)$

  $= \left(\frac{(2n+1)+(n+2)}{2}\right) n$

  $= \left(\frac{3n+3}{2}\right) n \qquad \dots (3.5)$

- $\sum_{j=1}^{n} (a + 3(j-1) = (a + 3(1-1) + (a + 3(2-1) + \cdots + (a + 3(n-1)$

  $= (a+0) + (a+3) + \cdots + (a + 3(n-1))$

  $= a + (a+3) + \cdots + (a + 3(n-1))$

  $= \frac{n}{2}(2a + 3n - 3) \qquad \dots (3.6)$

Subtitusi persamaan (3.4), (3.5) dan (3.6) ke persamaan (3.3), diperoleh :

$$\sum_{i=1}^{n=1} i + (n-1)g(x_0) + \sum_{j=1}^{n}(n+1+j) = \sum_{j=1}^{n}(a+3(j-1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\frac{n+1}{2}\right)(n+2) + (n-1)g(x_0)\right) + \frac{n}{2}(3n+3) = \frac{n}{2}(2a+3n-3)$$

$$\Leftrightarrow (n+1)(n+2) + 2(n-1)g(x_0) + n(3n+3) = n(2a+3n-3)$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 3n + 2 + 2(n-1)g(x_0) + 3n^2 + 3n = 2an + 3n^2 - 3n$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 3n^2 + 3n + 3n + 2 + 2(n-1)g(x_0) = 2an + 3n^2 - 3n$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 - 3n^2 + 6n + 3n + 2 + 2(n-1)g(x_0) = 2an$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 9n + 2 + 2(n-1)g(x_0) = 2an. \qquad \text{... (3.7)}$$

Kemungkinan bobot sisi minimum adalah $a = n + 3 + g(x_0)$ jika $g(x_0) > 1$ dan $a = n + 5$ jika $g(x_0) = 1$. Dari persamaan (3.7) didapatkan :

$$n^2 + 9n + 2 + 2(n-1)g(x_0) \geq 2n(g(x_0) + n + 3) \qquad \text{... (3.8)}$$

Dan kemudian

$$n^2 - 3n - 2 + 2g(x_0) \leq 0 \qquad \text{... (3.9)}$$

Dapat dilihat bahwa (3.9) mempunyai solusi rill, jika diskriminan besar atau sama dengan nol . Dalam hal ini diskriminan adalah :

$$\Leftrightarrow 3^2 - 4(1(-2 + 2g(x_0)) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 9 + 8 - 8g(x_0) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 17 - 8g(x_0) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -8g(x_0) \geq -17$$

$$\Leftrightarrow g(x_0) \leq \frac{17}{8}.$$

Jadi persamaan (3.9) mempunyai solusi rill jika $g(x_0) \leq \frac{17}{8}$. Karena label g adalah bilangan bulat, maka $g(x_0) \in \{1,2\}$.

Kasus (1).

Jika $g(x_0) = 1$, maka dari persamaan (3.7) diperoleh :

$$\Leftrightarrow n^2 + 9n + 2 + 2(n-1)g(x_0) = 2an$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 9n + 2 + 2(n-1)1 = 2an$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 9n + 2 + 2n - 2 = 2an$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 11n - 2an = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n(11 - 2a) = 0$$

$$n(n + 11 - 2a) = 0 \qquad \text{... (3.10)}$$

Dari persamaan (3.10) diatas diperoleh :

$$n = 0 \quad atau \quad n = 2a - 11.$$

Karena $n \neq 0$, maka untuk kasus $g(x_0) = 1$, haruslah $n = 2a - 11$. Karena untuk $g(x_0) = 1,\ a = n + 5$, maka haruslah :

$n = 2(n + 5) - 11$

$\Leftrightarrow n = 1$

Kasus (2).

Jadi jika $g(x_0) = 1$ maka dari (3.7) diperoleh $n \leq 1$.

Jika $g(x_0) = 2,$ maka dari persamaan (3.8) diperoleh :

$\Leftrightarrow n^2 + 9n + 2 + 2(n-1)g(x_0) \geq 2n(g(x_0) + n + 3)$

$\Leftrightarrow n^2 + 9n + 2 + 2(n-1)2 \geq 2n(2 + n + 3)$

$\Leftrightarrow n^2 + 9n + 2 + 4n + 4 \geq 2n(n + 5)$

$\Leftrightarrow n^2 + 13n - 2 \geq 10n + 2n^2$

$\Leftrightarrow n^2 - 3n + 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (n-1)(n-2) \leq 0$ ... (3.11)

Nilai n yang memenuhi pertaksamaan (3.11) adalah $1 \leq n \leq 2$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa persamaan (3.3) hanya dipenuhi oleh $n = 1$ dan $n = 2$. Jadi pemisalan bahwa $S_n, n \geq 1$ adalah graf dengan pelabelan total $(a, 3)$-sisi anti ajaib super adalah salah. Untuk $n = 1$ dan $n = 2$, pelabelan total $(a, 3)$-sisi anti ajaib super dapat dilihat pada gambar 3.14 dan gambar 3.15 berikut :

Gambar 3.14 Pelabelan total (6,3)-sisi anti ajaib super pada graf bintang S_1

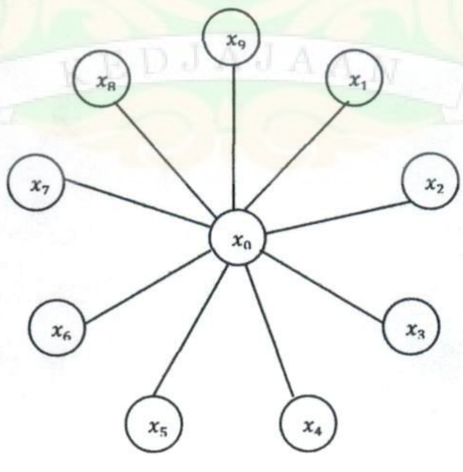
Jelas bahwa S_1 mempunyai pelabelan total (6,3)-sisi anti ajaib super dengan $g_1(x_0) = 1,\ g_1(x_1) = 2$ dan $g_1(x_0 g_1) = 3$.

Dalam kasus $n = 2$, label $g_2(x_0) = 2,\ g_2(x_1) = 1,\ g_2(x_2) = 3,\ g_2(x_0 x_1) = 4$ dan $g_2(x_0 x_2) = 5$. Maka pelabelan g_2 adalah total super (7,3)-sisi anti ajaib. ■

Gambar 3.15 Pelabelan total (7,3)-sisi anti ajaib super pada graf bintang S_2

Contoh 3: [M. Bača & M. Miller : 2008]

Akan ditentukan pelabelan total (26,1)-sisi anti ajaib super pada graf bintang S_9. Misal $V(S_9) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$ dan $E(S_9) = \{x_0 x_i | 1 \leq i \leq 9\}$. Karena pelabelan yang diberikan adalah pelabelan total, maka himpunan label titik adalah $M = \{1, 2, \ldots, 10\}$ dan himpunan label sisi sisi adalah $N = \{11, 12, \ldots, 19\}$.



Gambar 3.16 Graf bintang S_9

Langkah –langkah pelabelan pada graf bintang S_9 sebagai berikut :

a. Berikan pengaitan $f: V(S_9) \to \{1, 2, \dots, 10\}$ berdasarkan bukti Teorema 3.2 bagian (ii).

   - $f(x_0) = 10$,
   - $f(x_1) = 9$,
   - $f(x_2) = 1$,
   - $f(x_3) = 2$,
   - $f(x_4) = 3$,
   - $f(x_5) = 4$,
   - $f(x_6) = 5$,
   - $f(x_7) = 6$,
   - $f(x_8) = 7$,
   - $f(x_9) = 8$.

b. Labeli sisi-sisi dengan cara sebagai berikut :

   - Pandang pelabelan titik pada bagian a.
   - Bobot sisi pada pelabelan titik tersebut adalah $w(x_0x_i) = f(x_0) + f(x_i)$, untuk setiap $i = 1, 2, \dots, 9$. Untuk melengkapi pelabelan menjadi pelabelan total, dilakukan cara sebagai berikut, untuk sisi x_0x_i dengan bobot sisi $w(x_0x_i)$ genap terkecil, berikan label sisi yang bernilai terbesar.

     $w(x_0x_1) = f(x_0) + f(x_1)$

     $= 10 + 9 = 19$,

     $w(x_0x_2) = f(x_0) + f(x_2)$

     $= 10 + 1 = 11$,

$\vdots$

$$w(x_0x_9) = f(x_0) + f(x_9)$$

$$= 10 + 8 = 18.$$

Diperoleh bahwa bobot sisi terkecil adalah $w(x_0x_1) = 19$ maka haruslah :

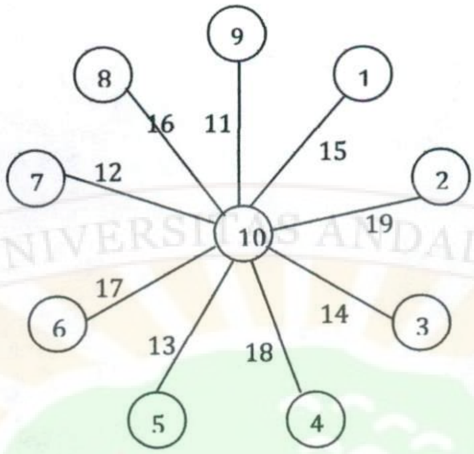
- $f(x_0x_1) = 11,$
- $f(x_0x_2) = 15,$
- $f(x_0x_3) = 19,$
- $f(x_0x_4) = 14,$
- $f(x_0x_5) = 18,$
- $f(x_0x_6) = 13,$
- $f(x_0x_7) = 17,$
- $f(x_0x_8) = 12,$
- $f(x_0x_9) = 16.$

c. Diperoleh bobot sisi untuk setiap sisi pada pelabelan total tersebut, diperoleh bobot sisi sebaga berikut :

- $w_1 = f(x_0) + f(x_0x_1) + f(x_1) = 10 + 11 + 9 = 30,$
- $w_2 = f(x_0) + f(x_0x_2) + f(x_2) = 10 + 15 + 1 = 26,$
- $w_3 = f(x_0) + f(x_0x_3) + f(x_3) = 10 + 19 + 2 = 31,$
- $w_4 = f(x_0) + f(x_0x_4) + f(x_4) = 10 + 14 + 3 = 27,$
- $w_5 = f(x_0) + f(x_0x_5) + f(x_5) = 10 + 18 + 4 = 32,$
- $w_6 = f(x_0) + f(x_0x_6) + f(x_6) = 10 + 13 + 5 = 28,$
- $w_7 = f(x_0) + f(x_0x_6) + f(x_7) = 10 + 17 + 6 = 33,$
- $w_8 = f(x_0) + f(x_0x_6) + f(x_8) = 10 + 12 + 7 = 29,$

- $w_9 = f(x_0) + f(x_0x_6) + f(x_9) = 10 + 16 + 8 = 34.$

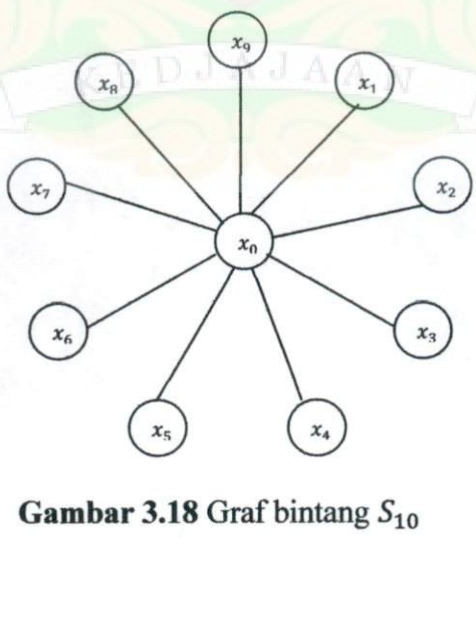
Sehingga himpunan bobot sisi graf S_9 , $W = \{26, 27, \dots, 34\}$.



Gambar 3.17 Pelabelan total $(26, 1)$-sisi anti ajaib super pada graf bintang S_9

Contoh 4: [M. Bača & M. Miller : 2008]

Akan ditentukan pelabelan total $(24,1)$-sisi anti ajaib super pada graf bintang S_{10}. Misal $V(S_{10}) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}\}$ dan $E(S_{10}) = \{x_0x_i | 1 \leq i \leq 10\}$. Karena pelabelan yang diberikan pelabelan total, maka himpunan label titik, misal M, adalah $M = \{1, 2, \dots, 11\}$ dan himpunan label sisi sisi, misal N, adalah $N = \{12, 13, \dots, 21\}$.



Gambar 3.18 Graf bintang S_{10}

Langkah –langkah pelabelan pada graf bintang S_{10} sebagai berikut :

a. Berikan pengaitan $f: V(S_{10}) \rightarrow \{1, 2, \dots, 11\}$ berdasarkan bukti Teorema 3.2 bagian (ii).

- $f(x_0) = 6,$
- $f(x_1) = 1,$
- $f(x_2) = 2,$
- $f(x_3) = 3,$
- $f(x_4) = 4,$
- $f(x_5) = 5,$
- $f(x_6) = 6,$
- $f(x_7) = 7,$
- $f(x_8) = 8,$
- $f(x_9) = 9,$
- $f(x_9) = 10,$
- $f(x_{10}) = 11.$

b. Labeli sisi-sisi dengan cara sebagai berikut :

➢ pandang pelabelan titik pada bagian a.

➢ Bobot sisi pada pelabelan titik tersebut adalah $w(x_0 x_i) = f(x_0) + f(x_i)$, untuk setiap $i = 1,2, \dots, 10$. Untuk melengkapi pelabelan menjadi pelabelan menjadi pelabelan total, dilakukan cara sebagai berikut, untuk sisi $x_0 x_i$ dengan bobot sisi $w(x_0 x_i)$ terkecil pada posisi $\frac{n}{2}$, berikan llabel sisi yang bernilai besar.

$$w(x_0x_1) = f(x_0) + f(x_1)$$

$$= 6 + 1 = 7,$$

$$w(x_0x_2) = f(x_0) + f(x_2)$$

$$= 6 + 2 = 8,$$

$$w(x_0x_3) = f(x_0) + f(3)$$

$$= 6 + 3 = 9,$$

$\vdots$

$$w(x_0x_{10}) = f(x_0) + f(x_{10})$$

$$= 6 + 11 = 17.$$

Diperoleh bahwa bobot sisi terkecil adalah $w(x_0x_1) = 7$ maka haruslah :

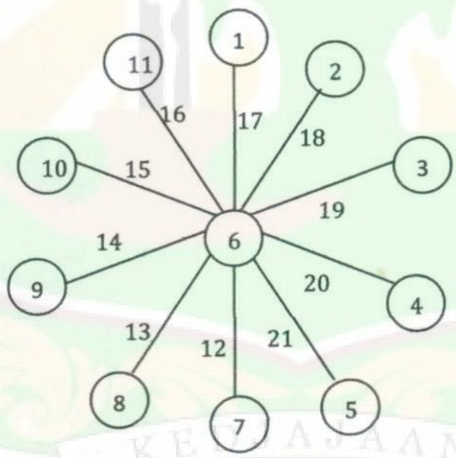
- $f(x_0x_1) = 17,$
- $f(x_0x_2) = 18,$
- $f(x_0x_3) = 19,$
- $f(x_0x_4) = 20,$
- $f(x_0x_5) = 21,$
- $f(x_0x_6) = 12,$
- $f(x_0x_7) = 13,$
- $f(x_0x_8) = 14,$
- $f(x_0x_9) = 15,$
- $f(x_0x_9) = 16.$

c. Diperoleh bobot sisi untuk setiap sisi pada pelabelan total tersebut, diperoleh bobot sisi sebagai berikut :

- $w_1 = f(x_0) + f(x_0x_1) + f(x_1) = 6 + 17 + 1 = 24,$

- $w_2 = f(x_0) + f(x_0x_2) + f(x_2) = 6 + 18 + 2 = 26,$
- $w_3 = f(x_0) + f(x_0x_3) + f(x_3) = 6 + 19 + 3 = 28,$
- $w_4 = f(x_0) + f(x_0x_4) + f(x_4) = 6 + 20 + 4 = 30,$
- $w_5 = f(x_0) + f(x_0x_5) + f(x_5) = 6 + 21 + 5 = 32,$
- $w_6 = f(x_0) + f(x_0x_6) + f(x_6) = 6 + 12 + 7 = 25,$
- $w_7 = f(x_0) + f(x_0x_6) + f(x_6) = 6 + 13 + 8 = 27,$
- $w_8 = f(x_0) + f(x_0x_6) + f(x_6) = 6 + 14 + 9 = 29,$
- $w_9 = f(x_0) + f(x_0x_6) + f(x_6) = 6 + 15 + 10 = 31,$
- $w_{10} = f(x_0) + f(x_0x_6) + f(x_6) = 6 + 16 + 11 = 33.$

Sehingga himpunan bobot sisi graf bintang S_{10} , $W = \{24, 25, \dots, 33\}$.



Gambar 3.19 Pelabelan total $(24, 1)$-sisi anti ajaib super pada graf bintang S_{10}

BAB IV

KESIMPULAN

Graf bintang (*star*) S_n adalah suatu graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat $n+1$ yang disebut dengan pusat, dan n titik lain yang berderajat satu yang disebut daun. Jumlah label titik dan label semua sisi yang menempel pada titik tersebut disebut bobot titik. Jumlah label sisi dan label dua titik yang menempel pada sisi disebut bobot sisi.

Jika suatu graf memiliki bobot titik atau bobot sisi yang berbeda, maka graf ini disebut graf dengan pelabelan anti ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmatika $\{a, a+d, \dots, a+(e-1)d\}$, dengan suku pertama a dan selisih bobot sisi d, maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total (a,d) -sisi anti ajaib. Selanjutnya, pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib disebut pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib super jika $g(V(G)) = \{1,2, \dots v\}$ dan $g(E(G)) = \{v+1, v+2, \dots, v+e\}$ dengan v adalah banyaknya titik di G dan e adalah banyaknya sisi di G.

Berdasarkan pembahasan pada bagian sebelumnya, yaitu Teorema 3.1 - Teorema 3.5 dapat disimpulkan bahwa graf bintang S_n mempunyai pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib super jika dan hanya jika :

i. $d \in \{0,1,2\}$ dan $n \geq 1$, atau

ii. $d = 3$ dan $1 \leq n \leq 2$.

DAFTAR KEPUSTAKAAN

[1] Baca, M dan Miller, M. *Super Edge-Antimagic Graph : A Wealth of Problems and Some Solutions.* Brown Walker Press, 2008.

[2] Sugeng. K. A, Miller. M, Baca. M dan Slamin. (a, d)-Edge-Antimagic Total Labelings of caterpillars. *Lecture Notes in Computer Science* 3330 (2005), 169-180.

[3] Sugeng. K. A. Magic and Antimagic Labeling of Graph. *Thesis S-3.*

[4] West, D.B. *Introduction To Graph Teory.* Prentice-Hall, 1996.

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis dilahirkan di Air Haji pada tanggal 02 November 1988. Anak kedua dari pasangan Zamzami dan Ernawati Cupu. Penulis memulai pendidikannya di SD No. 24 Koto Panai pada tahun 1993. Pada tahun 1999, penulis melanjutkan pendidikannya di SMP Negeri 1 Linggo Sari Baganti. Pada tahun 2002, penulis melanjutkan pendidikannya di SMA Negeri 1 Ranah Pesisir dan tamat pada tahun 2005. Pada tahun yang sama, penulis di terima menjadi mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Andalas melalui jalur Seleksi Penerimaan Mahasiswa Baru (SPMB). Selama di bangku perkuliahan penulis aktif di berbagai kegiatan HIMATIKA seperti Pekan Seni Bermatematika (PSB) dan HIMATIKA Goes to School (HGTS). Untuk syarat meraih gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika FMIPA UNAND, penulis pernah mengikuti praktek kerja lapangan di Dinas Pendidikan Kabupaten Pesisir Selatan.