APROKSIMASI NILAI EIGEN DAN VAKTOR EIGEN DENGAN MENGGUNAKAN METODE PANGKAT DAN METODE PANGKAT INVERRS

TESIS

MUNAH KHAIRATI
06215089

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2008

Aproksimasi Nilai Eigen Dan Vektor Eigen Dengan Menggunakan Metode Pangkat Dan Metode Pangkat Invers.

oleh : Munah Khairati
(Dibawah bimbingan Muhafzan dan Jenizon).

RINGKASAN

Nilai eigen banyak digunakan dalam aplikasi Aljabar Linier, contohnya aplikasi dari nilai eigen dibidang biologi dan fisika. Nilai eigen dari suatu matriks dapat dicari dengan menyelesaikan persamaan karakteristiknya. Masalah karakteristik dari suatu matriks bujur sangkar dapat ditentukan dengan membentuk polinomial karakteristik dan mencari akar-akarnya. Akan tetapi jika matriksnya sangat besar, perhitungan nilai karakteristiknya mengalami kesulitan. Oleh sebab itu digunakan berbagai metode aproksimasi untuk mendapatkan nilai eigen, salah satunya adalah metode pangkat dan metode pangkat invers. Dimana metode pangkat adalah suatu metode iteratif untuk mendapatkan nilai eigen dominan dan vektor eigennya, sedangkan metode pangkat invers adalah suatu metode iteratif untuk mendapatkan nilai eigen terkecil beserta vektor eigennya. Nilai eigen dari sebuah matriks A disebut nilai eigen dominan dari A jika nilai mutlaknya lebih besar dari nilai mutlak nilai eigen-nilai eigen lainnya dapat ditulis

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|.$$

Sebuah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen disebut vektor eigen dari A. Metode pangkat dan metode pangkat invers seringkali menghasilkan vektor- vektor yang mempunyai komponen-komponen yang besar. Untuk mengatasi masalah ini maka vektor eigen aproksimasi tersebut "diskalakan kebawah"pada setiap langkah dengan mengalikan vektor eigen aproksimasi

dengan kebalikan dari komponen yang mempunyai nilai mutlak terbesar. Pada setiap langkah dapat ditentukan aproksimasi dari nilai eigen dengan menggunakan perbandingan Rayleigh.

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle \tilde{x} \, , \, A\tilde{x} \rangle}{\langle \tilde{x} \, , \, \tilde{x} \rangle} .$$

APROKSIMASI NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN DENGAN MENGGUNAKAN METODE PANGKAT DAN METODE PANGKAT INVERS

Oleh

MUNAH KHAIRATI
06215089

Tesis

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Pascasarjana Universitas Andalas Universitas Andalas

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
2008

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Dengan ini saya menyatakan bahwa tesis yang saya tulis ini dengan judul **" Aproksimasi Nilai Eigen dan Vektor Eigen dengan Menggunakan Metode Pangkat dan Metode Pangkat Invers "** adalah hasil karya saya sendiri dan bukan merupakan ciplakan karya orang lain, kecuali kutipan sumbernya dicantumkan.

Jika dikemudian hari pernyataan yang saya buat ini ternyata tidak benar, maka status kelulusan dan gelar yang saya peroleh menjadi batal dengan sendirinya.

Padang, Juli 2008

Yang membuat pernyataan

Munah Khairati

BP. 06215089

Judul Penelitian : APROKSIMASI NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN DENGAN MENGGUNAKAN METODE PANGKAT DAN METODE PANGKAT INVERS

Nama Mahasiswa : MUNAH KHAIRATI

Nomor Pokok : 06215089

Program Studi : Matematika

Tesis ini telah diuji dan dipertahankan di depan sidang panitia ujian akhir Magister Sains pada Program Pascasarjana Universitas Andalas dan dinyatakan lulus pada tanggal 21 Juli 2008

Menyetujui

1. Komisi Pembimbing

Dr. Muhafzan, M.Si	**Jenizon, M.Si**
Ketua	Anggota

2. Ketua Program Studi	3. Direktur Program Pascasarjana
Jenizon, M.Si	**Prof. Dr.Ir. H. Novirman Jamarun, M.Sc**
Nip. 132 206 780	**Nip. 130 819 552**

Sesungguhnya kami telah menganugerahkan ilmu pengetahuan kepada Lukman, seraya firman kami: "Berterima kasihlah kepada Allah! Barangsiapa yang berterima kasih kepada Nya, maka faedahnya untuk dirinya sendiri, dan barangsiapa yang ingkar, maka Allah Maha Kaya lagi Trepuji

Terimalah karya ini ....

Sebagai titik awal baktiku

Kepadamu Ayah dan Bunda tercinta Serta suamiku

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 23 April 1963 di Padang Panjang, sebagai anak kedelapan dari Bapak Zainuddin Dt. Bgd Nan Sati (alm) dan Ibu Lutiar. Penulis menamatkan SD pada tahun 1975 di Padang Panjang, SMP tahun 1979 di Padang Panjang dan SMA tahun 1982 di Padang Panjang. Pada tahun 1985 penulis menyelesaikan Diploma III pada jurusan Matematika FPMIPA IKIP Padang dan pada tahun 1998 penulis memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada jurusan Matematika FPMIPA IKIP Padang.

Pada tahun 1986 penulis ditugaskan menjadi guru di SMA Negeri Padang Ganting Kabupaten Tanah Datar. Pada tahun 1989 penulis pindah tugas ke SMAN I Lubuk Basung Kabupaten Agam. Pada tahun 2006 penulis memperoleh kesempatan meneruskan pendidikan pada Program Pascasarjana Universitas Andalas, Padang.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Syukur kehadirat Illahi atas segala limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga dengan kekuatan-Nyalah penulis dapat menyelesaikan sebuah karya kecil yang merupakan suatu tahap kehidupan yang harus dilalui yaitu sebuah tesis yang berjudul Aproksimasi Nilai Eigen dan Vektor Eigen Dengan Menggunakan Metode Pangkat dan Metode Pangkat Invers. Tesis ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Pascasarjana Universitas Andalas.

Perkenankanlah penulis mengucapkan terima kasih yang setulusnya kepada Bapak Dr. Muhafzan, M.Si dan Bapak Jenizon, M.Si sebagai komisi pembimbing serta sebagai ketua program studi Matematika Universitas Andalas Padang yang telah penuh perhatian dan kesabaran dalam memberikan dan nasihat selama penulisan tesis ini.

Selanjutnya penulis mengucapkan terima kasih atas perhatian, dorongan, kritik dan saran kepada

1. Bapak Prof. Dr. Ir. H. Novirman Jamarun, M.Sc, selaku Direktur Program Pascasarjana Universitas Andalas.
2. Ibu Dr.Susila Bahri,M.Sc, Bapak Dr.I Made Arnawa dan Bapak Zulakmal,M.Si selaku penguji.
3. Dosen dan karyawan pada jurusan Matematika Universitas Andalas Padang.

4. Bapak Drs.Taslim, selaku Kepala Sekolah SMAN I Lubuk Basung yang telah memberikan dukungana moril.
5. Ananda Boby Mulia,ST, Ary Fitrat Dewi dan Karnila Sari yang selalu memberikan bantuan dan semangat beserta doa.
6. Teman-teman seperjuangan pada jurusan Matematika Universitas Andalas, Padang.
7. Teman-teman guru SMAN I Lubuk Basung.
8. Dan semua pihak yang telah membantu penulisan tesis ini yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Padang, Juli 2008

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Nilai eigen banyak digunakan dalam aplikasi Aljabar Linier. Contoh aplikasi dari nilai eigen dibidang biologi seperti menaksir jumlah suatu populasi dan dibidang fisika.

Nilai eigen dari suatu matriks dapat dicari dengan menyelesaikan persamaan karakteristiknya. Persamaan karakteristik dari suatu matriks adalah berbentuk polinom yang disebut juga polinom karakteristik. Misalkan matriks A adalah matriks n x n maka polinomial karakteristik A mempunyai bentuk

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + ... + c_n = 0 \qquad (1)$$

dimana c_1, c_2, …..c_n adalah skalar, dan polinomial karakteristik diperoleh dari determinan $(\lambda I - A) = 0$. Skalar λ yang memenuhi persamaan (1) adalah nilai eigen dari A yang mana merupakan akar dari polinomial karakteristik (1). Nilai λ dapat dicari dengan cara memfaktorkan atau cara Horner.

Namun dengan cara ini akan mengalami kesulitan jika akar persamaan tersebut tidak berupa bilangan bulat atau akarnya tidak eksak.

Perhatikan matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristiknya adalah

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 34\lambda - 28 = 0 \qquad (2)$$

Jika digunakan cara memfaktorkan atau Horner maka tidak akan ditemukan nilai eigen yang riil, namun masih dapat ditaksir atau diaproksimasi nilai-nilai eigen tersebut dengan tingkat kesalahan tertentu.

Untuk mendapatkan aproksimasi nilai eigen dari persamaan karakteristik (2) dapat digunakan suatu metode yang dikenal dengan Metode Pangkat dan metode pangkat invers. Dimana Metode Pangkat adalah suatu metode iteratif untuk mendapatkan nilai eigen dominan dari suatu matriks dan vektor eigennya, sedangkat metode pangkat invers untuk mendapatkan nilai eigen terkecil dan vektor eigennya.

Metode pangkat dan metode pangkat invers seringkali menghasilkan vektor-vektor yang mempunyai komponen-komponen yang besar. Untuk mengatasi persoalan ini maka vektor eigen aproksimasi tersebut "diskalakan ke bawah" pada setiap langkah sehingga komponen terletak antara + 1 dan − 1. Ini dapat dicapai dengan mengalikan vektor eigen aproksimasi dengan kebalikan dari komponen yang mempunyai nilai mutlak terbesar.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas maka yang menjadi permasalahan adalah "Bagaimana mengaproksimasi nilai eigen dominan dan nilai eigen tak dominan matriks $A \in R^{nxn}$ dengan menggunakan Metode Pangkat dan Metode Pangkat Invers".

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai eigen dominan dan nilai eigen tak dominan beserta vektor eigennya dari suatu matriks bujur sangkar. Proses mendapatkan nilai eigen dominan dan nilai eigen tak dominan beserta vektor

Proses mendapatkan nilai eigen dominan dan nilai eigen tak dominan beserta vektor eigennya dilakukan secara aproksimasi dengan menggunakan metode pangkat dan metode pangkat invers.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan bisa memberikan tambahan wawasan terutama bagi penulis sendiri tentang cara menentukan aproksimasi nilai eigen dominan dan nilai eigen tak dominan dengan menggunakan metode pangkat dan metode pangkat invers. Diharapkan juga bermanfaat bagi peneliti dibidang kajian ilmu baik bagi yang ingin meneliti tentang permasalahan yang dapat diselesaikan dengan nilai eigen seperti biologi dan fisika.

1.5 Sistematika Penulisan

Tulisan ini terdiri dari lima BAB. BAB I PENDAHULUAN memuat latar belakang masalah, perumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan. BAB II LANDASAN TEORI memuat matriks, vektor, determinan, kombinasi linier dan bebas linier, nilai eigen dan vektor eigen. BAB III METODOLOGI PENELITIAN memuat waktu dan tempat penelitian, metode penelitian. BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN memuat metode pangkat, menentukan nilai eigen dan vektor eigen, menentukan nilai eigen dominan dan vektor eigen dominan dengan metode pangkat, menentukan nilai eigen tak dominan dan vektor eigennya dengan metode pangkat invers. BAB V KESIMPULAN.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Beberapa konsep dasar dan teori yang diperlukan untuk membantu menyelesaikan permasalahan diantaranya matriks, vektor, determinan, kombinasi linier dan bebas linier, nilai eigen dan vektor eigen.

2.1 Matriks

Bentuk matriks sangat banyak digunakan dalam penyelesaian persoalan pada aplikasi aljabar linier, oleh karena itu perlu ditinjau beberapa hal yang berhubungan dengan matriks.

Dalam bahasa yang sederhana, sebuah matriks adalah sebuah susunan segi empat siku dari bilangan. Bilangan di dalam susunan tersebut dinamakan entri di dalam matriks.

Definisi 2.1.1 (Jacob, 1990)

Sebuah matriks mxn adalah suatu fungsi yang domainnya $\{(i,j) | 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ dan rangenya adalah lapangan skalar F. Jika A adalah fungsi tersebut, maka nilai fungsi A pada (i , j) dinyatakan dengan A (i , j) dan disebut entri ke i j dari A.

Sebagai ilustrasi, jika A matriks mxn maka ditulis

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [aij]$$

dengan $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots,$ a_{ij} disebut entri / elemen yang terletak baris ke – i kolom ke – j .

2.1.1 Operasi Matriks

Teorema 2.1.1.1. (Jacob , 1990)

Jika A, B, C matriks yang berukuran m x n maka :

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$

Definisi 2.1.1.2. (Jacob, 1990)

Jika A matriks berukuran m x n dan B matriks berukuran n x p (dimana jumlah kolom matrik A sama dengan jumlah baris matriks B) . Kita definisikan AB adalah matriks m x p.

$$(AB)_{(i,k)} = \sum_{j=1}^{r} A_{(i,j)} \cdot B_{(j,k)}$$

Teorema 2.1.1.3. (Jacob, 1990)

Jika A matriks berukuran m x n, B matriks berukuran n x p dan C matriks berukuran p x q maka :

$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

2.2 Ruang Vektor

Definisi 2.2.1. (Mulyana, 1997)

Himpunan V yang tidak kosong dengan penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan dalam V disebut ruang vektor jika memenuhi aksioma berikut :

1. Jika u dan v dalam V, maka u + v dalam V.
2. u + v = v + u
3. u + (v + w) = (u + v) + w
4. Ada 0 dalam V sehingga 0 + u = u + 0 = u untuk semua u dalam V
5. Untuk setiap u dalam V, ada –u dalam V yang disebut negatif dari u sehingga u + (-u) = (-u) + u = 0
6. Jika k sebarang skalar dan u sebarang vektor dalam V, maka ku dalam V
7. k (u + v) = ku + kv
8. (k + l) u = ku + lu
9. k (lu) = (kl) u
10. 1.u = u

2.3 Determinan

Ekspansi kofaktor dan operasi baris atau operasi kolom adalah sebuah metode yang efektif untuk menghitung determinan dari suatu matriks yang berukuran lebih dari 2 x 2.

Definisi 2.3.1 (Anton, 1988)

Jika A adalah matriks kuadrat, maka minor dari entri a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan di definisikan sebagai determinan dari sub matriks yang tinggal setelah baris ke i dan kolom ke j dicoret di A. Bilangan $(-1)^{i+j} M_{ij}$ dinyatakan oleh C_{ij} dan dinamakan kofaktor entri a_{ij}.

Teorema 2.3.2 (Anton, 1988)

Determinan sebuah matriks A yang berukuran n x n dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri di dalam suatu baris (kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menambah hasil-hasil perkalian yang dihasilkan, yakni untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$ maka :

$$\det(A) = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \ldots + a_{nj} C_{nj}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke j)

dan

$$\det(A) = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \ldots + a_{in} C_{in}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris ke i).

2.4 Kombinasi Linier dan Bebas Linier

Definisi 2.4.1. (Jacob, 1990)

Misalkan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ adalah vektor-vektor dan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ adalah skalar. Vektor w dikatakan kombinasi linier dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bila $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$. Himpunan semua kombinasi linier dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dinamakan span dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ditulis span $\{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$.

Jika $S = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ adalah sebuah himpunan vektor, maka persamaan vektor $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_r v_r = 0$ mempunyai paling sedikit satu pemecahan yakni $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, ..., $k_r = 0$.

Jika ini adalah satu-satunya pemecahan, maka S dinamakan sebuah himpunan yang bebas linier (linierly independent). Jika ada pemecahan lain maka S dinamakan sebuah himpunan yang tak bebas linier (linierly independent).

Definisi 2.4.2. (Jacob, 1990)

$A = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$suatu vektor di ruang V. A disebut suatu basis untuk V jika :

1. $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bebas linier
2. span { $v_1, v_2, \ldots, v_n$ }= V, ($v_1, v_2, \ldots, v_n$ membangun V).

2.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.5.1. (Anton, 1988)

Jika A sebuah matriks n x n, maka suatu vektor x yang tidak nol dalam R^n disebut vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, yaitu :

$$Ax = \lambda x \text{ untuk suatu skalar } \lambda$$

Maka skalar λ disebut eigen value dari A dan x disebut eigen vektor yang bersesuaian dengan λ.

Untuk menentukan nilai eigen suatu matriks A yang berukuran n x n, ditulis $Ax = \lambda x$ sebagai :

$$Ax = \lambda Ix \quad \text{atau}$$

$$Ax - \lambda Ix = 0,$$

$$(\lambda I - A)x = 0$$

Karena x vektor eigen tak nol berarti persamaan $(\lambda I\text{-}A)x = 0$ mempunyai solusi tak nol jika determinan $(\lambda I\text{-}A)x = 0$.

Ini disebut persamaan karakteristik dari A, λ yang didapat adalah eigen value dari A. Bila diekspansikan, maka determinan $(\lambda I\text{-}A)$ adalah sebuah polinomial di dalam λ yang dinamakan polinomial karakteristik dari A.

Definisi 2.5.2. (Anton, 1988)

Jika A adalah sebuah matriks n x n, maka pernyataan-pernyataan yang berikut ekivalen satu sama lain :

a. λ adalah nilai dari A.

b. Sistem persamaan (λI-A)x = 0 mempunyai pemecahan yang tak trivial.

c. Ada sebuah vektor tak nol x di dalam R^n sehingga Ax = λx.

d. λ adalah pemecahan riil dari persamaan karakteristik det (λI-A)x = 0.

Definisi 2.5.3 (Anton, 1988)

Sebuah nilai eigen dari sebuah matriks A dinamakan nilai eigen dominan (dominant eigenvalue) dari A jika nilai mutlaknya lebih besar dari pada nilai-nilai mutlak dari nilai-nilai eigen yang selebihnya. Sebuah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dominan dinamakan sebuah vektor eigen dominan (dominant eigen vektor) dari A.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Waktu penelitian dilaksanakan dari bulan Februari 2008 sampai dengan April 2008. Tempat penelitian adalah perpustakaan karena penelitian ini adalah penelitian kepustakaan.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan studi literatur yang membahas tentang aproksimasi nilai eigen dominan dan nilai eigen tak dominan beserta vektor eigennya dengan menggunakan metode pangkat dan metode pangkat invers. Pada penelitian ini penulis mencari teori-teori tentang bagaimana mengaproksimasi nilai eigen dominan dan nilai eigen tak dominan dengan menggunakan metode pangkat dan metode pangkat invers. Penulis berupaya mengumpulkan buku yang relevan sebagai sumber penelitian. Selanjutnya penulis akan mempelajari teori dan mendapatkan nilai eigen dominan dan nilai eigen tak dominan dengan menggunakan metode pangkat dan metode pangkat invers. Untuk lebih jelasnya, keseluruhan proses diatas dapat dilakukan dengan tiga tahap, yaitu

Tahap Pertama

Pada tahap ini peneliti mengumpulkan literatur, berupa buku dan jurnal, yang berkaitan dengan masalah peneliti. Kemudian dikumpulkan konsep-konsep sebagai landasan teori untuk mecari penyelesaian masalah peneliti.

Tahap Kedua

Pada tahap ini seluruh konsep yang telah dikumpulkan pada tahap satu dipelajari dan untuk mendapatkan nilai eigen dominan dan nilai eigen tak dominan dilakukan langkah-langkah :

1. Pilihlah sebuah vektor tak nol x_0 sebarang.
2. Hitung Ax_0 dan skalakanlah ke bawah untuk mendapatkan aproksimasi pertama kepada sebuah vektor eigen dominan dan vektor eigen tak dominan.

   Namakanlah vektor eigen tersebut dengan x_1.
3. Hitunglah Ax_1 dan skalakanlah ke bawah untuk mendapatkan aproksimasi ke dua, namakanlah vektor eigen tersebut x_2.
4. Hitunglah Ax_2 dan skalakanlah ke bawah untuk mendapatkan aproksimasi ke tiga, namakanlah vektor eigen tersebut x_3.

Sedangkan untuk metode pangkat invers, A diganti dengan A^{-1}. Dengan meneruskan cara ini, maka seurutan x_0, x_1, x_2, . . . yang aproksimasi semakin bertambah baik kepada nilai eigen dominan dan nilai eigen tak dominan.

Tahap Ketiga

Pada tahap ini mengambil kesimpulan berdasarkan tahap dua yaitu kesimpulan bagaimana menentukan nilai eigen dominan dan nilai eigen tak dominan beserta vektor eigennya dengan menggunakan metode pangkat dan metode pangkat invers.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Metode Pangkat

Metode pangkat adalah suatu metode iteratif untuk mendapatkan nilai eigen dominan dari suatu matriks beserta vektor eigennya. Metode pangkat dapat digunakan bila A adalah sebuah matriks yang dapat didiagonalisasi dengan sebuah nilai eigen dominan dan memenuhi

1. Matriks A berukuran n x n dimana n vektor eigen yang bebas linier.
2. Nilai eigen dapat disusun besarnya seperti

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$$

Definisi 4.1.1 (Anton, 1988)

Matriks kuadrat A dinamakan dapat di diagonalisasi (diagonalizable) jika terdapat matrik P yang dapat dibalik sehingga P^{-1} AP diagonal, matriks P dikatakan mendiagonalisasi A.

Teorema 4.1.2 (Leon, 1988)

Suatu matriks A berorde n x n, dapat didiagonalisasi jika dan hanya jika A mempunyai n vektor eigen yang bebas linear.

Bukti :

Misalkan matriks A mempunyai n vektor eigen bebas linear x_1 , x_2, … , x_n. Misalkan λ_i adalah nilai eigen dari A yang bersesuaian dengan x_i untuk setiap *i*.

(Beberapa dari λ_i boleh sama). Misalkan X adalah matriks dimana vektor kolom ke-j adalah x_j untuk j = 1,…, n. Selanjutnya terlihat bahwa $Ax_j = \lambda_j x_j$ adalah vektor kolom ke-j dari AX. Maka

$$
\begin{aligned}
AX &= (Ax_1, Ax_2, ..., Ax_n) \\
&= (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_n x_n) \\
&= (x_1, x_2, ..., x_n) \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \\
&= XD
\end{aligned}
$$

Karena X mempunyai n vektor kolom yang bebas linear, maka X adalah taksingular dan karena itu

$$D = X^{-1}\,XD = X^{-1}\,AX$$

Misalkan A adalah sebuah matriks n x n yang dapat didiagonalisasi. Misalkan pula $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ nilai eigen dari A yang memenuhi hubungan :

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n| > 0 \qquad (4.1.1)$$

Karena A dapat didiagonalisasi terdapat vektor eigen v_1, v_2,…v_n bebas linear yang masing-masing berkaitan dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ dan membentuk sebuah basis di R^n.

Kemudian sebarang vektor X_0 dalam R^n dapat dinyatakan dalam bentuk

$$X_0 = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n \qquad (4.1.2)$$

Dengan mengalikan kedua ruas dari sebelah kiri dengan A, maka

$$
\begin{aligned}
AX_0 &= A\,(k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n) \\
&= k_1 (Av_1) + k_2 (Av_2) + \ldots + k_n (Av_n) \\
&= k_1 \lambda_1 v_1 + k_2 \lambda_2 v_2 + \ldots + k_n \lambda_n v_n
\end{aligned}
$$

Kalikan lagi dengan A, maka

$$A^2X_0 = A\ (\ k_1\lambda_1 v_1\ + k_2\lambda_2 v_2 + \ldots + k_n\lambda_n v_n\ )$$

$$= k_1\lambda_1\ (Av_1) + k_2\lambda_2 (Av_2) + \ldots + k_n\lambda_n\ (Av_n)$$

$$= k_1\lambda_1^2 v_1\ + k_2\lambda_2^2 v_2 + \ldots k_n\lambda_n^2 v_n\ .$$

Dengan meneruskan cara ini, setelah P perkalian oleh A maka didapat :

$$A^P X_0 = k_1\lambda_1^p v_1\ + k_2\lambda_2^P v_2 + \ldots k_n\lambda_n^p v_n\ . \qquad (4.1.3)$$

Karena $\lambda_1 \neq 0$ pada persamaan (4.1.1), maka bentuk diatas dapat ditulis :

$$A^P X_0 = \lambda_1^P \left[k_1 v_1 + k_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^P v_2 + \ldots + k_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^P v_n \right]. \qquad (4.1.4)$$

Dari persamaan (4.1.1) didapatkan bahwa

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \ldots, \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}.$$

Semuanya mempunyai nilai mutlak yang lebih kecil dari pada satu, jadi $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^P, \ldots, \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right)^P$ p secara terus menerus mendekati nol jika p semakin besar.

Maka dari persamaan (4.1.4) aproksimasinya .

$$A^P X_0 \approx \lambda_1^P k_1 v_1\ . \qquad (4.1.5)$$

Semakin bertambah baik. Dengan demikian telah didapatkan hampiran dari kelipatan vektor eigen v_1 yaitu vektor $A^P X_0$. Vektor $A^P X_0$ merupakan hampiran vektor eigen yang berkaitan dengan nilai eigen terbesar v_1.

Makin besar nilai p makin baik pula hampiran $A^P X_0$ terhadap sebuah vektor eigen dari A.

Sekarang bagaimana mengaproksimasi nilai eigen dominan jika suatu aproksimasi vektor eigen dominan diketahui. Misalkan λ adalah suatu nilai eigen dominan dari matriks A dan x vektor egien yang berkaitan dengan nilai eigen tersebut .

Jika $\langle\ ,\ \rangle$ menyatakan hasil kali dalam Euclidis, maka berdasarkan sifatnya didapat :

$$\frac{\langle x, Ax\rangle}{\langle x,x\rangle} = \frac{\langle x, \lambda x\rangle}{\langle x,x\rangle}$$

$$= \frac{\langle \lambda x, x\rangle}{\langle x,x\rangle} \qquad \text{, sifat simetris}$$

$$= \frac{\lambda\langle x, x\rangle}{\langle x,x\rangle} \qquad \text{, sifat homogenitas}$$

$$\frac{\langle x, Ax\rangle}{\langle x,x\rangle} = \lambda .$$

Jadi jika $\tilde{x}$ adalah sebuah vektor eigen hasil aproksimasi, maka nilai eigen dominan λ_1 dapat ditentukan dengan aproksimasi :

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle \tilde{x} , A\tilde{x}\rangle}{\langle \tilde{x} , \tilde{x}\rangle} . \qquad (4.1.6)$$

Rumus nilai eigen ini disebut rumus pembagian Ray leigh.

4.2 Menentukan Nilai Eigen dan Vektor Eigen.

Contoh : Tentukan nilai-nilai eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Untuk menentukan nilai eigen suatu matriks berukuran n x n adalah

det (λ I - A) = 0 , karena :

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-3 & -4 \\ -1 & \lambda-3 \end{bmatrix}.$$

maka polinomial karakteristik dari A adalah :

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda-3 & -4 \\ -1 & \lambda-3 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 .$$

dan persamaan karakteristik dari A adalah

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0.$$

Maka $\lambda_1 = 5$ dan $\lambda_2 = 1$, inilah nilai-nilai eigen dari A.

Ruang eigen yang bersamaan dengan nilai eigen dominan $\lambda_1 = 5$ adalah ruang pemecahan dari :

$$(\lambda I - A).x = 0$$

Yakni

$$(5I - A).x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dari sistem persamaan diatas, di dapat :

$$x_1 = 2t \quad , \quad x_2 = t.$$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 5$ adalah vektor-vektor tak nol yang berbentuk $x = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t.$

Sehingga $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah sebuah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 5$.

4.3 Menentukan Nilai Eigen Dominan dan Vektor Eigen Dominan Dengan Metode Pangkat

Sekarang dengan menggunakan persamaan (4.1.4) yaitu $A^P X_0$ untuk mengaproksimasikan vektor eigen dominan dari matriks A.

Contoh 1 : Gunakan metode pangkat untuk mengaproksimasikan vektor eigen dominan dan nilai eigen dominan dari matriks :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dipilih sebarang vektor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Perkalian berulang x_0 dengan A menghasilkan :

$$Ax_0 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$A^2 x_0 = A \ (Ax_0) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 \\ 19 \end{bmatrix} \approx 19 \begin{bmatrix} 1{,}947 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^3 x_0 = A \ (A^2 x_0) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 37 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 187 \\ 94 \end{bmatrix} \approx 94 \begin{bmatrix} 1{,}989 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^4 x_0 = A \ (A^3 x_0) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 187 \\ 94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 937 \\ 469 \end{bmatrix} \approx 469 \begin{bmatrix} 1{,}998 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

dari perhitungan ini dapat dilihat bahwa hasil-hasil perkalian semakin mendekati kelipatan skalar dari $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Perkalian vektor-vektor dari perkalian skalar diatas dibandingkan dengan bentuk.

$x = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix}$, maka menghasilkan aproksimasi untuk vektor eigen dominan dari A dengan memisalkan t = 1.

Sekarang bagaimana mengaproksimasi nilai eigen dominan jika suatu aproksimasi vektor eigen dominan diketahui. Jika $\widetilde{x}$ adalah vektor eigen hasil aproksimasi, maka nilair eigen dominan λ_1 dapat ditentukan dengan aproksimasi :

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle \widetilde{x} \ , A\widetilde{x} \rangle}{\langle \widetilde{x} \ , \widetilde{x} \rangle} .$$

Dalam contoh didapat $\quad \widetilde{x} = \begin{bmatrix} 937 \\ 469 \end{bmatrix}$.

$$A\tilde{x} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 937 \\ 469 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4687 \\ 2344 \end{bmatrix}.$$

Maka $$\lambda_1 \approx \frac{\langle \tilde{x} , A\tilde{x} \rangle}{\langle \tilde{x} , \tilde{x} \rangle} = \frac{(937)\,(4687) + (469)\,(2344)}{(937)\,(937) + (469)\,(469)}.$$

$$\lambda_1 \approx 5,001.$$

Ini adalah aproksimasi yang baik untuk nilai eigen dominan $\lambda_1 = 5$.

Metode pangkat sering kali menghasilkan vektor-vektor yang mempunyai komponen-komponen besar dan kurang baik.

Untuk mengatasi persoalan ini maka digunakan aproksimasi vektor eigen dengan“diskalakan kebawah“pada setiap langkah, sehingga komponennya terletak antara +1 dan -1.

Gunakanlah metode pangkat dengan penskalaan untuk mengaproksimasi sebuah vektor eigen dominan dan nilai eigen dominan dari matriks :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dipilih sebarang vektor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Kalikan x_0 dengan A dan dengan menskalakan kebawah didapat :

$$Ax_0 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} \quad , \quad x_1 = \frac{1}{7} . \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,57 \end{bmatrix}.$$

Kalikan x_1 dengan A dan skalakan kebawah didapat :

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0,57 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,28 \\ 2,71 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{5,28} . \begin{bmatrix} 5,28 \\ 2,71 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,51 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan pembagian Rayleigh maka taksiran pertama dari nilai eigen dominan adalah :

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle x_1 , Ax_1 \rangle}{\langle x_1 , x_1 \rangle} = \frac{(1)\,(5{,}28) + (0{,}57)\,(2{,}71)}{(1)\,(1) + (0{,}57)\,(0{,}57)} = 5{,}151.$$

Kalikan x_2 dengan A dan skalakan kebawah didapat :

$$Ax_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}57 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}04 \\ 2{,}53 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \frac{1}{5{,}04} \cdot \begin{bmatrix} 5{,}04 \\ 2{,}53 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}50 \end{bmatrix}.$$

Taksiran kedua dari nilai eigen dominan adalah :

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle x_2 , Ax_2 \rangle}{\langle x_2 , x_2 \rangle} = \frac{(1)\,(5{,}04) + (0{,}51)\,(2{,}53)}{(1)\,(1) + (0{,}51)\,(0{,}51)} = 5{,}02.$$

Kalikan x_3 dengan A dan skalakan kebawah didapat :

$$A\,x_3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2{,}5 \end{bmatrix}, \quad x_4 = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 2{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Taksiran ketiga dari nilai eigen dominan adalah :

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle x_3 , Ax_3 \rangle}{\langle x_3 , x_3 \rangle} = \frac{(1)\,(5) + (0{,}50)\,(2{,}5)}{(1)\,(1) + (0{,}50)\,(0{,}50)} = 5{,}00.$$

Nilai-nilai yang dihitung diatas dapat dibuat tabelnya seperti dibawah ini.

Tabel 1. Aproksimasi nilai eigen dominan dan vektor eigen dominan :

Langkah ke i	0	1	2	3
x_i = aproksimasi sebuah nilai eigen yang diskalakan kebawah	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}57 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}51 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}50 \end{bmatrix}$
Ax_i	$\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5{,}28 \\ 2{,}71 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5{,}04 \\ 2{,}53 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 2{,}5 \end{bmatrix}$
Aproksimasi λ_1	-	5,151	5,02	5,00

Didalam metode pangkat kita dapat menentukan galat relatif. Jika $\widetilde{q}$ menyatakan sebuah aproksimasi untuk suatu harga q maka galat relatif dalam aproksimasi didefinisikan dengan $\left|\frac{q-\widetilde{q}}{q}\right|$ dan galat persentase dalam aproksimasi adalah $\left|\frac{q-\widetilde{q}}{q}\right|$ x 100%. Jika nilai eksak dari sebuah nilai eigen tertentu adalah λ dan $\widetilde{\lambda}$ adalah sebuah aproksimasi kepada λ, maka galat relatifnya adalah $\left|\frac{\lambda-\widetilde{\lambda}}{\lambda}\right|$. Apabila λ yang eksak tidak diketahui maka galat relatif yang diperkirakan adalah $\left|\frac{\widetilde{\lambda}_{(i)}-\widetilde{\lambda}_{(i-1)}}{\widetilde{\lambda}_{(i)}}\right|$.

Dari tabel dibawah ini dapat dilihat prosentase galat relatif yang diperkirakan.

Tabel 2. Prosentase galat relatif

I = Langkah	2	3
$\widetilde{\lambda}_{(i)}$	5,02	5,00
Galat relatif yang diperkirakan setelah i langkah	0,026	0,004
Persentase kesalahan setelah I langkah	2,6 %	0,4 %

Contoh 2 :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dipilih sebarang vektor $x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Kalikan x_0 dengan A dan dengan menskalakan kebawah didapat :

$$Ax_0 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 9 \end{bmatrix} \quad , \quad x_1 = \frac{1}{17} \cdot \begin{bmatrix} 17 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}53 \end{bmatrix}.$$

Kalikan x_1 dengan A dan skalakan kebawah didapat :

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}53 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}12 \\ 2{,}59 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{5{,}12} \cdot \begin{bmatrix} 5{,}12 \\ 2{,}59 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}51 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan pembagian Rayleigh maka taksiran pertama dari nilai eigen dominan adalah :

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle x_1 \, , Ax_1 \rangle}{\langle x_1 \, , x_1 \rangle} = \frac{5{,}12 + 1{,}37}{1 + 0{,}28} = 5{,}07 .$$

Kalikan x_2 dengan A dan skalakan kebawah didapat

$$Ax_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}04 \\ 2{,}53 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \frac{1}{5{,}04} \cdot \begin{bmatrix} 5{,}04 \\ 2{,}53 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}50 \end{bmatrix}.$$

Taksiran kedua dari nilai eigen dominan adalah :

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle x_2 \, , Ax_2 \rangle}{\langle x_2 \, , x_2 \rangle} = \frac{5{,}04 + 1{,}29}{1 + 0{,}26} = 5{,}02 .$$

Kalikan x_3 dengan A dan skalakan kebawah didapat :

$$A\,x_3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2{,}5 \end{bmatrix}, \quad x_4 = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 2{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Taksiran ketiga dari nilai eigen dominan adalah :

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle x_3 \, , Ax_3 \rangle}{\langle x_3 \, , x_3 \rangle} = \frac{5 + 1{,}25}{1 + 0{,}25} = 5{,}00 .$$

4.4 Menentukan Nilai Eigen Tak Dominan Dan Vektor Eigen Dengan Metode Pangkat Invers

Metode pangkat invers adalah suatu metode pangkat untuk mengaproksimasi nilai eigen dari nilai mutlak terkecil bila matrik tersebut dapat dibalik. Jika $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ adalah nilai eigen dari matriks A yang dapat dibalik, maka $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots.., \frac{1}{\lambda_n}$ adalah nilai eigen dari matriks A^{-1}. Jika x merupakan vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan λ maka x juga merupakan vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan $\frac{1}{\lambda}$. Jika nilai eigen A dapat diurutkan tergantung pada ukuran nilai mutlaknya yaitu $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n|$, maka $\frac{1}{\lambda}$ merupakan nilai eigen dominan dari A^{-1} yang dapat diaproksimasi dengan metode pangkat. Nilai eigen dominan A^{-1} merupan nilai eigen dengan nilai mutlak terkecil dari A.

Contoh : gunakanlah metode pangkat invers untuk mengaproksimasi nilai eigen terkecil dan vektor eigennya dari matriks :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

dipilih sebarang vektor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Kalikan x_0 dengan A^{-1} dan diskalakan kebawah didapat :

$$A^{-1} x_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Kalikan x_1 dengan A^{-1} dan diskalakan kebawah didapat

$$A^{-1}x_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1,25 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{1,25}\begin{bmatrix} -1 \\ 1,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dengan pembagian Ray leigh, maka aproksimasi pertama nilai eigen terkecilnya adalah :

$$\lambda_1 \approx \frac{< x_1 , A^{-1}x_1 >}{< x_1 , x_1 >} = \frac{(-0,5)(-1) + (1)(1,25)}{(-0,5)(0,5) + (1)(1)} = 1,4.$$

Kalikan x_2 dengan A^{-1} :

$$A^{-1}x_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1,1 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \frac{1}{1,1}\begin{bmatrix} -1 \\ 1,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,909 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Aproksimasi kedua nilai eigen terkecilnya adalah :

$$\lambda_2 \approx \frac{< x_2 , A^{-1}x_2 >}{< x_2 , x_2 >} = \frac{(-0,8)(-1) + (1)(1,1)}{(-0,8)(0,8) + (1)(1)} = 1,159.$$

Kalikan x_3 dengan A^{-1} didapat :

$$A^{-1}x_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,909 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1,046 \end{bmatrix}, x_4 = \frac{1}{1,046}\begin{bmatrix} -1 \\ 1,046 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,956 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_3 \approx \frac{< x_3 , A^{-1}x_3 >}{< x_3 , x_3 >} = \frac{(-0,909)(-1) + (1)(1,046)}{(-0,909)(0,909) + (1)(1)} = 1,070.$$

Kalikan x_4 dengan A^{-1} didapat :

$$A^{-1}x_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,956 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1,022 \end{bmatrix}, x_5 = \frac{1}{1,022}\begin{bmatrix} -1 \\ 1,022 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,978 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_4 \approx \frac{< x_4 , A^{-1}x_4 >}{< x_4 , x_4 >} = \frac{(-0,956)(-1) + (1)(1,022)}{(-0,956)(0,956) + (1)(1)} = 1,033.$$

Kalikan x_5 dengan A^{-1} didapat :

$$A^{-1}x_5 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,978 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1,011 \end{bmatrix}, x_6 = \frac{1}{1,011}\begin{bmatrix} -1 \\ 1,011 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,989 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_5 \approx \frac{< x_5 , A^{-1}x_5 >}{< x_5 , x_5 >} = \frac{(-0{,}978)(-1)+(1)(1{,}011)}{(-0{,}978)(0{,}978) + (1)(1)} = 1{,}017 .$$

Kalikan x_6 dengan A^{-1} didapat :

$$A^{-1}x_6 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0{,}989 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1{,}005 \end{bmatrix}, x_5 = \frac{1}{1{,}005}\begin{bmatrix} -1 \\ 1{,}005 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}995 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_6 \approx \frac{< x_6 , A^{-1}x_6 >}{< x_6 , x_6 >} = \frac{(-0{,}989)(-1)+(1)(1{,}005)}{(-0{,}989)(0{,}989) + (1)(1)} = 1{,}008 .$$

Nilai-nilai yang dihitung di atas dapat dibuat tabelnya seperti dibawah ini.

Tabel 3 : Aproksimasi nilai eigen tak dominan dan vektor eigennya dengan menggunakan metode pangkat invers :

Langkah ke – i	0	1	2	3	4	5	6
x_i = aproksimasi sebuah nilai eigen yang diskalakan kebawah terhadap vektor eigen dari A^{-1}	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0{,}8 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0909 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0956 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0989 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 1{,}003 \end{bmatrix}$
Ax_i	$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 1{,}25 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 1{,}1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 1{,}046 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 1{,}022 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 1{,}005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0995 \\ 1 \end{bmatrix}$
Aproksimasi λ_i	-	1,4	1,159	1,070	1,033	1,017	1,008
Aproksimasi $\frac{1}{\lambda_i}$	-	0,714	0,935	0,863	0,968	0,983	0,992

Dari tabel 3 dapat dilihat, setelah iterasi ke enam pada metode pangkat invers maka aproksimasi nilai eigen tak dominan adalah :

$$\lambda \approx 0{,}992 \text{ dan vektor eigennya } x \approx \begin{bmatrix} -0{,}995 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sedangkan nilai eksaknya adalah $\lambda = 1$, dan vektor eigennya $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Dari tabel dibawah ini dapat dilihat prosentase kesalahan relatif yang diperkirakan.

Tabel 4 : Persentase galat relatif

I = Langkah	2	3	4	5	6
$\widetilde{\lambda}_{(i)}$	0,936	0,863	0,968	0,983	0,992
galat relatif yang diperkirakan setelah i langkah	0,236	0,083	0,108	0,015	0,009
Persentase galat setelah i langkah	23,6 %	8,3 %	10,8 %	1,5 %	0,9 %

BAB V

KESIMPULAN

Nilai eigen dari sebuah matriks A disebut nilai eigen dominan jika nilai mutlaknya lebih besar dari nilai mutlak nilai eigen-nilai eigen lainnya. Sebuah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dominan disebut vektor eigen dominan. Untuk mendapatkan nilai eigen dominan dan vektor eigen dominan dari matriks A yang berukuran n x n maka digunakan metode pangkat, sedangkan untuk mendapatkan nilai eigen tak dominan dan vektor eigennya digunakan metode pangkat invers.

Langka-langkah dalam metode pangkat dan metode pangkat invers adalah sama yaitu :

Langkah 0 : Ambillah sebarang vektor tak nol x_0.

Langkah 1 : Hitung A x_0 dan skalakan kebawah untuk mendapatkan aproksimasi pertama nilai eigen dan vektor eigen. Namakan vektor eigen tersebut dengan x_1.

Langkah 2 : Hitung A x_1 dan skalakan kebawah menghasilkan aproksimasi kedua.

Langkah 3 : Hitung A x_2 dan skalakan kebawah menghasilkan aproksimasi ketiga

Sedangkan dengan metode pangkat invers A diganti dengan A^{-1}.

Makin banyak langkah yang ditempuh, maka makin baik pula hasil aproksimasi nilai eigen dan vektor eigennya. Rumus yang digunakan untuk mendapatkan aproksimasi nilai eigen adalah :

$$\lambda_i \approx \frac{< x_i , Ax_i >}{< x_i , x_i >} \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$