PENGGUNAAN TEORI KEKONGUERNAN PADA TEORI BILANGAN

TESIS

SEKAR SARI
06215109

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
2008

Penggunaan Teori Kekongruenan pada Teori Bilangan

oleh : Sekar Sari

(Di bawah bimbingan I. Made Arnawa dan Haripamyu)

RINGKASAN

Konsep dan teori kekongruenan pertama kali diperkenalkan oleh Karl Friedrich Gauss, dan tahun 1801 Gauss memperkenalkan kongruen dan modulus ke dalam teori bilangan. Pada teori bilangan modulus berarti adalah satuan ukur yang digunakan dalam kongruen, sedangkan kongruen berarti dua angka yang memiliki modulo yang sama.

Tujuan penelitian adalah menentukan bagaimana penggunaan teori kekongruenan pada teori bilangan.

Masalah teori bilangan terutama pada penyelesaian soal-soal olimpiade dapat diselesaikan dengan menggunakan teori kekongruenan dengan teori pendukung : sifat-sifat bilangan bulat, sifat-sifat dan teori keterbagian pada bilangan bulat, pembagi bersama terbesar dan algoritma pembagian, relasi ekuivalen.

Penelitian ini penulis mulai dari bulan Januari 2008 sampai bulan Juli 2008. Dalam melakukan penelitian ini penulis melakukan studi kepustakaan dan memulai dengan meninjau permasalahan, mengumpulkan teori-teori yang didapat sebagai penunjang untuk menyelesaikan dan terakhir menarik kesimpulan dari permasalahan yang telah dibahas.

Adapun langkah kerja dari penelitian ini adalah :

1. Meninjau konsep-konsep dasar bilangan bulat.
2. Meninjau tentang teori kekongruenan.
3. Menyelesaikan masalah kekongruenan pada teori bilangan dengan teori-teori yang berhubungan dengan masalah tersebut.
4. Menyimpulkan hasil yang diperoleh.

Hasil pembahasan adalah bahwa penyelesaian masalah teori bilangan banyak menggunakan teori kekongruenan, baik digunakan satu lemma untuk satu masalah maupun gabungan beberapa lemma untuk satu masalah.

PENGGUNAAN TEORI KEKONGRUENAN PADA TEORI BILANGAN

Oleh

SEKAR SARI

06215109

Tesis

Sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Magister Sains
pada Program Pasca Sarjana Universitas Andalas

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
2008

Judul Penelitian : **PENGGUNAAN TEORI KEKONGRUENAN PADA TEORI BILANGAN**

Nama Mahasiswa : **SEKAR SARI**

Nomor Pokok : **06215109**

Program Studi : **MATEMATIKA**

Tesis ini telah diuji dan dipertahankan di depan sidang panitia ujian akhir Magister Sains pada Program Pasca Sarjana Universitas Andalas dan dinyatakan lulus pada tanggal 2 Agustus 2008.

Menyetujui

1. Komisi Pembimbing

Dr. I. Made Arnawa, M.Si	**Haripamyu, M.Si**
Ketua	**Anggota**

2. Ketua Program Studi Matematika	3. Direktur Program Pascasarjana
Jenizon, M.Si	**Prof.Dr.Ir.H. Novirman Jamarun, M.Sc**
NIP. 132 206 780	**NIP. 130 819 552**

Katakanlah : Tuhanku Tambahkan Bagiku Ilmu Pengetahuan (QS. Toha 114)

Allah Mengangkat Derajat Orang Yang Percaya dan Orang yang Berilmu Pengetahuan

Beberapa Derajat (QS. Mujadalah 11)

Siapa yang Berjalan Disuatu Jalan Untuk Menuntut Ilmu Pengetahuan, Allah Akan

Memudahkan Baginya Jalan ke Surga (HR. Muslim)

Ya Allah, Ya Rabbi, Permudahlah Algoritma Kehidupanku

Pada Jalan yang Engkau Ridhoi Dengan Metoda Mu yang Teruji

Agar Aku Selalu Dekat Dengan Mu

Untuk Suamiku Tercinta Yong Hendara, S.TP

Serta Kedua Orang Tuaku Tersayang

Drs. Jasmi Syarkawi dan Dra. Halimah Akur

Terimakasih Banyak atas Semangat, Dorongan, Pengertian

dan Semua Pengorbanannya

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Padang pada tanggal 24 Februari 1972, sebagai anak keempat dari delapan bersaudara pasangan Drs. Jasmi Syarkawi dan Dra. Halimah Akur. Penulis menamatkan SD pada tahun 1985 di SDN 09 Bengkulu, SMP tahun 1988 di SMPN 7 Padang dan SMA pada tahun 1991 di SMAN 2 Padang. Penulis memperoleh gelar Sarjana Pendidikan Matematika pada Fakultas PMIPA Universitas Negeri Padang tahun 1999.

Sejak tahun 2005 sampai sekarang penulis ditugaskan pada SMA PGRI Sawahlunto sebagai guru Bidang Studi Matematika. Pada tahun 2006 Penulis memperoleh kesempatan untuk melanjutkan pendidikan pada Program Pascasarjana Universitas Andalas pada Program Studi Matematika. Desember 2006 penulis dinikahi oleh Yong Hendra, S.TP.

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Saya menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa segala pernyataan dalam tesis saya yang berjudul **"PENGGUNAAN TEORI KEKONGRUENAN PADA TEORI BILANGAN"** merupakan gagasan atau hasil penelitian saya sendiri, dengan bimbingan komisi pembimbing, kecuali yang dengan jelas ditunjukkan rujukannya. Tesis ini belum pernah diajukan untuk memperoleh gelar pada program sejenis pada perguruan tinggi lain. Semua data dan informasi yang digunakan telah dinyatakan dengan jelas dan dapat diperiksa kebenarannya.

Jika dikemudian hari pernyataan yang saya buat ini tidak benar, maka saya bersedia menanggung segala resikonya.

Padang, Agustus 2008

Sekar Sari
BP.06215109

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah hirabbil 'alamin. Berkat Rahman dan Rahim Allah SWT, penulis berhasil menyelesaikan tesis ini dengan judul "Penggunaan Teori Kekongruenan pada Teori Bilangan". Tesis ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Pascasarjana Universitas Andalas.

Tesis ini dapat diselesaikan berkat bantuan berbagai pihak baik secara moril maupun secara materi. Suatu ungkapan yang ikhlas dari hati penulis untuk mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. Ir. H. Novirman Jamarun, M.Sc selaku direktur Pascasarjana Universitas Andalas.
2. Bapak Dr. I. Made Arnawa, M.Si sebagai ketua pembimbing.
3. Ibu Haripamyu, M.Si sebagai anggota pembimbing.
4. Bapak Jenizon, M.Si sebagai ketua jurusan matematika yang telah memberikan pengarahan dalam penulisan tesis ini.
5. Yang termulia papa, mama serta kedua mertuaku, da Budi, ni Sil, ni Tita, da Andre, da Boy, Ii, Gondan, Rudi, Zul, Rindang, Yati, Wedi, Yanti, Bob, Hendri dan Dewi beserta seluruh keponakan dan keluarga besar yang selalu mendoakan dan memberi semangat.
6. Suami tersayang Yong Hendra, S.TP yang selalu membantu, memotivasi, membimbing dengan sabar dan penuh pengertian.
7. Bapak dan ibu staf pengajar jurusan Matematika MIPA Unand yang telah banyak memberikan dukungan untuk penyelesaian tesis ini.
8. Bapak Drs. Zulfikar selaku kepala SMA PGRI Sawahlunto yang selalu memberi dukungan.

9. Teman-teman seperjuangan Ezi, Nop, Ida, pak An dan pak Zamzami (alm) yang selalu memberi dukungan, saran, kritikan dan masukan.
10. Rekan-rekan S2 Matematika, rekan-rekan sejawat yang tidak mungkin disebutkan secara perorangan.

Penulis menyadari segala kekurangan yang terdapat dalam tesis ini. Kritik dan saran berbagai pihak untuk kesempurnaan sangat diharapkan. Semoga karya ini bermanfaat bagi banyak pihak untuk kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi.

Padang, Juli 2008

Penulis,

DAFTAR ISI

BAB. I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Permasalahan

Konsep dan teori kekongruenan pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan Jerman yaitu Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855) dalam diskusi aritmatikanya. Menurut catatan sejarah, Gauss memperkenalkan kongruen dan modulus ke dalam teori bilangan tahun 1801. Kata Modulus (jamaknya moduli) dalam bahasa latin berarti suatu ukuran atau satuan ukur. Pada teori bilangan modulus adalah satuan ukur yang digunakan dalam kongruen. Lebih tepatnya, mengukur sesuatu menurut siklus panjangnya, sepadan dengan modulus. Sebagai contoh, waktu pada jam diukur dengan siklus panjang 12, sehingga disebut modulus 12. Hari dalam satu minggu terdapat 7 hari disebut dengan modulus 7.

Kata Kongruen berasal dari bahasa latin yang berarti menyetujui atau bersesuaian. Dalam geometri, kongruen berarti bahwa ketika satu bangun dilapiskan pada bagian atas bangunan yang lain, maka kedua bangunan itu persis sama. Dalam teori bilangan arti kongruen adalah dua angka yang memiliki modulo yang sama. Sebagai contoh 17 kongruen dengan 2 modulo 5 , berarti 17 dikurang 2 habis dibagi 5 (atau" modulus") 5.

Di dalam bahasa sehari-hari, sisa berarti" jumlah yang kecil setelah bagian yang utama dihabiskan".

Pada perkembangannya teori kekongruenan banyak digunakan dalam pengembangan geometri, teori bilangan, biologi , dan dunia kedokteran.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah ”Apa saja kegunaan Teori Kekongruenan pada teori bilangan.

1.3 Manfaat Penelitian

Penelitian ini di harapkan dapat memberikan sumbangan terhadap perkembangan ilmu pengetahuan dan untuk menambah wawasan tentang menyelesaikan masalah pada teori bilangan dengan menggunakan teori kekongruenan terutama pada penyelesaian soal- soal olimpiade.

1.4 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui penggunaan Teori Kekongruenan pada teori bilangan.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dikemukakan pengertian dan konsep dasar yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah kekongruenan. Teori dasar tentang bilangan bulat menjadi landasan teori yang penting dalam memahami pembahasan tentang masalah kekongruenan. Berikut defenisi-defenisi serta teorema-teorema yang mendukung penyelesaian masalah pada penelitian ini.

2.1 Sifat – Sifat Bilangan Bulat

Sifat- sifat bilangan bulat dibagi kedalam dua kelompok, yaitu sifat aljabar dan sifat urutan. Menurut **Budhi (2003)** Sifat Aljabar pada himpunan bilangan bulat mempunyai dua operasi yaitu operasi tambah (+) dan operasi kali (x) dengan sifat :

a. Sifat Assosiatif untuk penjumlahan.

Untuk setiap bilangan bulat a,b,c berlaku : $(a + b) + c = a + (b + c)$

b. Sifat komutatif untuk penjumlahan

Untuk setiap bilangan bulat a,b berlaku : $a + b = b + a$

c. Unsur identitas terhadap penjumlahan.

Ada bilangan 0 sehingga untuk setiap bilangan bulat berlaku : $a + 0 = 0 + a = a$

d. Unsur invers terhadap penjumlahan

Untuk setiap bilangan bulat a ada bilangan bulat b sehingga : $a + b = 0$

e. Sifat Assosiatif untuk perkalian

Untuk setiap bilangan bulat a,b,c berlaku : $(a . b) . c = a . (b . c)$

f. Sifat komutatif untuk perkalian

Untuk setiap bilangan bulat a,b berlaku : $a \cdot b = b \cdot a$

g. Unsur identitas terhadap perkalian

Ada bilangan 1 sehingga untuk setiap bilangan bulat berlaku : $a.1 = 1.a = a$

Sifat Urutan menurut (Varberg,Purcel,Rigdon, 2004), didefinisikan sebagai bilangan- bilangan riil tak nol dipisahkan dengan baik menjadi dua himpunan terpisah, bilangan- bilagan riil positif dan bilangan – bilangan riil negatif.

Fakta ini memungkinkan untuk memperkenalkan relasi urutan < (dibaca "lebih kecil dari") dengan $x < y \Leftrightarrow y - x$ adalah positif.

Contoh : $x < y = y > x$

Jadi $3 < 4 = 4 > 3$, $-3 < -2 = -2 > -3$

Beberapa Sifat Urutan (Varberg,Purcel,Rigdon, 2004)

1. Trikotomi.

   Jika x dan y adalah bilangan- bilangan, maka pasti satu diantara yang berikut ini berlaku : $x < y$ atau $x = y$ atau $x > y$

2. Ketransitifan $x < y$ dan $y < z \Rightarrow x < z$

3. Penambahan $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$

4. Perkalian. Bilamana z positif, $x < y \Leftrightarrow xz < yz$

   Bilamana z negatif, $x < y \Leftrightarrow xz > yz$

Relasi urutan ≤ (dibaca " kurang dari atau sama dengan") didefinisikan sebagai

$x \le y \Leftrightarrow y - x$ positif atau nol.

2.2 Sifat-Sifat dan Teori Keterbagian pada Bilangan Bulat.

Definisi 2.2.1 (Nikenasih, Dedi, 2007)

Sebuah bilangan bulat $a \neq 0$ dikatakan membagi b jika terdapat bilangan bulat c sehingga $b = ac$.

Jika a membagi b ditulis dengan $a \mid b$. Sebaliknya jika a tidak membagi b ditulis dengan $a \nmid b$. Disamping kata membagi dapat digunakan juga kata faktor, yaitu a faktor dari b. Selain itu dapat juga dikatakan bahwa a pembagi bilangan b,(Arifin, 2000).

Contoh 2.2.2

1. 4 membagi 12, ditulis $4 \mid 12$, karena $12 = 4.3$
2. 5 tidak membagi 16, ditulis $5 \nmid 16$, karena tidak ada bilangan bulat jika dikalikan 5 menghasilkan 16.

Sifat – sifat keterbagian pada bilangan bulat adalah sebagai berikut :

1. Sifat Refleksif

   Untuk setiap bilangan bulat a berlaku: $a \mid a$.

   Bukti :

   Ambil $a \in Z$, $a \nmid 0$. Akan ditunjukan $a \mid a$.

   Karena $a = a . 1$ maka $a \mid a$

2. Sifat Transitif

   Untuk setiap bilangan bulat a,b,c berlaku : Jika $a \mid b$ dan $b \mid c$ maka $a \mid c$.

   Bukti :

   Ambil $a,b,c \in Z$ dengan $a \mid b$ dan $b \mid c$.

   Akan ditunjukan $a \mid c$.

   Karena $a \mid b$ maka $a \neq 0$ dan ada $n_1 \in Z$ sehingga $b = n_1 a$

Karena $b \mid c$ maka $b \neq 0$ dan ada $n_2 \in Z$ sehingga $c = n_2 b$

Perhatikan $c = n_2 b$

Akibatnya $c = n_2 b$

$c = n_2 (n_1 a)$

$c = (n_2 n_1) a$ untuk $n_2 , n_1 \in Z$

$c = n_3 a$ untuk $n_3 \in Z$

Karena $a \neq 0$ dan $c = n_3 a$ untuk suatu $n_3 \in Z$ maka $a \mid c$.

3. Sifat Linier

Untuk setiap bilangan bulat a,b,c,x, dan y berlaku :

Jika $a \mid b$ dan $a \mid c$ maka $a \mid (xb + yc\}$.

Bukti :

Karena $a \mid b$ maka ada bilangan bulat k sehingga $b = ka$.

Karena $a \mid c$ maka ada bilangan bulat l sehingga $c = la$.

Selanjutnya untuk setiap bilangan bulat x , y maka

$$\begin{aligned} bx + cy &= kax + lay \\ &= a (kx + ly) \end{aligned}$$

Jadi $bx + cy$ habis dibagi oleh a.

4. Sifat Perkalian

Untuk setiap bilangan bulat a,b, dan c berlaku: Jika $a \mid b$ maka $ca \mid cb$.

5. Sifat Pencoretan

Untuk setiap bilangan bulat a, b, dan c berlaku: Jika $ca \mid cb$ dan $c \neq 0$ maka $a \mid b$.

6. Jika $a \mid b$ dan $b \mid a \Leftrightarrow a = \pm b$.Bilangan a dan b disebut berasosiasi.

Bukti : kekanan : ($\rightarrow$)

Ambil $a,b \in Z$ dengan $a \mid b$ dan $b \mid a$

Akan ditunjukkan $a = \pm b$

Karena $a \mid b$ maka $a \neq 0$, $a \in Z$ sehingga $b = n_1 a$

Karena $b \mid a$ maka $b \neq 0$, $b \in Z$ sehingga $a = n_2 b$

Perhatikan bahwa

$$a = n_2 b$$

$$a = n_2 (n_1 a)$$

$$a = (n_2 n_1) a$$

Karena $a, n_1, n_2 \in Z$, $a \neq 0$ dan $a = (n_2 n_1) a$ maka $n_1 n_2 = 1$

Akibatnya 1). $n_1 = n_2 = 1$ atau

2). $n_1 = -1$, $n_2 = -1$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Untuk } n_1 = n_2 = 1 \text{ diperoleh } a = b \\ \\ \text{Untuk } n_1 = n_2 = -1 \text{ diperoleh } a = -b \end{array}\right\} \quad a = \pm b$$

Bukti : kekiri : ($\leftarrow$)

Ambil $a, b \in Z$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ dan $a = \pm b$

Akan ditunjukkan $a \mid b$ dan $b \mid a$

Kasus 1 : $a = b$

Karena $a \neq 0$ dan $1 \in Z$ sehingga $b = 1 \cdot a$ maka $a \mid b$

Karena $b \neq 0$ dan $1 \in Z$ sehingga $a = 1 \cdot b$ maka $b \mid a$

Kasus 2 : $a = -b$

Karena $a \neq 0$ dan $-1 \in Z$ sehingga $b = -1 \cdot a$ maka $a \mid b$

Karena $b \neq 0$ dan $-1 \in Z$ sehingga $a = -1 \cdot b$ maka $b \mid a$

Dari kasus 1 dan kasus 2 disimpulkan jika $a = \pm b$ maka $a \mid b$ dan $b \mid a$

Definisi 2.2.2 (Nikenasih, Dedi, 2007)

Bilangan bulat p, $p > 1$ dikatakan bilangan prima jika pembagi positif dari bilangan tersebut adalah 1 dan p itu sendiri.

Contoh :

Misalkan nilai $p = 2$

Maka $2 \mid 2$ dan $1 \mid 2$, sehingga p adalah bilangan prima.

Definisi 2.2.3 (Budhi, 2003)

Bilangan bulat m disebut bilangan komposit jika mempunyai sedikitnya satu pembagi yang berbeda dengan 1 dan p.

Contoh :

Misal m = 8, 8 dikatakan bilangan komposit karena $8 = 2 . 4$

Begitu juga kalau dimisalkan m=12, 12 juga dikatakan bilangan komposit karena $12 = 2 . 6$ dan $12 = 3 . 4$

Sifat 2.2.4 (Budhi, 2003)

Suatu bilangan positif N habis dibagi :

a. 2 jika dan hanya jika angka terakhirnya genap.

b. 4 jika dan hanya jika bilangan dengan dua angka terakhir habis dibagi 4.

c. 3 jika dan hanya jika jumlah dari semua angka habis dibagi 3.

d. 5 jika dan hanya jika angka terakhir 0 dan 5.

Bukti :

a. Bilangan $N = a_n a_{n-1} \ldots a_0$ mempunyai arti

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$= 10 (a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \ldots a_1) + a_0$$

Suku pertama habis dibagi 2 karena mempunyai faktor 10. Bilangan N habis dibagi 2 jika dan hanya jika a_0 habis dibagi 2.

b. Bilangan $N = a_n a_{n-1} \ldots a_0$ mempunyai arti

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

$$N = 100\ (a_n 10^{n-2} + a_{n-1} 10^{n-3} + \ldots + a_2) + a_1 10 + a_2$$

Dua angka terakhir yaitu $a_1 10$ dan a_2 habis dibagi 4.

c. Dengan cara yang sama diperoleh

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$N = a_n\ (10^n - 1) + a_{n-1} 10^{n-1} - 1) + \ldots + a_1\ (10 - 1)$$

Karena $10^k - 1$ selalu habis dibagi 3 untuk setiap k, maka keterbagian N bergantung pada suku kedua.

d. Dengan sedikit perubahan seperlunya, diperoleh

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$= 10\ (a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \ldots a_1) + a_0$$

Suku pertama kelipatan 5, maka keterbagian N bergantung pada a_0

Teorema 2.2.5 (Budhi, 2003)

1). Jika $a \mid b$ maka $a \mid bx$ untuk setiap $x \in Z$

2). Jika $a \mid b$ dan $a \mid c$ maka $a \mid b + c$.

Bukti :

1). Jika $a \mid b$ maka $a \mid bx$ untuk setiap $x \in Z$

Ambil $a, b \in Z$ dengan $a \mid b$

Akan ditunjukkan $a \mid bx$ untuk setiap $x \in Z$

Karena $a \mid b$ maka $a \neq 0$ dan ada $n_1 \in Z$ sehingga $b = n_1 a$

Karena $b = n_1 a$, maka :

$$bx = (n_1 a)x$$
$$= \underbrace{(n_1 x)}_{\in Z} a$$
$$= n_2 a$$

Karena $a \neq 0$ dan ada $n_2 \in Z$ sehingga $bx = n_2 a$ maka $a \mid bx$

2). Jika $a \mid b$ dan $a \mid c$ maka $a \mid b + c$.

Ambil $a,b,c \in Z$ dengan $a \mid b$ dan $a \mid c$.

Akan ditunjukkan $a \mid b + c$.

Karena $a \mid b$ maka $a \neq 0$ dan ada $n_1 \in Z$ sehingga $b = n_1 a$

Karena $a \mid c$ maka $a \neq 0$ dan ada $n_2 \in Z$ sehingga $c = n_2 a$

Perhatikan bahwa : $b + c = n_1 a + n_2 a$

$$= \underbrace{(n_1 + n_2)}_{\in Z} a$$
$$= n_3 a \text{ untuk suatu } n_3$$

Karena $a \neq 0$ dan ada $n_3 \in Z$ sehingga $b + c = n_3 a$ maka $a \mid b + c$

2.3 Pembagi Bersama Terbesar (PBT) dan Algoritma Pembagian

Definisi 2.3.1 (Frakleigh, 1994)

Bilangan bulat positif k adalah Pembagi Bersama Terbesar (PBT) dari $a,b \in Z$, $a,b \neq 0$ bila dipenuhi :

1. $k \mid a$ dan $k \mid b$
2. Jika c bilangan bulat, sehingga $c \mid a$ dan $c \mid b$ maka $c \mid k$

Contoh :

1. PBT (10,6) = 2, sebab faktor dari 10 = 1,**2**,5,10 dan faktor dari 6 = 1,**2**,3,6

Dari faktor 10 dan 6 diatas,diperoleh bahwa 2 adalah faktor persekutuan terbesar dari 10 dan 6.

2. PBT (2,11) = 1, sebab faktor dari 2 = **1**,2 dan faktor dari 11 = **1**,11

Dari faktor 2 dan 11 diatas, diperoleh bahwa 1 adalah faktor persekutuan terbesar dari 2 dan 11.

Teorema 2.3.2 (Aitken, 1992)

Misalkan a, b adalah bilangan bulat dengan $b > 0$, maka terdapat bilangan bulat q dan r yang tunggal, sehingga : $a = qb + r$; $0 \le r < b$ .Dalam hal ini q dan r masing- masing disebut sebagai hasil bagi dan sisa pembagian a dan b.

Bukti :

Untuk bilangan bulat a , b, perhatikan himpunan

$A = \{ x = a - yb \mid x \ge 0, y \in B \}$. Akan dibuktikan: $A \neq \{ \}$

Karena b bulat positif maka $b \ge 1$, dan $|a|\, b \ge |a|$, atau $-b\, |a| < a < b\, |a|$

Jadi $0 < a + |a|\, b$

Dengan mengambil $y = -\,|a|$, maka $x = a - yb \in A$.

Berdasarkan sifat terurut rapi, maka A mempunyai unsur terkecil. Misalkan s unsur terkecil himpunan A. Berdasarkan sifat himpunan A, maka ada bilangan bulat q sehingga $s = a - qb$.

Jika dapat membuktikan bahwa $s < b$, maka berarti telah membuktikan hal yang diminta. Andaikan bahwa $s \ge b$, maka

$$
\begin{aligned}
a - (q + 1)\, b &= a - qb - b \\
&= s - b \ge 0
\end{aligned}
$$

Jadi $a - (q + 1)\, b = s - b \in A$.

Karena $s - b < s$, maka hal ini berlawanan dengan asumsi bahwa s merupakan unsur terkecil dari A. Dengan demikian pengandaian bahwa $s \geq b$ tidak benar. Yang benar adalah $s < b$. Bilangan q disebut hasil bagi a oleh b dan s disebut sisa pembagian a oleh bilangan b.

Contoh :

1.Misalkan nilai $a = 8$ dan $b = 2$

Menurut teorema 2.3.2 nilai $a = qb + r$, $0 \leq r < b$

Sehingga didapat bahwa $8 = 4.2 + 0$, dengan nilai $q = 4$ dan $r = 0$

2.Misalkan nilai $a = 0$ dan $b = 3$

Menurut teorema 2.3.2 nilai $a = qb + r$, $0 \leq r < b$

Sehingga didapat bahwa $0 = 0.3 + 0$, dengan nilai $q = 4$ dan $r = 0$

Definisi 2.3.3 (Arifin, 2000)

Jika $a,b \in Z$ dengan a dan b tidak keduanya nol, maka a dan b relatif prima.

Contoh :

Misalkan nilai $a = 10$, $b = 9$, maka PBT $(10,9) = 1$, karena faktor persekutuan terbesar dari 10 dan 9 adalah 1

Teorema 2.3.4 (Herstein, 1997)

Jika a dan b relatif prima dan $a \mid bc$, maka $a \mid c$.

Bukti :

Karena a dan b relatif prima, maka ada $m,n \in Z$ sehingga ditulis $am + bn = 1$...(*)

Kemudian (*) dikalikan dengan c sehingga $amc + bnc = c \Leftrightarrow (ac)m + (bc)n = c$

Cara 1 : Jika $a \mid bc$ berarti $a \mid ((ac)m + (bc)n)$, karena $(ac)m + (bc)n = c$ maka $a \mid c$.

Cara 2 : Kemudian $a \mid acm$ dan diasumsikan $a \mid bcn$ sehingga $a \mid acm + bcn$, dimana

$acm + bcn = c$ sedemikian sehingga $a \mid c$.

Teorema 2.3.5 (Aitken, 1992)

Untuk setiap bilangan – bilangan bulat a,b, dan c berlaku :

1. $a \mid 0$, $1 \mid a$, $a \mid a$.

Bukti :

* Ambil $a \in Z$ dengan $a \neq 0$. Akan ditunjukkan $a \mid 0$

  Karena $0 = a \cdot 0$ maka $a \mid 0$

* Ambil $a \in Z$. Akan ditunjukkan $1 \mid a$

  Karena $a = 1 \cdot a$ maka $1 \mid a$

* Ambil $a \in Z$, $a \neq 0$. Akan ditunjukkan $a \mid a$

  Karena $a = a \cdot 1$ maka $a \mid a$

2. $a \mid 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$

Bukti :

Bukti kekanan (→)

Misalkan $a \in Z$ dan $a \mid 1$, Akan ditunjukkant. $a = \pm 1$

Karena $a \mid 1$ maka $a \neq 0$ dan $1 = ac$ untuk suatu $c \in Z$

Karena $1 = ac$ maka $1^2 = (ac)^2 = a^2 c^2$ atau $1 = a^2 c^2$

Karena $a , c \in Z$ maka $a^2 = 1$, akibatnya $a = \pm \sqrt{1} = \pm 1$

Bukti kekiri (←)

$a = \pm 1$. Akan ditunjukkant $a \mid 1$

Karena $1 \mid 1$ dan $-1 \mid 1$ maka $a \mid 1$

3. Jika $a \mid b$ dan $c \mid d$ maka $ac \mid bd$

Bukti :

Ambil a,b,c $\in$ Z dengan a | b dan c | d

Akan ditunjukkan ac | bd.

Karena a | b maka $a \neq 0$ dan ada $n_1 \in Z$, sehingga $b = n_1 a$

Karena c | d maka $c \neq 0$ dan ada $n_2 \in Z$, sehingga $d = n_2 c$

Akibatnya $bd = n_1 a\, n_2 c = \underbrace{n_1 n_2}_{n_3 \in Z}\, ac$

$= n_3\, ac$ untuk suatu $n_3 \in Z$

Karena $a \neq 0$, $c \neq 0$ maka $ac \neq 0$

Karena $ac \neq 0$ dan ada suatu $n_3 \in Z$

Sehingga $bd = n_3\, ac$ maka ac | bd

4 Jika a | b dan a | c maka a | (bx + cy) untuk x,y $\in$ Z

Bukti :

Ambil a,b,c $\in$ Z dengan a | b dan a | c

Akan ditunjukkan a | (bx + cy) untuk sebarang x,y $\in$ Z

Karena a | b, maka a | bx untuk setiap x $\in$ Z

Karena a | c, maka a | cy untuk setiap y $\in$ Z

Karena a | bx dan a | cy, maka a | bx + cy untuk setiap x, y $\in$ Z

Teorema 2.3.6 (Aitken, 1992)

Misalnya a,b $\in$ Z dengan a,b $\neq$ 0 dan PBT (a,b) = d, maka ada x,y $\in$ Z sehingga d = ax + by.

Bukti :

Ambil (misalkan) a,b $\in$ Z dengan a dan b tidak keduanya nol dan PBT (a,b) = d

Akan ditunjukkan ada x,y $\in$ Z. Sehingga d = ax + by

Tulis $S = \{ au + bv \mid au + bv > 0, u,v \in Z \}$

Kasus 1: $a \neq 0, b = 0$

Karena $a \neq 0$ maka $|a| > 0$

Sub Kasus 1.1 $a > 0$

Perhatikan bahwa $|a| = a = 1.a + 0.b > 0$

Ini berarti $|a| \in S$

Sub Kasus 1.2 $a < 0$

Perhatikan bahwa $|a| = -a = -1.a + 0.b > 0$

Ini berarti $|a| \in S$

Kasus 2 : $a = 0, b \neq 0$

Sub Kasus 2.1 $b > 0$

Perhatikan bahwa $|b| = b = 0.a + 1.b > 0$

Ini berarti $|b| \in S$

Sub Kasus 2.2 $b < 0$

Perhatikan bahwa $|b| = -b = 0.a +(-1).b > 0$

Ini berarti $|b| \in S$

Kasus 3 : $a \neq 0, b \neq 0$

Sub Kasus 3.1 $a > 0$ dan $b > 0$

Perhatikan bahwa $|a| + |b| = a + b = 1.a + 1.b > 0$

Ini berarti $|a| + |b| \in S$

Sub Kasus 3.2 $a < 0$ dan $b < 0$

Perhatikan bahwa $|a| + |b| = a .(-1) + b. (-1) > 0$

Ini berarti $|a| + |b| \in S$

Sub Kasus 3.3 $a > 0$ dan $b < 0$

Perhatikan bahwa $|a| + |b| = a + (-b) = a.1 + b.(-1) > 0$

Ini berarti $|a| + |b| \in S$

Sub Kasus 3.4 $a < 0$ dan $b > 0$

Perhatikan bahwa $|a| + |b| = (-a) + b = a.(-1) + b.1 > 0$

Ini berarti $|a| + |b| \in S$

Diketahui bahwa $S = \{ au + bv \mid au + bv > 0, u,v \in Z \} \neq \emptyset$

Karena unsur – unsur di S adalah bilangan – bilangan bulat positif, maka menurut sifat terurut dengan baik, S mempunyai unsur terkecil. Misalkan unsur terkecil tersebut adalah d. Karena $d \in S$, maka d dapat ditulis sebagai $d = ax + by$ untuk suatu $x,y \in Z$. Selanjutnya bagi a dengan d, diperoleh

$$a = qd + r \; ; \; 0 \leq r < d \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

Andaikan $r > 0$

Dari (*) diperoleh $r = a - qd = a - q(ax + by) = a\underbrace{(1 - qx)}_{\in Z} + b\underbrace{(-qy)}_{\in Z}$

Ini berarti $r \in S$

Karena $r \in S$ dan $r < d$ maka d bukan unsur terkecil di S

Ini kontradiksi dengan pemisalan bahwa d adalah unsur terkecil di S

Jadi haruslah $r = 0$, atau $d \mid a$

Teorema 2.3.7 (Budhi, 2003)

Misal $a,b \in Z$ dengan $a,b \neq 0$, a dan b relatif prima jika dan hanya jika ada bilangan bulat x,y sehingga $ax + by = 1$.

Bukti Kanan (→)

Misal $a,b \in Z$ dengan $a,b \neq 0$, a dan b relatif prima. Karena a,b relatif prima maka PBT $(a,b) = 1$

Karena 1 merupakan PBT dari a dan b maka 1 dapat ditulis sebagai : $1 = ax + by$ untuk suatu $x,y \in Z$

Bukti Kiri ($\leftarrow$)

Misal $a,b \in Z$ dengan $a,b \neq 0$, dan ada bilangan bulat x, y sehingga $1 = ax + by$

Akan ditunjukkan a dan b relatif prima.yaitu PBT (a,b) = 1

Misalkan PBT (a,b) = d

Akan ditunjukkan d = 1

Karena d = PBT (a,b) maka $d \mid a$ dan $d \mid b$

Karena $d \mid a$ dan $d \mid b$ maka $d \mid ax + by$ atau $d \mid 1$

Karena $d \mid 1$ dan $d \geq 1$ maka $d = 1$

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini penulis mulai dari bulan Januari 2008. Dan diharapkan dapat diselesaikan pada bulan Juli 2008. Sedangkan tempat penelitian adalah perpustakaan.

3.2 Langkah-langkah Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian deskriptif yang menggunakan analisa teori yang relevan dengan masalah yang dibahas dan berlandaskan pada studi kepustakaan. Dalam melakukan penelitian ini penulis memulai dengan meninjau permasalahan, mengumpulkan teori-teori yang didapat sebagai penunjang untuk menyelesaikan permasalahan tersebut dan terakhir menarik kesimpulan dari permasalah yang telah dibahas.

Adapun langkah kerja dari penelitian adalah:

1. Meninjau konsep-konsep dasar bilangan bulat.
2. Meninjau tentang kekongruenan.
3. Menyelesaikan masalah kekongruenan pada teori bilangan dengan teori-teori yang berhubungan dengan pemecahan masalah tersebut.
4. Menyimpulkan hasil yang diperoleh.

BAB IV

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dikemukakan definisi dan teori dasar kekongruenan yang digunakan untuk menyelesaikan masalah teori bilangan. Bab ini terbagi ke dalam dua bagian yaitu bagian pertama berisi tentang definisi dan teori dasar kekongruenan dan bagian kedua berisi tentang penggunaan teori dasar kekongruenan dalam menyelesaikan masalah teori bilangan.

4.1 Definisi dan Teori Dasar Kekongruenan

Definisi 4.1.1 (Aitken, 1992)

Misalkan a, b dan m bilangan bulat dengan $m > 0$. Bilangan a disebut kongruen dengan b modulo m jika $m \mid (a - b)$ dan tulis $a \equiv b \pmod{m}$.

Lemma 4.1.2 (Aitken, 1992)

Kongruen modulo m adalah relasi equivalen, ini berarti :

1. $a \equiv a \pmod{m}$ (refleksif)
2. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ maka $b \equiv a \pmod{m}$ (simetri)
3. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $b \equiv c \pmod{m}$ maka $a \equiv c \pmod{m}$ (transitif)

Bukti :

1. $a \equiv a \pmod{m}$ (refleksif)

   $a \equiv a \pmod{m}$, berarti $a - a = km$, k bilangan bulat

$$a - a = 0 \text{ maka } m \mid a - a$$

2. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ maka $b \equiv a \pmod{m}$ (simetri)

   $a \equiv b \pmod{m}$, berarti $a - b = km$, k bilangan bulat

$$-(a-b) = -km$$

$$b-a = (-k)m \text{ , -k bilangan bulat}$$

$$b \equiv a \pmod m$$

3. Jika $a \equiv b \pmod m$ dan $b \equiv c \pmod m$ maka $a \equiv c \pmod m$ (transitif)

   $a \equiv b \pmod m$, berarti $a - b = k_1m$

   $b \equiv c \pmod m$, berarti $b - c = k_2m$

   $a - c = (a - c) + (b - c) = k_1m + k_2m = (k_1 + k_2)m$, k_1, k_2 bilangan bulat

   $a \equiv c \pmod m$

Lemma 4.1.3 (Budhi, 2003)

Jika $a \equiv b \pmod m$ maka untuk setiap bilangan bulat p berlaku

(i). $a + p \equiv b + p \pmod m$

(ii). $ap \equiv bp \pmod m$

Bukti :

$a \equiv b \pmod m$, berarti $a - b = km$

(i). $a + p \equiv b + p \pmod m$, berarti $(a+p) - (b+p) = a + p - b - p = a - b = km$

Ini berarti m membagi $(a+p) - (b+p)$ atau $a + p \equiv b + p \pmod m$.

(ii). $ap \equiv bp \pmod m$, berarti $ap - bp = p(a - b) = pkm$

Maka $ap - bp$ habis dibagi m atau $ap \equiv bp \pmod m$.

Lemma 4.1.4 (Budhi, 2003)

Jika $a \equiv b \pmod m$ dan $c \equiv d \pmod m$, maka :

(i). $a + c \equiv b + d \pmod m$

(ii). $ac \equiv bd \pmod m$

Bukti :

$a \equiv b \pmod m$, berarti $a - b = k_1m$

$c \equiv d \pmod m$, berarti $c - d = k_2m$

(i). $a + c \equiv b + d \pmod m$, berarti $(a + c) - (b + d) = k_1m + k_2m$

$= (k_1 + k_2)m$

$= k_3m$, k_3 bilangan bulat.

Ini berarti $(a + c) - (b + d)$ habis dibagi oleh m, atau $a + c \equiv b + d \pmod m$.

(ii). $a - b = k_1m$, $a = b + k_1m$

$c - d = k_2m$, $c = d + k_2m$

$ac \equiv bd \pmod m$

$ac = (b + k_1m) . (d + k_2m) = bd + bk_2m + dk_1m + k_1.k_2.m^2$

$= bd + (bk_2 + dk_1 + k_1.k_2.m)m$

Ini berarti $ac - bd$ habis dibagi oleh m, atau $ac \equiv bd \pmod m$.

Lemma 4.1.5 (Budhi, 2003)

Jika a,b,c dan m bilangan yang memenuhi $ca \equiv cb \pmod m$ dan PBT $(c,m) = 1$, maka $a \equiv b \pmod m$.

Bukti :

$ac \equiv bc \pmod m$

$\Rightarrow m \mid ac - bc = m \mid c\,(a - b)$

$\Rightarrow km = c\,(a - b)$

$\Rightarrow$ karena PBT $(c,m) = 1$, maka $m \mid (a - b)$

$\Rightarrow a \equiv b \pmod m$

contoh :

$-35 \equiv 45 \pmod 8$

$5 . (-7) \equiv 5 . 9 \pmod 8$, karena PBT $(5,8) = 1$ maka $-7 \equiv 9 \pmod 8$

Lemma 4.1.6 (Burton, 1980)

Jika $a \equiv b \pmod{m}$, maka $a^k \equiv b^k \pmod{m}$ untuk setiap k bilangan bulat positif.

Bukti :

Dengan menggunakan induksi Matematika, dapat dibuktikan sifat diatas.

Dari lemma 4.3 , kita tahu bahwa $a \equiv b \pmod{m}$

Diasumsikan benar untuk semua k.

Untuk $k = 1$, $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a^k \equiv b^k \pmod{m}$

Untuk $k + 1$, $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a^{k+1} \equiv b^{k+1} \pmod{m}$

$$\Leftrightarrow a.a^k \equiv b.b^k \pmod{m}$$

$a.a^k \equiv b.b^k \pmod{m}$ adalah gabungan dari $a \equiv b \pmod{m}$ dan $a^k \equiv b^k \pmod{m}$

Jadi terbukti $a \equiv b \pmod{m}$, maka $a^k \equiv b^k \pmod{m}$ untuk setiap k bilangan bulat positif.

Lemma 4.1.7 (Burton, 1980)

Jika $d > 0$ maka $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow ad \equiv bd \pmod{m}$.

Bukti :

$a \equiv b \pmod{m}$, berarti $m \mid a - b \Leftrightarrow md \mid (a - b)d$.

contoh :

$33 \equiv 15 \pmod{9}$

$3 . 11 \equiv 3. 5 \pmod{3. 3}$

$11 \equiv 5 \pmod{3}$

berarti $3 \mid 5 - 11$ atau $3 \mid -6$

4.2 Contoh -Contoh Penggunaan Akibat dari Teori Dasar Kekongruenan

Soal 1. (Penggunaan lemma 4.1.6)

Buktikan bahwa untuk sembarang bilangan asli n, $A = 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ habis dibagi 1897.

Pembahasan :

Perhatikan bahwa 1897 = 271 x 7 dan PBT (271,7) = 1.

Karena 2903 – 464 = 2439 = 9 x 271, berarti 2903 – 464 | 271 atau

$2903 \equiv 464 \pmod{271}$.

Berdasarkan lemma 4.1.6, diperoleh $2903^n \equiv 464^n \pmod{271}$ .....(1)

Karena 803 – 261 = 542 = 2 x 271, berarti 803 – 261 | 271 atau

$803 \equiv 261 \pmod{271}$.

Berdasarkan lemma 4.1.6, diperoleh $803^n \equiv 261^n \pmod{271}$ .....(2).

Dari (1) dan (2) diperoleh 271 | A, atau A habis dibagi 271, terdapat $x \in Z$ sehingga A = x . 271...............................(3)

Karena 2903 – 803 = 2100 = 300 x 7, berarti 2903 – 803 | 7 atau

$2903 \equiv 803 \pmod{7}$.

Berdasarkan lemma 4.1.6, diperoleh $2903^n \equiv 803^n \pmod{7}$ .....(4)

Karena 464 – 261 = 203 = 29 x 7, berarti 464 – 261 | 7 atau

$464 \equiv 261 \pmod{7}$.

Berdasarkan lemma 4.1.6, diperoleh $464^n \equiv 261^n \pmod{7}$ .....(5).

Dari (4) dan (5) diperoleh 7 | A, atau A habis dibagi 7, terdapat $x \in Z$ sehingga

A = y . 7...............................(6)

Karena 271 | A, 7 | A dan PBT (271,7) = 1, maka 7 . 271 | A atau 1897 | A.

Soal 2. (Penggunaan lemma 4.1.6)

Tunjukkan bahwa 2^{20}-1 habis dibagi 41.

Pembahasan :

Perhatikan bahwa $2^5 \equiv -9 \pmod{41}$

Perhatikan $(2^5)^4 \equiv (-9)^4 \pmod{41}$….(lemma 4.1.6)

$2^{20} \equiv 81.81 - 1 \pmod{41}$, dimana $81 \equiv -1 \pmod{41}$

Sehingga $2^{20}-1 \equiv 81.81 - 1 \pmod{41}$

$\equiv 1 - 1 \pmod{41}$

$\equiv 0 \pmod{41}$

Jadi 2^{20}-1 habis dibagi 41 atau 41 | 2^{20}-1

Soal 3. (Penggunaan lemma 4.1.6)

Tentukan bilangan satuan dari 13^{2006}

Pembahasan :

Perhatikan bahwa 2006 = 4 x 501 + 2

Maka 13^{2006} (mod 10) $\equiv 13^{4 \times 501 + 2}$ (mod 10)

$\equiv (13)^{4 \times 501} . (13)^2 \pmod{10}$

$\equiv (3)^{4 \times 501} \pmod{10} \times (3)^2 \pmod{10}$

$\equiv (81)^{501} \pmod{10} \times 9 \pmod{10}$

$\equiv 1^{501} \pmod{10} \times 9 \pmod{10}$

$\equiv (1 \times 9) \pmod{10}$

$\equiv 9 \pmod{10}$

Jadi bilangan satuan dari 13^{2006} adalah 9.

Soal 4. (Penggunaan lemma 4.1.4 dan lemma 4.1.6)

Tentukan angka satuan bilangan 1997^{1991}.

(Soal seleksi awal olimpiade Matematika Hongkong, 1990- 1991)

Pembahasan :

Berdasarkan lemma 4.1.4 dan lemma 4.1.6 maka

$1997^{1991} \equiv 1997^{1991} \bmod (10)$

$\equiv (199 \times 10 + 7)^{1991} \bmod (10)$ ....(lemma 4.1.4)

$\equiv 7^{1991} \bmod (10)$

$\equiv 7^{4 \times 497 + 3} \bmod (10)$ .... (lemma 4.1.6)

$\equiv 2421^{497} . 343 \bmod (10)$

$\equiv 3 \bmod (10)$

Jadi angka satuan bilangan 1997^{1991} adalah 3.

Soal 5. (Penggunaan lemma 4.1.2)

Cari bilangan bulat positif terkecil n sehingga n meninggalkan sisa berturut – turut 1,2,3,4, dan 5 jika dibagi 2,3,4,5,dan 6.

(Soal SEAMO penang – Malaysia 2005).

Pembahasan :

Berdasarkan definisi 4.1.1.dan lemma 4.1.2, maka diperoleh :

$n \equiv 1 \bmod 2$

$\equiv 2 \bmod 3$

$\equiv 3 \bmod 4$

$\equiv 4 \mod 5$

$\equiv 5 \mod 6$

Akibatnya

$n + 1 \equiv 0 \mod 2$

$\equiv 0 \mod 3$

$\equiv 0 \mod 4$

$\equiv 0 \mod 5$

$\equiv 0 \mod 6$

Jadi n + 1 merupakan kelipatan persekutuan terkecil dari 2, 3, 4, 5,dan 6, yaitu 60.

Soal 6. (Penggunaan lemma 4.1.6)

Buktikan bahwa $(an + b)^m \equiv b^m \mod n$

Pembahasan :

Untuk membuktikan $(an + b)^m \equiv b^m \mod n$ perlu ditunjukkan bahwa terdapat bilangan bulat k sedemikian hingga $(an + b)^m - b^m = kn$.

$$
\begin{aligned}
(an + b)^m - b^m &= [(an)^m + m(an)^{m-1} b + \ldots + m(an)b^{m-1} + b^m] - b \\
&= (an)^m + m(an)^{m-1} b + \ldots + m(an)b^{m-1} + b^m - b^m \\
&= (an)^m + m(an)^{m-1} b + \ldots + m(an)b^{m-1} \\
&= [(a)^m n^{m-1} + m(a)^{m-1} n^{m-2} b + \ldots + m(a)b^{m-1}]\, n
\end{aligned}
$$

Diambil $k = [(a)^m n^{m-1} + m(a)^{m-1} n^{m-2} b + \ldots + m(a)b^{m-1}]$

Maka terbukti bahwa $(an + b)^m - b^m = kn$.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Setelah dibahas beberapa masalah teori bilangan dengan menggunakan teori kekongruenan, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Penyelesaian masalah teori bilangan pada umumnya banyak menggunakan teori kekongruenan.
2. Penyelesaian masalah teori kekongruenan pada teori bilangan ada kalanya dapat diselesaikan dengan menggunakan satu lemma saja, dan ada kalanya diselesaikan dengan menggunakan gabungan beberapa lemma.

5.2 Saran - saran

Pada penelitian ini penulis hanya membahas pengunaan teori kekongruenan pada teori bilangan. Untuk itu penulis menyarankan agar penggunaan teori kekongruenan ini dapat lebih dikembangkan lagi. Mungkin untuk peneliti selanjutnya dapat mengali lebih dalam lagi tentang masalah kekongruenan ini pada bidang geometri dan bidang- bidang lainnya.