APROKSIMASI KUADRAT TERKECIL

TESIS

ELZA MARMORA
06215107

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2008

Aproksimasi Kuadrat Terkecil

Oleh : Elza Marmora
(Dibawah bimbingan I Made Arnawa dan Jenizon)

RINGKASAN

Masalah yang sering dijumpai dalam bidang matematika adalah mencari suatu persamaan yang dapat mewakili suatu kumpulan data percobaan. Aljabar dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem yang tidak konsisten dari persamaan linier.

Penerapan metode kuadrat terkecil di Fisika terdapat pada Hukum Hooke dan Hukum Newton, kemudian dalam ilmu Statistika yaitu Analisis Regresi Linier Berganda dan juga penerapan kuadrat terkecil pada bidang Ekonomi, ilmu Kedokteran dan ilmu lainnya.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mempelajari Aproksimasi Kuadrat Terkecil pada Aljabar Linier, untuk mencari solusi kuadrat terkecil.

Penelitian ini dilakukan empat tahap, pada tahap pertama mengumpulkan literatur, berupa buku dan jurnal, yang berkaitan dengan masalah penelitian. Kemudian dikumpulkan konsep-konsep sebagai landasan pemikiran untuk mencari solusi masalah penelitian, tahap kedua seluruh konsep yang telah dikumpulkan dipelajari dengan mengurutkan, mengklasifikasikan, mengelompokkan dan mempelajari pemakaian aproksimasi pada bidang - bidang ilmu lainnya, untuk tahap ketiga dilakukan pembahasan tentang Aproksimasi kuadrat secara Aljabar Linier yang meliputi pembuktian Teorema dan memberikan contoh – contoh penyelesaian secara solusi kuadrat terkecil dan pada tahap ke empat mengambil kesimpulan dan saran.

Dari hasil penelitian ini menunjukkan bahwa untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linier yang tidak konsisten dari persamaan $A\vec{X} = \vec{b}$ mempunyai solusi kuadrat terkecil yaitu solusi dari $A\vec{X} = \mathrm{Pr}\,oyW(\vec{b})$ dan $(A^t A)\vec{X} = A^t\vec{b}$.

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Dengan ini saya menyatakan bahwa tesis yang saya tulis ini dengan judul **"Aproksimasi Kuadrat Terkecil"** adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan merupakan ciplakan dari orang lain kecuali kutipan yang sumbernya dicantumkan dan belum pernah dipublikasikan. Semua sumber data dan informasi yang digunakan telah dinyatakan secara jelas dan dapat diperiksa kebenarannya.

Jika dikemudian hari pernyataan yang saya buat ini ternyata tidak benar, maka status kelulusan dan gelar yang saya peroleh menjadi batal dengan sendirinya.

Padang, Juli 2008

Yang membuat pernyataan

Elza Marmora
BP. 06215107

APROKSIMASI KUADRAT TERKECIL

Oleh

ELZA MARMORA
06215107

T e s i s

Sebagai salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Magister Sains
Pada Program Pascasarjana Universitas Andalas

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
2008

Judul Penelitian	: APROKSIMASI KUADRAT TERKECIL
Nama Mahasiswa	: ELZA MARMORA
Nomor Pokok	: 06215107
Program Studi	: MATEMATIKA

Tesis ini telah diuji dan dipertahankan di depan sidang panitia ujian akhir Magister Sains pada Program Pascasarjana Universitas Andalas dan dinyatakan lulus pada tanggal 29 Juli 2008

Menyetujui

1. Komisi Pembimbing

Dr. I Made Arnawa, M.Si
(Ketua)

Jenizon, M.Si
(Anggota)

2. Ketua Program Studi

Jenizon, M.S.i
Nip. 132 206 780

3. Direktur Program Pascasarjana

Prof.Dr.Ir. Novirman Jamarun, M.Sc
Nip. 130 819 552

بسم الله الرحمن الرحيم

Niscaya Allah akan meninggikan orang-orang
yang beriman di antaramu dan orang-orang yang
diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat.
(Q.S. Al Mujaadilah 11)

Berjalanlah kamu di bumi, lalu perhatikan
bagaimana Allah memulai menciptakan makhluk,
kemudian Allah menumbuhkan tumbuh-tumbuhan yang terakhir.
Sesungguhnya Allah Maha Kuasa Atas Segala sesuatu.
(Al- Ankabut 20)

Sesungguhnya setelah Kesusahan itu ada Kemudahan
(Al – Insyirah 5 – 6)

Seiring rasa syukurku atas karuniaMu ...... Ya Allah,
Ku persembahkan karya ini ......
Keharibaan yang tercinta Suamiku Ir. Reflitasman
Ayahanda Alm. Drs. Ramaini dan Ibunda Sumarmi
Mertuaku serta buat Adik- adikku tersayang

Terimalah ini sebagai penghargaan dan terima kasihku,
atas segala kasih sayang, dorongan, semangat, pengorbanan
dan ketabahan serta doa yang diberikan
dalam mengiringi langkah-langkahku.
Entah sampai kapan semua ini dapat kubalas.
Hanya engkaulah ...... Ya Allah ......
yang dapat memberikan balasan yang setimpal.

Selanjutnya kuucapkan terima kasih kepada
Bapak Anwardin.S.Pd ,Mai, Novti, Restu, Yasrizal, Aisal Jafni,
dan buat rekan-rekan SMA 1 Lembang Jaya
serta rekan-rekan S2 Matematika lainnya
atas segala bantuan, dorongan dan semangat yang diberikan.

Semoga Allah melimpahkan manfaat dari hasil ini semua.
Aamin Yarabbal 'Alamiin.

(Elza Marmora)

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Selayo Sumatera Barat pada tanggal 28 Juni 1969 sebagai anak kedua dari sepuluh bersaudara dari pasangan Drs. Ramaini (Alm) dan Sumarmi. Penulis menamatkan SD Negeri 1 Selayo pada tahun 1983, SMP Negeri 1 Solok pada tahun 1986 dan SMA Negeri 1 Solok pada tahun 1989. Pendidikan sarjana ditempuh pada Jurusan Pendidikan Matematika FKIP Universitas Bung Hatta Padang dan lulus pada tahun 1994.

Setelah diangkat sebagai PNS pada akhir tahun 1995, penulis ditugaskan pertama kali sebagai staf pengajar di SMP Negeri 4 Sangir dan pada tahun yang sama penulis di Nota tugaskan ke SMA 1 Lembang Jaya Kabupaten Solok sampai saat sekarang.

Pada 19 Juni 1998 penulis melangsungkan pernikahan dengan Ir. Reflitasman, namun sampai saat ini masih belum mendapatkan keturunan dan mudah-mudahan Allah memberkati dan kami segera diberi keturunan.

Selama melaksanakan tugas sebagai staf pengajar di SMA 1 Lembang Jaya, penulis mengikuti:

1. Diklat Penulisan Akademik Bagi Guru SMU Se Sumatera Barat dari tanggal 25 Juli sampai 3 Agustus 2003.
2. Sosialisasi Hasil Pelatihan Seameo – Recsam di Jokyakarta dari 10 sampai 14 Desember 2003.
3. Workshop Pengembangan Bahan Ajar dan Bahan Ujian Berbasis

Teknologi Informatika dan Komunikasi di Jakarta selama 1 Minggu dari tanggal 25 Juli sampai 30 juli 2005.

4. Worshop MGMP Tingkat Nasional di Jakarta dari tanggal 7 sampai 10 September 2005.
5. Worshop Pengembangan Bahan Ajar dan Bahan Ujian Berbasis TIK di Jakarta dari tanggal 22 samapi 27 Agustus 2006.
6. Tahun 2006 sampai sekarang penulis dipercaya sebagai Fasilitator MGMP matematika Tingkat Kabupaten Solok.

Pada tahun 2006 lulus seleksi untuk meneruskan pendidikan pada Pascasarjana Universitas Andalas yang merupakan program dari Dinas Pendidikan Provinsi Sumatera Barat.

KATA PENGANTAR

Assalamu`alaikum Wr. Wb

Syukur kehadirat Illahi atas segala limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga dengan kekuatan-Nyalah penulis dapat menyelesaikan sebuah karya kecil yang merupakan suatu tahap kehidupan yang harus dilalui yaitu sebuah tesis yang berjudul Aproksimasi Kuadrat Terkecil. Tesis ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Pascasarjana Universitas Andalas Padang.

Selanjutnya perkenankanlah penulis mengucapkan terima kasih yang setulusnya kepada:

1. Bapak Prof.Dr.Ir.Novirman Jamarun, M.Sc selaku Direktur Program Pascasarjana.
2. Bapak Jenizon, M.Si selaku Ketua Program Studi Matematika dan sebagai pembimbing yang telah banyak memberikan bantuan , dorongan dan motivasi.
3. Bapak Dr. I Made Arnawa, M.Si sebagai Pembimbing yang penuh perhatian dan kesabaran serta telah meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan nasehat selama pembuatan tesis ini.
4. Bapak Dr. Muhafzan, Ibu Dr. Susila Bahri.M.Si, Bapak Zulakmal.M.Si dan Bapak Narwen, M.Si selaku penguji yang telah memberikan kritikan dan saran.
5. Bapak Anwardin.S.Pd selaku Kepala sekolah SMA 1 Lembang Jaya yang telah memberikan kesempatan dan kelonggaran.

6. " Honey " Ir. Reflitasman , yang selalu memberikan semangat, motivasi yang tulus, dukungan moril dan materil yang sangat berarti bagi penulis.
7. Ibunda tercinta Sumarmi, Rosma .B dan almarhum Drs. Ramaini serta adinda Olfi, Titin dan Hendra yang telah memberikan dorongan, semangat dan do`a yang tak pernah putus kepada penulis.
8. Teman – teman seperjuangan Mai, Novti dan Restu selaku guru dalam belajar dan pak Yas, Jef yang telah memberikan dorongan , bantuan dan motivasi.
9. Bapak / Ibu guru, karyawan / ti SMA 1 Lembang Jaya yang telah memberikan semangat dan bantuan dalam melaksanakan tugas sehari-hari.
10. Semua pihak yang telah membantu pembuatan tesis ini.

Padang , Juli 2008

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Suatu masalah yang sering dijumpai dalam bidang matematika terapan adalah mencari suatu persamaan yang dapat mewakili suatu kumpulan data percobaaan. Pengunaan aljabar dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem yang tak konsisten dari persamaan linier, kemudian untuk mendapatkan hubungan matematika fungsi y = f (x) antara dua variabel x dan y.

Penerapan metode kuadrat terkecil di fisika terdapat pada hukum Hooke dan hukum Newton.

Contoh. Hukum Hooke di dalam Fisika menyatakan bahwa panjang x dari sebuah pegas adalah sebuah fungsi linier dari gaya y yang diterapkan. Jika $y = a + bx$, maka koefisien b dinamakan konstanta pegas. Misalkan sebuah pegas mempunyai ukuran panjang sebesar 6,1 inci (yakni $x = 6{,}1$ bila $y = 0$), dengan gaya sebesar 2 pon, 4 pon, dan 6 pon serta panjang pegas 7,6 inci, 8,7 inci dan 10,4 inci. Akan ditentukan konstanta pegas.

dengan $y = Mv$ untuk $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

untuk menentukan kuadrat terkecil untuk $v = (M'M)^{-1} M'y$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 6{,}1 \\ 1 & 7{,}6 \\ 1 & 8{,}7 \\ 1 & 10{,}4 \end{bmatrix} \quad , \; y = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \quad , \; v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$M'M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6{,}1 & 7{,}6 & 8{,}7 & 10{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6{,}1 \\ 1 & 7{,}6 \\ 1 & 8{,}7 \\ 1 & 10{,}4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 32{,}8 \\ 32{,}8 & 278{,}82 \end{bmatrix}$$

$$M'y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6{,}1 & 7{,}6 & 8{,}7 & 10{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 112{,}4 \end{bmatrix}$$

$$(\, M'M \,)^{-1} = \begin{bmatrix} 7{,}069 & -0{,}83 \\ -0{,}83 & 0{,}10 \end{bmatrix}$$

$$v = (M'M)^{-1} M'y = \begin{bmatrix} 7{,}069 & -0{,}83 \\ -0{,}83 & 0{,}10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 112{,}4 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} -8{,}46 \\ 1{,}28 \end{bmatrix}$$

Jadi konstanta pegas adalah $b = 1{,}28$ pon / inci

Dalam Ilmu Statistika yaitu analisis regresi linier berganda adalah suatu teknik statistika yang digunakan untuk menarik kesimpulan mengenai hubungan antara beberapa variabel di dalam suatu sistem. Model regresi linier berganda digunakan untuk memodelkan antara suatu variabel bebas dan variabel tak bebas.

Contoh. Tentukan persamaan model regresi linier berganda dari data berikut :

Y	X_1	X_2
3	1	2
7	2	4
4	1	2
8	3	4
9	5	4
19	10	8
29	14	14
12	4	8

Penyelesaian.

Y	X_1	X_2	X_1^2	X_2^2	X_1X_2	X_1Y	X_2Y	Y^2
3	1	2	1	4	2	3	6	9
7	2	4	4	16	8	14	28	49
4	1	2	1	4	2	4	8	16
8	3	4	9	16	12	24	32	64
9	5	4	25	16	20	45	36	81
19	10	8	100	64	80	190	152	361
29	14	14	196	196	196	406	406	841
12	4	8	16	64	32	48	96	144
Σ=91	**40**	**46**	**352**	**380**	**352**	**734**	**764**	**1565**

$\Sigma Y = 91$ $\quad\Sigma X_1 = 40$ $\quad\Sigma X_1^2 = 352$

$\Sigma X_2 = 46$ $\quad\Sigma X_2^2 = 380$ $\quad\Sigma Y^2 = 1565$

$\Sigma X_1X_2 = 352$ $\quad\Sigma X_1\mathrm{Y} = 734$ $\quad\Sigma X_2\mathrm{Y} = 764$

$$\text{Matrik Rancangan : } X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} \\ 1 & x_{12} & x_{22} \\ 1 & x_{13} & x_{23} \\ 1 & x_{14} & x_{24} \\ 1 & x_{15} & x_{25} \\ 1 & x_{16} & x_{26} \\ 1 & x_{17} & x_{27} \\ 1 & x_{18} & x_{28} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 10 & 8 \\ 1 & 14 & 14 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vektor Respon : } \quad Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \\ 8 \\ 9 \\ 19 \\ 29 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$X'X = \begin{pmatrix} n & \Sigma x_{11} & \Sigma x_{21} \\ \Sigma x_{11} & \Sigma x_{11}^2 & \Sigma x_{11}x_{21} \\ \Sigma x_{21} & \Sigma x_{11}x_{21} & \Sigma x_{21}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 40 & 46 \\ 40 & 352 & 352 \\ 46 & 352 & 380 \end{pmatrix}$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} \Sigma y_1 \\ \Sigma x_{11} y_1 \\ \Sigma x_{21} y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 91 \\ 734 \\ 764 \end{pmatrix}$$

Untuk menentukan $(X'X)^{-1}$ dilakukan OBE, sehingga didapat

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}4611 & 0{,}0464 & -0{,}0988 \\ 0{,}0464 & 0{,}0432 & -0{,}0457 \\ -0{,}0988 & -0{,}0457 & 0{,}0569 \end{pmatrix}$$

Sehingga $\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = (X'X)^{-1}\, X'Y$

$$= \begin{pmatrix} 0,4611 & 0,0464 & -0,0988 \\ 0,0464 & 0,0432 & -0,0457 \\ -0,0988 & -0,0457 & 0,0569 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 91 \\ 734 \\ 764 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 41,9601 + 34,0576 - 75,4832 \\ 4,2224 + 31,7088 - 34,9148 \\ -0,9908 - 33,5438 + 43,4716 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,5345 \\ 1,0164 \\ 0,9370 \end{pmatrix}$$

Jadi Persamaan Regresi Linier berganda adalah :

$$\hat{Y} = 0,5345 + 1,0164\, X_1 + 0,9370\, X_2$$

Karena banyaknya penerapan – penerapan kuadrat terkecil pada bidang Fisika, Statistika, Ekonomi, Ilmu Kedokteran dan Ilmu lainya, yang menarik penulis untuk membahasnya dalam Aljabar Linier.

1.2. Rumusan Masalah

Dari latar belakang di atas yang menjadi permasalahan adalah bagaimana menyelesaikan suatu sistem persamaan linier yang tidak konsisten.

1.3. Manfaaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan sumbangan terhadap perkembangan pengetahuan dan ilmu tentang Aprosimasi Kuadrat Terkecil pada data dan juga cara mencocokan kuadrat terkecil.

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mempelajari Aproksimasi kuadrat terkecil pada Aljabar Linier, untuk mencari solusi kuadrat terkecil.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Didalam bab ini akan dibahas konsep-konsep dasar dan beberapa teorema penting yang akan digunakan dalam pembahasan, konsep-konsep dasar tersebut adalah sebagai berikut.

2.1. Ruang Vektor Dan Sub Ruang

Definisi 2.1.1 (Jacob, 1990)

V disebut ruang vektor atas lapangan F yang elemen- elemennya disebut vektor-vektor dan $\vec{0} \in V$ disebut vektor nol. V dilengkapi operasi penjumlahan dan perkalian vektor skalar sehingga memenuhi:

1. $(v,+)$ grup abelian, v adalah vektor – vektor di V
2. F . $v \to v$ dengan $(a, v) \to$ av dan $\forall$ a,b $\in$ F dan $\forall$ $v_1, v_2 \in$ V memenuhi:

   a.$v \in$ V

   a. $1.v \in V$
   b. $0.v \in V$
   c. $a.(v_1 + v_2) = av_1 + av_2$
   d. $(a+b)\, v_1 = av_1 + bv_1$
   e. $(a.b)\, v = a(bv)$

Definisi 2.1.2 (Jacob, 1990)

Misalkan V Ruang Vektor dan U $\subseteq$ V, U disebut sub ruang bila U adalah ruang vektor dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar yang sama dengan V

Definisi 2.1.3 (Jacob 1990)

Suatu sub ruang vektor dari F^p adalah himpunan V $\subseteq$ F^p dengan $\vec{0} \in V$, F^p = $\{ x_1, x_2, ...x_p \ / \ x_1, x_2 ......x_p \in F \}$

Sehingga:

1. Jika $v \in V$ dan $a \in F$ maka $av \in V$
2. Jika $v_1, v_2 \in V$ maka $(v_1 + v_2) \in V$

Definisi 2.1.4 (Jacob, 1990)

Misalkan A matriks berukuran m x n yaitu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Baris – baris dari A adalah $R_1 = (a_{11} \ a_{12} .... a_{1n})$

$$R_2 = (a_{21} \ a_{22} .... a_{2n})$$

$$\vdots$$

$$R_m = (a_{m1} \ a_{m2} .... a_{mn})$$

Baris – baris dari A adalah vektor – vektor di F^n. Span sub ruang dari F^n disebut ruang baris dari A ditulis row (A).

Kolom – kolom dari A adalah $c_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $c_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$ .... $c_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$

Kolom – kolom dari A adalah vektor di F^m. Span sub ruang dari F^m disebut ruang kolom dari A ditulis col (A). Sub ruang dari F^n yang isinya himpunan penyelesaian dari$AX = \vec{0}$ disebut ruang null dari A atau disebut juga kernel (A) ditulis Ker (A).

2.2. Kombinasi Linier dan Bebas Linier

Definisi 2.2.1 (Jacob, 1990)

Misalkan $v_1, v_2, \ldots. v_n$ adalah vektor –vektor dan $r_1, r_2, \ldots\ldots r_n$ adalah skalar. Vektor w dikatakan kombinasi linier dari $v_1, v_2, \ldots. v_n$ bila $w = r_1v_1 + r_2v_2 + \ldots\ldots\ldots + r_nv_n$

Teorema 2.2.2 (Jacob, 1990)

Misalkan $v_1, v_2 \ldots\ldots\ldots v_n$ himpunan p vektor dan A di tulis sebagai A = $\{ v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots v_n \}$ berukuran p x n yang mempunyai kolom v_i. $w \in F^p$ adalah kombinasi linier dari $v_1, v_2 \ldots\ldots\ldots v_n$ jika dan hanya jika AX = w mempunyai penyelesaian.

Bukti.

Menurut definisi perkalian matriks, AX = w adalah $(v_1, v_2 \ldots\ldots\ldots v_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = w$

Jika dan hanya jika $x_1v_1 + x_2v_2 + \dots\dots + x_nv_n = w$ sehingga w dapat dibuat sebagai kombinasi linier dari $v_1, v_2 \dots\dots v_n$. Dengan penyelesaian AX = w ekivalen dengan mengekspresikan w sebagai kombinasi linier dari $v_1, v_2 \dots\dots v_n$.

Definisi 2.2.3 (Jacob, 1990)

Vektor-vektor $v_1, v_2, \dots v_n$ dikatakan bebas liner, jika terdapat skalar $r_1, r_2, \dots\dots r_n$ dan $r_1v_1 + r_2v_2 + \dots\dots + r_nv_n = \vec{0}$ maka $r_1 = r_2 = \dots\dots = r_n = 0$. Jika terdapat $v_1, v_2, \dots v_n$ tidak bebas linier, dikatakan $v_1, v_2, \dots v_n$ bergantung linier atau dengan kata lain $v_1, v_2, \dots v_n$ bergantung linier bila terdapat $r_i \neq 0$ untuk suatu i = 1,2, ...m sehingga $r_1v_1 + r_2v_2 + \dots\dots + r_nv_n = \vec{o}$

$$r_i \neq 0 \Rightarrow \frac{r_1}{r_i}v_1 + \dots\dots + v_i + \dots\dots + \frac{r_n}{r_i}v_n = 0$$

2.3. Ruang Hasil Kali Dalam

Definisi 2.3.1 (Jacob, 1990)

Norm (panjang) sebuah ruang vektor V atau mempunyai nilai fungsi real, yang dinyatakan dengan $\| \ \|$ maka berlaku:

a. $\|v\| \geq 0$ untuk semua $v \in V$ dan $\|v\| = 0$ jika dan hanya jika $v = \vec{0}$.

b. $\|kv\| = |k| \, \|v\|$ untuk semua k skalar dan $v \in V$.

c. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ untuk semua $u, v \in V$.

Jika $\| \ \|$ adalah norm (panjang) pada ruang vektor V dan $v, w \in V$ maka jarak antara v dan w dapat dinyatakan dengan $d(v,w) = \|v - w\|$.

Definisi 2.3.2 (Jacob, 1990)

Jika V adalah ruang vektor. Perkalian dalam vektor V x V pada V didefinisikan oleh <, > sehingga berlaku:

a. $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$ untuk semua $u,v \in V$.

b. $\langle ku,v \rangle = k\langle u,v \rangle$ untuk semua $k \in R$ dan $u,v \in V$.

c. $\langle v_1 + v_2, u \rangle = \langle v_1, u \rangle + \langle v_2, u \rangle$ untuk semua $u, v_1, v_2 \in V$.

d. $\langle v,v \rangle \geq 0$ untuk semua $v \in V$ dan $\langle v,v \rangle = 0$ jika dan hanya jika $v = \vec{0}$.

Teorema 2.3.3 (Jacob,1990)

Misalkan $v_1, v_2, ...v_n$ adalah sebuah himpunan ortogonal dari V dengan perkalian dalam < , > maka $v_1, v_2, ...v_n$ bebas linier.

Bukti.

Misalkan $a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n = \vec{0}$ gunakan definisi

$$0 = \left\langle v_i, \vec{0} \right\rangle$$

$$= \langle v_i, a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n \rangle$$

$$= \langle v_i, a_1 v_1 \rangle + ... + \langle v_i, a_n v_n \rangle$$

$$= a_1 \langle v_i, u_1 \rangle + ... + a_i \langle v_i, v_i \rangle + ... + a_n \langle v_i, v_n \rangle$$

$$= a_1 0 + ... + a_i \langle v_i, v_i \rangle + ... + a_n 0$$

$= a_i \langle v_i, v_i \rangle$

Jika $v_i \neq \vec{0}$ maka diperoleh definit positif pada $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$. Jadi $a_i \langle v_i, v_i \rangle = 0$ jika $a_i = 0$, dengan demikian $v_1, v_2, \ldots\ldots. v_n$ bebas linier.

Definisi 2.3.4 (Jacob, 1990)

Jika V adalah ruang vektor $v \in V$, dan < , > adalah suatu hasil kali dalam V, di defenisikan $\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$. Fungsi $\| \; \|$: V → R adalah norm (panjang) pada <, >.

Teorema 2.3.5 (Jacob, 1990)

Jika <, > adalah hasil kali dalam pada V, maka $\| \; \|$: V → R di defenisikan oleh $\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$ adalah norm pada V.

Bukti.

1. Jika $\| \; \|$ adalah definit positif dari kenyataan < , >.
2. Untuk $v \in R$, $k \in R$

   $$\|kv\| = \langle kv, kv \rangle^{1/2} = \left(k\langle v, kv \rangle\right)^{1/2} = \left(k^2 \langle v, v \rangle\right)^{1/2} = |k| \langle v, v \rangle^{1/2} = |k| \|v\|$$

3. Jika $u, v \in V$ maka

   $$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

2.4. Proyeksi

Definisi 2.4.1 (Jacob, 1990)

Jika <, > adalah perkalian dalam pada V dan $u, v \neq \vec{0} \in V$, maka proyeksi ortogonal u pada v adalah : Proy $_v$(u) $= \dfrac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v$

Lema 2.4.2 (Jacob, 1990)

Jika $u, v \in V$ dan <, > perkalian dalam pada V, v dan $(u - proy_v\ (u))$ ortogonal.

Bukti.

Dengan menggunakan defenisi perkalian dalam

$$\langle v, u - proy_v(u)\rangle = \left\langle v, u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v\right\rangle$$

$$= \langle v, u\rangle - \langle v, \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v\ \rangle$$

$$= \langle v, u\rangle - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}\langle v, v\rangle$$

$$= \langle v, u\rangle - \langle u, v\rangle$$

$$\langle v, u - proy_v(u)\rangle = 0$$

Teorema 2.4.3 (Jacob, 1990) (Ketidaksamaan Schwarz)

Jika V adalah vektor perkalian dalam suatu ruang perkalian dalam untuk $u, v \in V$, maka $\langle u, v\rangle \leq \|u\|.\|v\|$ jika dan hanya jika $u = kv$ untuk $k \geq 0$.

Bukti.

Jika $v \neq \vec{0}$, v $\neq$ 0, dan sebuah $proy_v\,(u)$ merupakan skalar pada v, lema dapat membantu $\langle proy_v(u), u - proy_v(u)\rangle = 0$ dengan hasil kali dalam

$$0 \leq \langle\ \langle u - proy_v(u), u - proy_v(u)\rangle\ \rangle$$

$$= \langle u, u - proy_v(u)\rangle - \langle proy_v(u), u - proy_v(u)\rangle = 0$$

$$= [\langle u,u\rangle - \langle u, proy_v(u)\rangle\ ] - 0$$

$$= \langle u,u\rangle - \left\langle u, \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle} v\right\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle - \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\langle u,v\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle - \frac{(\langle u,v\rangle\ )^2}{\langle v,v\rangle}$$

Sehingga $\dfrac{(\langle u,v\rangle)^2}{\langle v,v\rangle} \leq \langle u,u\rangle$

2.5. Ortonormal dan Ortogonal

Definisi 2.5.1 (Jacob, 1990)

Misalkan V adalah perkalian dalam, maka basis $\{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n\}$ adalah basis ortogonal untuk V jika u_i adalah saling ortogonal, misalkan $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ maka i$\neq j$. Jika $\|u_i\| = 1$ maka disebut basis ortonormal.

Definisi 2.5.2 (Leon, 2001)

Dua ruang bagian X dan Y dari R^n dikatakan ortogonal jika $\langle x, y \rangle = 0$ untuk setiap $x \in X$ dan setiap $y \in Y$. Jika X dan Y ortogonal, kita tulis $X \perp Y$.

Definisi 2.5.3 (Leon, 2001)

Misalkan Y adalah ruang bagian dari R^n. Himpunan semua vektor – vektor di dalam R^n yang ortogonal pada setiap vektor di Y akan dinotasikan dengan $Y^\perp$. Jadi $Y^\perp = \{x \in R^n / \langle x, y \rangle = 0 \textit{ untuk setiap } y \in Y\}$. Himpunan $Y^\perp$ disebut komplemen ortogonal dari Y.

Lema 2.5.4 (Jacob, 1990)

Misalkan A matrik riel $m \times n$. Maka $\ker(A) = (row(A))^\perp$ ruang bagian dari R^n.

Bukti.

Dengan menggunakan perkalian matrik $v \in \ker(A)$ jika dan hanya jika $R_i v = 0$ untuk setiap baris R_i di A. Perkalian matrik $R_i v$ merupakan perkalian titik dari R_i dan v dalam R^n, sehingga ruang baris A adalah ruang bagian dari R^n. Span ruang baris dari A menunjukkan bahwa $v \in (row(A))^\perp$ jika $v \in \ker(A)$.

Teorema 2.5.5 (Jacob, 1990)

Misalkan $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n$ adalah basis ortonormal dari perkalian dalam suatu ruang vektor V, maka $v \in V$ dimana $v = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots\ldots + a_nv_n$ dimana $a_i = \langle v, u_i \rangle$.

Bukti.

Jika $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n$ adalah basis di V, kita tahu $v = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots\ldots + a_nv_n$. Akan ditunjukan $a_i = \langle v, u_i \rangle$

$$\langle v, u_i \rangle = \langle a_1 u_1 + a_2 u_2 + ... + a_n u_n, u_i \rangle$$

$$= \langle a_1 u_1, u_i \rangle + ... + \langle a_i u_i, u_i \rangle + ... + \langle a_n u_n, u_i \rangle$$

$$= a_1 \langle u_1, u_i \rangle + ... + a_i \langle u_i, u_i \rangle + ... + a_n \langle u_n, u_i \rangle$$

$$= a_1 0 + ... + a_i 1 + ... + a_n 0$$

$$= a_i$$

Definisi 2.5.6 (Jacob, 1990)

Diberikan W_1 dan W_2 subruang dari V. Maka $V = W_1 \oplus W_2$ jika

1. $W_1 \cap W_2 = \left\{ \vec{0} \right\}$
2. $V = W_1 + W_2$, dimana setiap $v \in V$ dapat ditulis sebagai $v = w_1 + w_2$ dimana $w_1 \in W_1$ dan $w_2 \in W_2$

Lema 2.5.7 (Jacob, 1990)

Diberikan $V = W_1 \oplus W_2$ maka

1. Untuk setiap $v \in V$ dapat digambarkan secara tunggal $v = w_1 + w_2$ dimana $w_1 \in W_1$ dan $w_2 \in W_2$.
2. Jika $\{v_1, ..., v_r\}$ adalah basis untuk W_1 dan $\{u_1, ..., u_s\}$ basis untuk W_2, maka $\{v_1, ... v_r, u_1, ..., u_s\}$ basis untuk V. Dalam bagian $\dim(V) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$.

Bukti.

1. Dalam definisi v ada. Kita tunjukkan ketunggalannya. Diberikan $v = w_1 + w_2 = w_1' + w_2'$ dimana $w_1, w_1' \in W_1$ dan $w_2, w_2' \in W_2$. Diperoleh $(w_1 - w_1') = (w_2' - w_2) \in W_1 \cap W_2$. Berarti $w_1 - w_1' = \vec{0} = w_2' - w_2$ diperoleh $w_1 = w_1'$ dan $w_2 = w_2'$ ini berarti tunggal.

2. Asumsi bahwa $\{v_1,...,v_r\}$ basis untuk W_1 dan $\{u_1,....,u_s\}$ basis untuk W_2. Misalkan $v \in V$ diperoleh $v = w_1 + w_2$ dengan $w_1 \in W_1$ dan $w_2 \in W_2$ dan ditulis $w_1 = a_1v_1 + ... + a_rv_r$ dan $w_2 = b_1u_1 + ... + b_su_s$ maka $v = w_1 + w_2 = a_1v_1 + ... + a_rv_r + b_1u_1 + ... + b_sv_s$. Ini berarti $v_1,....,v_r,u_r,...u_s$ span V. Diberikan $\vec{0} = a_1v_1 + ... + a_rv_r + b_1u_1 + ... + b_su_s$, jika $w_1 = a_1v_1 + ... + a_rv_r$ dan $w_2 = b_1u_1 + ... + b_su_s$ maka diperoleh $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} = w_1 + w_2$, dengan keunikan dibagian (1) memberikan $\vec{0} = w_1$ dan $\vec{0} = w_2$. Karena $v_1,....v_r$ bebas linier berarti $a_1 = 0,.....a_r = 0$ dan $u_1,....u_s$ bebas linier maka $b_1 = 0, b_2 = 0,....,b_s = 0$. Ini berarti $v_1,....,v_r,u_1,...u_s$ bebas linier.

Akibat 2.5.8 (Jacob, 1990)

Diberikan V ruang perkalian dalam dan W subruang dari V.

i. Jika $\dim(V) = n$ dan $\dim(W) = s$, maka $\dim(W^{\perp}) = n - s$.

ii. Untuk setiap $v \in V$ ada tunggal $w_1 \in W$ *dan* $w_2 \in W^{\perp}$ sedemikian hingga

$v = w_1 + w_2$, dalam hal ini $w_1 = \Pr oyW(v)$ *dan* $w_2 = \Pr oyW^{\perp}(v)$ yang memenuhi $\Pr oyW + \Pr oyW^{\perp} = I$

Bukti.

ii. Misalkan $\{v_1,...,v_r\}$ adalah basis ortonormal pada W dan $\{u_1,....,u_s\}$ basis ortonormal untuk $W^{\perp}$. Maka diperoleh $\{v_1,....v_r,u_1,...,u_s\}$ basis ortonormal pada V. Berdasarkan Lema 2.5.7 (1), jika $v \in V$ maka

$$v = \langle v,v_1\rangle v_1 + ... + \langle v,v_r\rangle v_r + \langle v,u_1\rangle u_1 + ... + \langle v,u_s\rangle u_s$$

$$= \left(\langle v,v_1\rangle v_1 + ... + \langle v,v_r\rangle v_r\right) + \left(\langle v,u_1\rangle u_1 + ... + \langle v,u_s\rangle u_s\right)$$

$$= \Pr oyW(v) + \Pr oyW^{\perp}(v)$$

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1. Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan mulai bulan September 2007 sampai dengan bulan April 2008. Tempat penelitian adalah di perpustakaan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas Padang.

3.2. Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan metode studi literatur yang membahas tentang hasil kali dalam, orthogonal dan ortonormal, proyeksi dan solusi-solusi kuadrat terkecil. Pada penelitian ini penulis mencari teori – teori tentang solusi-solusi kuadrat terkecil serta pemakaiannya pada bidang ilmu lainnya. Penulis akan berupaya mengumpulkan literatur (buku dan jurnal ilmiah) yang relevan sebagai sumber utama penelitian. Selanjutnya penulis akan mempelajarinya teori dan menghubungkanya dengan aljabar liner sehingga diperoleh suatu cara untuk mengaproksimasi kuadrat terkecil. Kemudian ditarik kesimpulan tentang aprosimasi kuadrat terkecil pada aljabar linier.

Untuk lebih jelasnya, keseluruhan proses di atas dapat dilakukan 4 tahap, yaitu:

Tahap Pertama

Pada tahap ini peneliti akan mengumpulkan literatur, berupa buku dan jurnal, yang berkaitan dengan masalah penelitian. Kemudian dikumpulkan konsep-konsep sebagai landasan pemikiran untuk mencari solusi masalah penelitian.

Tahap Kedua

Pada tahap ini seluruh konsep yang telah dikumpulkan pada tahap pertama dipelajari dengan mengurutkan, mengklasifikasikan, mengelompokkan dan mempelajari pemakaian aproksimasi pada bidang - bidang ilmu lainnya.

Tahap Ketiga

Pada tahap ini dilakukan pembahasan tentang Aproksimasi kuadrat secara Aljabar Linier yang meliputi:

1. Pembuktian Teorema
2. Memberikan contoh - contoh masalah dan penyelesaian secara solusi kuadrat terkecil.

Tahap Keempat

Pada tahap ini mengambil kesimpulan dan saran berdasarkan tahap tiga, yaitu kesimpulan tentang Aproksimasi Kuadrat Terkecil yang lebih mendalam pada Aljabar Linier.

BAB IV

PEMBAHASAN

4. 1. Aproksimasi Kuadrat Terkecil

Definisi 4.1.1 (Jacob, 1990)

Misalkan A adalah matrik m x n. Vektor $\vec{c} \in R^n$ dinamakan solusi kuadrat terkecil dari sistem $A\vec{X} = \vec{b}$ jika jarak $\left\| A\vec{c} - \vec{b} \right\| = \sqrt{\left\langle A\vec{c} - \vec{b}, A\vec{c} - \vec{b} \right\rangle}$ di R^n adalah minimum (untuk sembarang $\vec{c}$ yang mungkin).

Lema 4.1.2 (Jacob, 1990)

Jika diberikan sistim persamaan $A\vec{X} = \vec{b}$ dan W adalah ruang kolom dari matrik A, maka solusi kuadrat terkecil $A\vec{X} = \vec{b}$ adalah solusi dari sistim persamaan $A\vec{X} = \Pr oyW(\vec{b})$, akibatnya jika $\vec{c}$ adalah solusi kuadrat terkecil dari $A\vec{X} = \vec{b}$, maka $A\vec{c} - \vec{b}$ ortogonal terhadap ruang kolom dari matriks A.

Bukti.

Diberikan sistem persamaan linier $A\vec{X} = \vec{b}$ dan W adalah ruang kolom dari matrik A, akan ditunjukkan sebuah solusi kuadrat terkecil dari $A\vec{X} = \vec{b}$ merupakan solusi dari $A\vec{X} = \Pr oyW(\vec{b})$. Misalkan $w = \Pr oyW(\vec{b})$ dan $v, \in W$, jika $(v-w) \in W$ dan

$(\vec{b} - w\ ) = \vec{b} - \Pr oyW(\vec{b}) \in W^{\perp}$, perhatikan bahwa

$$\left\| \vec{b} - v \right\|^2 = \left\langle \vec{b} - v, \vec{b} - v \right\rangle$$

$$= \left\langle (\vec{b} - w) + (w - v), (\vec{b} - w) + (w - v) \right\rangle$$

$$= \left\langle \vec{b} - w, \vec{b} - w \right\rangle + \left\langle w - v, w - v \right\rangle$$

$$= \left\| \vec{b} - w \right\|^2 + \left\| w - v \right\|^2$$

Karena $\left\| \vec{b} - w \right\|^2 \leq \left\| b \vec{-} w \right\|^2 + \left\| w - v \right\|^2 = \left\| \vec{b} - v \right\|^2$ akibatnya $\left\| \vec{b} - w \right\| \leq \left\| \vec{b} - v \right\|$. $w = \Pr oyW(\vec{b})$

elemen dari ruang kolom A dengan $\left\| \vec{b} - w \right\|$ adalah nilai terkecil. Setiap $A\vec{X} = w$

akan menjadi solusi kuadrat terkecil untuk $A\vec{X} = \vec{b}$. Karena $v \in V$ dan $v \neq w$ akan

mempunyai $\left\| \vec{b} - w \right\| < \left\| \vec{b} - v \right\|$. Jika solusi kuadrat terkecil dari $A\vec{X} = \vec{b}$ adalah $\vec{c}$ maka

$\left\| A\vec{c} - w \right\|$ minimal, Jika $A\vec{c} = w$ dan $\vec{c}$ adalah solusi untuk $A\vec{X} = \Pr oyW(\vec{b})$.

Teorema 4.1.3 (Jacob, 1990)

Jika A adalah matrik $m \times n$, maka solusi kuadrat terkecil dari sistem $A\vec{X} = \vec{b}$ adalah solusi dari sistem $(A' A)\vec{X} = \mathrm{A}'\vec{b}$.

Bukti.

Misalkan W ruang kolom dari A dan menurut Lema 2.5.4 $\mathrm{W}^{\perp} = \mathrm{Ker}(\mathrm{A}')$. Jika $\vec{c}$ adalah solusi kudrat terkecil dari $A\vec{X} = \vec{b}$, maka menurut Lema 4.1.2 $(A\vec{c} - \vec{b}) \in W^{\perp}$. Jika $A'(A\vec{c} - \vec{b}) = \vec{0}$ maka $\mathrm{A}'A\vec{c} = \mathrm{A}'\vec{b}$, karena $\mathrm{A}'A\vec{c} = \mathrm{A}'\vec{b}$ maka $\mathrm{A}\vec{c} - \vec{b} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{A}') = \mathrm{W}^{\perp}$. $\mathrm{A}\vec{c} \in W$ dan $\vec{b} = (A\vec{c}) - (A\vec{c} - \vec{b})$, akibat 2.5.8 (ii) diperoleh $\mathrm{Pr}oyW(\vec{b}) = \mathrm{A}\vec{c} + 0 = \mathrm{A}\vec{c}$. Jadi $\vec{c}$ adalah solusi kuadrat terkecil $\mathrm{A}\vec{X} = \vec{b}$. Solusi kuadrat terkecil dari $A\vec{X} = \vec{b}$ adalah solusi kuadrat terkecil dari $(A'A)\vec{X} = A'\vec{b}$.

4. 2. Contoh – Contoh Solusi Kudrat Terkecil

Contoh 1. Tentukan solusi kuadrat terkecil dari sistem persamaan linier

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\
-x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\
-x_2 + x_3 &= 1 \\
x_1 \qquad + x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

Penyelesian.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{X} = \vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Pr oy_v(u) = \frac{\langle u.v \rangle}{\|v\|^2} v$$

$$\Pr oy_{v_1}(u) = \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left(\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0 + 1^2}\right)^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4+0+0+2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Pr oy_{v_2}(u) = \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left(\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2 + 0}\right)^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4+0-1+0}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Pr oy_{v_3}(u) = \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left(\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}\right)^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4+0+1+2}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{6}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{4} \\ \frac{6}{4} \\ \frac{6}{4} \\ \frac{6}{4} \end{bmatrix}$$

$$\Pr oy_v(u) = \Pr oy_{v_1}(\vec{u}) + \Pr oy_{v_2}(\vec{u}) + \Pr oy_{v_3}(\vec{u})$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6}{4} \\ \frac{6}{4} \\ \frac{6}{4} \\ \frac{6}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{18}{4} \\ \frac{2}{4} \\ \frac{2}{4} \\ \frac{14}{4} \end{bmatrix}$$

$$A\vec{X} = \Pr oy_v(u)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{18}{4} \\ \frac{2}{4} \\ \frac{2}{4} \\ \frac{14}{4} \end{bmatrix}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{18}{4} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (4.1)$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = \frac{2}{4} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (4.2)$$

$$-x_2 + x_3 = \frac{2}{4} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (4.3)$$

$$x_1 + \qquad x_3 = \frac{14}{4} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (4.4)$$

Dari persamaan (4.1) dan (4.2)

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{18}{4}$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = \frac{2}{4}$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; +$$
$$2x_2 + 2x_3 = 5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.5)$$

Dari persamaan (4.5) dan (4..3) di dapat

$$2x_2 + 2x_3 = 5$$
$$-x_2 + x_3 = \frac{2}{4}$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad} \; +$$
$$x_3 = \frac{3}{2} \;, \quad x_2 = 1 \quad dan \quad x_1 = 2$$

Contoh 2 . Tentukan garis kuadrat terkecil dari titik (2,8), (3,10), (-5, -3) dimana W = span $\{ v_1, v_2 \}$ dan $\vec{s} \in R^3$ di mana

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} \;, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \vec{s} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Penyelasain.

Kita menghitung $\mathrm{Pr}\,oyW(\vec{s})$; $R^3 \to R^3$. Karena garis vektor v_1 dan v_2 adalah ortogonal, kita temukan

$$\mathrm{Pr}\,oyW(\vec{s}) = \mathrm{Pr}\,oy_{v_1}(\vec{s}) + \mathrm{Pr}\,oy_{v_2}(\vec{s})$$

$$\text{Proy}_v\,(\text{u}) = \frac{\langle u.v\rangle}{\|v\|^2}v$$

$$\text{Proy}_{v_1}\,(\vec{s}) = \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 2\\3\\-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8\\10\\-3\end{bmatrix}\right\rangle}{\left(\sqrt{2^2+3^2+(-5)^2}\,\right)^2}\begin{bmatrix} 2\\3\\-5\end{bmatrix} = \frac{61}{38}\begin{bmatrix} 2\\3\\-5\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{122}{38}\\ \frac{183}{38}\\ \frac{-305}{38}\end{bmatrix}$$

$$\text{Proy}_{v_2}\,(\vec{s}) = \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8\\10\\-3\end{bmatrix}\right\rangle}{\left(\sqrt{1^2+1^2+1^1}\,\right)^2}\begin{bmatrix} 1\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{15}{3}\begin{bmatrix} 1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\\5\\5\end{bmatrix}$$

$$\text{Pr}\,oyW(\vec{s}) = \begin{bmatrix} \frac{122}{38}\\ \frac{183}{38}\\ \frac{-305}{38}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5\\5\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{312}{38}\\ \frac{373}{38}\\ \frac{-115}{38}\end{bmatrix} = \frac{1}{38}\begin{bmatrix} 312\\373\\-115\end{bmatrix}$$

$$A\vec{X} = \text{Pr}\,oyW(\vec{s})$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1\\ 3 & 1\\ -5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} m\\ b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{312}{38}\\ \frac{373}{38}\\ \frac{-115}{38}\end{bmatrix}$$

$$2m + b = \frac{312}{38}$$

$$3m + b = \frac{373}{38}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; -$$

$$m = \frac{61}{38}, \; b = \frac{190}{38}$$

Jadi garis kuadrat terkecil adalah $m = \dfrac{61}{38}, \; b = \dfrac{190}{38}$

Contoh 3. Tentukan solusi kuadrat terkecil dan proyeksi ortogonal dari b pada ruang kolom A dari sistem persamaan linier $A\vec{X} = \vec{b}$ yang diberikan oleh

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ -2x_1 + 4x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Penyelesaian.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A^t A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 21 \end{bmatrix}$$

$$A^t b = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Sehingga $(A^t A)\vec{X} = A^t \vec{b}$ adalah :

$$\begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$14x_1 \ -3x_2 \ = 1$$
$$-3x_1 \ +21x_2 = 10$$

Jadi solusi kuadrat terkecil adalah $x_1 = \dfrac{17}{95}$, $x_2 = \dfrac{143}{285}$

Proyeksi ortogonal dari b pada ruang kolom dari A adalah :

$$\Pr oyW(\vec{b}) = \Pr oy_{v_1}(\vec{b}) + \Pr oy_{v_2}(\vec{b})$$

$$\Pr oy_{v_1}(b) = \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left(\sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2}\right)^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} \\ \frac{3}{14} \\ \frac{-2}{14} \end{bmatrix}$$

$$\Pr oy_{v_2}(b) = \frac{\left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left(\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}\right)^2} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{10}{21} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-10}{21} \\ \frac{20}{21} \\ \frac{40}{21} \end{bmatrix}$$

$$\Pr oyW(b) = \ \Pr oy_{v_1}(b) + \Pr oy_{v_2}(b)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{14} \\ \frac{3}{14} \\ \frac{-2}{14} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-10}{21} \\ \frac{20}{21} \\ \frac{40}{21} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-119}{294} \\ \frac{343}{294} \\ \frac{518}{294} \end{bmatrix}$$

Jadi proyeksi ortogonal dari b pada ruang kolom A adalah

$$\Pr oyW(b) \quad = \begin{bmatrix} \frac{-119}{294} \\ \frac{343}{294} \\ \frac{518}{294} \end{bmatrix}$$

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Menyelesaikan suatu sistem persamaan linier yang tidak konsisten secara aljabar linier dengan cara memproyeksikan matrik $\vec{b}$ ke ruang kolom matrik A. Sistem persamaan linier $A\vec{X} = \vec{b}$ mempunyai solusi kuadrat terkecil yaitu solusi dari sistem $A\vec{X} = \text{Proy}_w(\vec{b})$ dan solusi dari sistem $A\vec{X} = \vec{b}$ adalah solusi dari sistem $(A^t A)\vec{X} = A^t\vec{b}$.

5.2. Saran

Untuk mempermudah menyelesaikan suatu sistem persamaan linier yang tidak konsisten secara mudah dan cepat, diharapkan kepada peneliti selanjutnya dapat menerapkan dalam bentuk sebuah program.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. 1991, *Aljabar Linier Elementer*, Erlangga, Jakarta.

Anton, H. 2000, *Dasar – dasar Aljabar Linier*, Interaksara, Jakarta

Budhi, W. 1995, *Aljabar Liner*, PT Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.

Jacob, B. 1990, *Linear Algebra*,W.H. Freeman And Company, New York.

Leon, S. 2001, *Aljabar Linier dan Aplikasinya*, Erlangga, Jakarta

Rorress, A. 2005, *Aljabar Linier Elementer*, Erlangga, Jakarta.

Saintek, 2004, *Jurnal Ilmiah Ilmu Pengetahuan dan Teknologi*, Lembaga penelitian Universitas Negeri , Padang.