PENGGUNAAN NILAI EIGEN UNTUK MENENTUKAN JENIS GENOTIP KETURUNAN

TESIS

ZURYATY
06215079

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2008

Penggunan nilai eigen untuk menentukan jenis genotip keturunan

Oleh: Zuryaty

(Di bawah bimbingan DR.Susila Bahri, M.Sc, Narwen, M.Si)

RINGKASAN

Dalam kehidupan sehari-hari sering ditemui masalah perbedaan karakter seseorang, bentuk seseorang, dan perbedaan kemampuan seseorang. Ini merupakan salah satu sifat turunan yang berupa gen yang dibawa dari orang tua yang terdiri dari genotip yang merupakan susunan konstitusi genetika. Pada umumnya penentuan kemungkinan jenis genotip keturunan suatu makhluk hidup ditentukan dengan teori peluang, ternyata kemungkinan jenis genotip keturunan itu dapat ditentukan dengan perhitungan matematika lainnya yaitu menggunakan salah satu cabang matematika aljabar linier.

Tujuan penelitian ini untuk memperlihatkan pemakaian salah satu bahagian ilmu matematika dalam biologi yaitu masalah genetika.

Penelitian ini dilakukan pada Perpustakaan Universitas Andalas Padang dari bulan Januari sampai bulan Mei 2008 dengan mengambil sumber dari studi literatur, buku-buku perpustakaan, jurnal, hasil penelitian, dan konsultasi dengan dosen-dosen pembimbing. Jenis genotip yang ditentukan adalah pemasangan genotip keturunan dengan genotip asal. yaitu dengan merubah kemungkinan pemasangan genotip kebentuk matriks, kemudian ditentukan rumusan umumnya, dari rumusan umum ini diolah secara matematis yaitu menggunakan perhitungan nilai eigen dan vektor eigen sehingga didapat jenis genotip keturunan ke-n dari pemasangan genotip.

R1

Dari hasil penelitian ini dapat disimpulkan bahwa jenis genotip keturunan itu dapat ditentukan dengan menggunakan nilai eigen dan vektor eigen. Hasil pemasangan genotip keturunan dengan genotip asal memiliki jumlah genotip yang berbeda-beda tergantung dengan genotip mana genotip itu dipasangkan, begitu juga untuk menentukan jenis genotip keturunan ke-n untuk n mendekati tak berhingga, jenis genotip asal bisa tidak muncul sama sekali atau semuanya berupa genotip asal, dan ada juga kemungkinan kombinasi dari genotip asal, dari itu disarankan untuk menentukan jenis genotip hasil apabila dipasangkan dengan genotip asal heterozigot.

PENGGUNAAN NILAI EIGEN UNTUK MENENTUKAN JENIS GENOTIP KETURUNAN

OLEH

ZURYATY

06215079

Tesis

Sebagai salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Magister Sains
Pada program Pascasarjana Universitas Andalas

PROGRAM PASCA SARJANA

UNIVERSITAS ANDALAS PADANG

2008

Judul Penelitian : PEGGUNAAN NILAI EIGEN UNTUK MENENTUKAN JENIS GENOTIP KETURUNAN

Nama Mahasiswa : ZURYATY

Nama Buku Pokok : 06 215 079

Program Studi : Matematika

Tesis ini telah diujikan dan pertahankan di depan sidang panitia ujian akhir Magister Sains pada Program Pascasarjana Universitas Andalas dan dinyatakan lulus pada tanggal 14 juli 2008

Menyetujui

1. Komisi pembimbing

DR. Susila Bahri, M.Sc	Narwen, M.Si
Ketua	Anggota

2. Ketua Program Studi	3. Direktur Program Pascasarjana
Jenizon, M.Si	Prof.DR.Ir. Novirman Jamarun, M.Sc
Nip : 132206780	Nip : 130819552

Janganlah engkau berjalan dimuka bumi dengan sombong

Sesungguhnya engkau tiada dapat menembus bumi

Dan tak kan sampai engkau sitinggi gunung

(QS ; Al- Isra' : 37)

Kupersembahkan buat suami tercinta : Asfar

Dan Anak-anak tersayang

Zikra

Afif

Miftah

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 8 Agustus 1962 di Bukit Tinggi, anak keempat dari enam bersaudara. Penulis menamatkan SD pada tahun 1976 di SD Negeri sitapung, SMP pada tahun 1978 di SMP Negeri Sungai Puar dan SMA Negeri Satu Bukittinggi. Penulis menamatkan Program diploma di Fakultas Pendidikan Keguruan Matematika Ilmu Pengetahuan Alam IKIP Padang pada tahun 1986 dan memperoleh gelar Sarjana pada Fakultas Keguruan Ilmu Pendidikan Universitas Muhammaddiyah Sumatera Barat pada tahun 1998 .

Sejak tahun 1987 sampai sekarang penulis ditugaskan sebagai guru bidang studi Matematika di SMA Negeri 1 Padang Panjang. Pada tahun 2006 memperoleh kesempatan meneruskan pendidikan pada program Pascasarjana Universitas Andalas di Padang.

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Saya menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa pernyataan dalam tesis saya yang berjudul: "PENGGUNAAN NILAI EIGEN UNTUK MENENTUKAN JENIS GENOTIP TURUNAN" adalah hasil kerja saya sendiri, dan bukan merupakan jiplakan dari hasil kerja/karya oarang lain, kecuali kutipan yang sumbernya dicantumkan.

Jika dikemudian hari pernyataan ini tidak benar, maka status kelulusan dan gelar yang saya peroleh menjadi batal dengan sendirinya.

Padang, 14 Juli 2008

Yang membuat pernyatan

Zuryaty

KATA PENGANTAR

Segala puji penulis panjatkan kepada Allah Swt yang telah memberikan rahmat dan karuniaNya hingga tesis yang berjudul: Penggunaan Nilai Eigen Untuk Menentukan Jenis Genotip Keturunan, dapat penulis selesaikan dengan baik .

Dengan penuh ketulusan, penulis mengucapkan terima kasih yang sedalam-dalamnya kepada Ibu DR. Susila Bahri, M.Sc dan Bapak Narwen, M.Si yang telah meluangkan waktu dalam membimbing, memberikan petunjuk, masukan dan saran yang sangat berarti dalam penyusunan tesis ini dan terima kasih yang tak terhingga juga ditujukan kepada Bapak Dr. I.Made Arnawa, M.Si, Bapak Dr.Mahafzan, M.Si dan Ibu Nova Noliza Bakar, M.Si sebagai tim penguji dalam seminar proporsal yang telah memberikan masukan sehingga tesis ini dapat penulis selesaikan.

Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada segenap pihak yang telah berperan selama penulis mengikuti pendidikan di jurusan Matematika FMIPA UNAND Padang, antara lain

1. Bapak Jenizon, M.Si selaku ketua jurusan Matematika FMIPA Unand Padang.
2. Bapak Budi Rudianto, M.Si sebagai sekretaris jurusan Matematika Unand Padang
3. Seluruh Staf pengajar di Jurusan Matamatika FMIPA Unand Padang yang telah memberikan ilmu yang bermanfaat.
4. Papa, ibu, kakak dan adik tersayang yang selalu memberikan dorongan dan do'a.
5. Teman-teman mahasiswa S2 Matematika FMIPA Unand Padang, terima kasih atas kebersamaannya.

6. Semua pihak yang telah membantu dalam penulis yang tidak bisa penulis sebutkan satu-persatu, semoga Allah akan membalas semua kebaikannya.

Tak lupa penulis ucapkan terima kasih kepada Dinas Pendidikan Sumatera Barat dan Pemerintahan Daerah Kota Padang Panjang atas bantuan biaya yang telah diterima selama pendidikan pada program magister ini.

Penulis menyadari bahwa tulisan ini masih jauh dari sempurna. Untuk itu penulis terbuka atas segala saran dan kritik demi penyempurnaan tulisan ini. Semoga tulisan ini bermanfaat bagi pembaca pada umumnya dan peminat Matematika khususnya.

Padang, 14 Juli 2008

Penulis

P2

DAFTAR ISI

Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam kehidupan sehari-hari sering ditemui masalah karakter seseorang, bentuk seseorang dan juga kemampuan seseorang yang berbeda-beda. Ini adalah salah satu dari sifat turunan yang dibawa dari orang tua.

Sifat turunan itu terdapat didalam genotip turunan yang merupakan susunan atau konstitusi genetika dari suatu individu yang ada hubungannya dengan fenotip dimana fenotip itu adalah penampakan atau perbedaan sifat dari suatu individu yang tergantung dari genetik asalnya.

Masalah genetik dipelajari secara khusus dalam ilmu genetika. Pada dasarnya genetika mempelajari dua aspek yaitu tentang pewarisan dari kesamaan dan kesamaan variasi sifat antar individu yang sering disebut dengan hereditas. Secara umum, genetika berusaha menjelaskan materi apa saja yang membawa informasi untuk diwariskan. Ilmu genetika dimulai dengan adanya konsep-konsep yang dikemukakan oleh Gregor Mendel (1822-1884).

Ilmu genetika merupakan salah satu cabang ilmu yang mempelajari seluk beluk gen sebagai unit dasar biologis. Ilmu genetika banyak kaitan dengan cabang ilmu lain, salah satunya matematika.

Mendel menemukan pertama kali bahwa sifat pada tanaman mengikuti sijumlah nisbah matematika sederhana yang dikenal dengan "Hukum Pewarisan Mendel", kemudian berkembang menjadi genetika molekuler, genetika sel, genetika kwantitatif dan lain-lain (Suryo, 1996).

Salah satu penerapan matematika dalam genetika adalah penentuan jenis genotip keturunan, dengan menggunakan nilai eigen yang merupakan bahagian dari aljabar linier (Anton, dan Rores, 2004).

1.2 Rumusan Masalah

Seperti yang dijelaskan pada latar belakang, yang menjadi masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan jenis genotip keturunan dengan menggunakan nilai eigen dan vektor eigen. Pada penelitian ini dibatasi hanya pada penentuan jenis genotip turunan *AA, Aa, aa* yang dipasangkan dengan genotip asal kembali yaitu *AA, Aa,* dan *aa.*

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk memperlihatkan pemakaian salah satu bahagian ilmu matematika dalam biologi yaitu dalam masalah genetika.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan sumbangan terhadap ilmu pengetahuan dan menambah khasanah ilmu tentang penentuan jenis genotip dari pemasangan genotip turunan dengan genotip asal.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pengaruh Genetika dalam Penentuan Keturunan

Makhluk hidup mempunyai kromosom yang berbeda-beda jumlahnya, nama kromosom diberikan oleh Waldeyer dalam tahun 1888, sedangkan Morgan dalam tahun 1933 menemukan fungsi kromosom dalam pemindahan sifat-sifat genetik, kromosom tersusun atas molekul DNA yang membawa keterangan genetika.

Setiap kromosom mengandung genotip yang berbeda pula, genotip yaitu susunan atau konstruksi genetika dari suatu individu yang ada hubungannya dengan penampakan atau perbedaan sifat dari suatu individu itu sendiri. Salah satu diantaranya adalah gen yang mewariskan sifat induknya, dimana sifat-sifat yang diwariskan itu diatur oleh gen yang merupakan suatu segmen tertentu dari DNA, dan rincian mengenai penurunan (*transmisi)* gen dari generasi kegenerasi selanjutnya dapat diketahui.

Goodenough (1988) menyatakan persyaratan yang harus dipenuhi material genetika dalam meneruskan informasi keturunan secara berkelanjutan adalah sebagai berikut :

1. Material genetika harus mengandung informasi biologis yang berguna dan terjaga kesinambungan sifatnya.
2. Material genetika harus diperbanyak dan dipindahkan dengan seksama dari generasi selanjutnya.

3. Material genetika harus dapat menterjemahkan infomasi yang terkandung di dalam material genetika itu sehingga akan dihasilkan dan dipertahankan molekul-molekul biologis yang lain dan dapat membuat informasi yang terkandung menjadi bentuk yang produktif.

Pemasangan individu-individu yang lebih dekat hubungannya (*coefficient of relationship*) memperlihatkan persentase gen-gen yang dipunyai kedua individu itu dapat ditentukan, karena setiap individu harus memindahkan genotipnya pada keturunannya, salah satu contohnya adalah galur murni, di mana pada percobaan galur murni merupakan aplikasi nyata dari pemasangan genotip sehingga hasil optimal yaitu semua sifat induk diturunkan.

2.2 Matriks

Bentuk matriks banyak digunakan dalam menyelesaikan persoalan pada aplikasi aljabar linier termasuk dalam menentukan jenis genotip keturunan melalui penentuan nilai eigen dan vektor eigen. Semuanya dimulai dengan merubah hasil pemasangan genotip kedalam bentuk matriks.

Definisi 2.2.1 (Anton, 1988)

Matriks adalah sebuah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri di dalam matriks.

Definisi 2.2.2 (Anton, dan Rores, 2004)

Jika M adalah suatu matriks bujur sangkar maka minor dari entri a_{ij} dinyatakan sebagai $\alpha\, ij$ dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan dari M. Bilangan $(-1)^{(i+j)}$ α_{ij} dinyatakan sebagai C_{ij} dan disebut sebagai kofaktor dari entri a_{ij}.

Definisi 2.2.3 (Leon, 2001)

Determinan dari matriks M berukuran $n \times n$ dinyatakan sebagai det(M), adalah suatu skalar yang diasoasikan dengan matriks M dan didefinisikan secara induktif sebagai :

$$\det(M) = \begin{cases} m_{11} & , jika\ n = 1 \\ \\ m_{11}M_{11} + m_{12}M_{12} + \cdots + m_{1n1n}, & jika\ n > 1 \end{cases}$$

$$\text{di mana } M_{1j} = (-1)^{1+j} \det(\alpha_{1j}), \quad j = 1,\ 2, \cdots, n$$

Adalah kofaktor-kofaktor yang diasosiasikan entri-entri dalam baris pertama dari M. Sedangkan α_{1j} adalah submatriks dari M setelah baris pertama dan kolom ke-j dihilangkan.

Definisi 2.2.4 (Leon, 2001)

Suatu matriks dikatakan memiliki bentuk eselon baris jika

(i). Entri bukan nol pertama dalam setiap baris adalah 1

(ii) Jika baris k tidak seluruhnya mengandung nol, maka banyaknya entri nol dibahagian muka pada baris k + 1 lebih besar dari banyaknya entri nol dibahagian muka pada baris k.

(iii) Jika terdapat baris-baris yang entrinya semuanya adalah nol, maka baris-baris ini berada dibawah baris-baris yang memiliki entri-entri bukan nol.

Defenisi 2.2.5 (Leon, 2001)

Operasi Baris Elementer adalah :

I. Pertukarkan dua baris.

II. Kalikan suatu baris dengan bilangan riil bukan nol.

III.Ganti suatu baris dengan hasil penjumlahannya dengan kelipatan dari baris lain

Proses penggunaan operasi baris I, II dan III untuk mengubah sistem persamaan linear menjadi sistim yang matriks diperbesarnya dalam bentuk eselon baris disebut eliminasi Gauss.

Definisi 2.2.6 (leon, 2001)

Suatu matriks dikatakan memiliki bentuk eselon baris tereduksi jika :

(i) Matriks memiliki bentuk eselon baris

(2) Entri bukan nol pertama dalam setiap baris adalah satu-satunya entri bukan nol dalam kolom yang bersangkutan.

2.3 Ruang Vektor dan Subruang Vektor

Definisi 2.3.1 (Anton, dan Rores, 2004)

Misalkan V adalah suatu himpunan tak kosong dari objek-objek sebarang, di mana dua operasinya didefinisikan, yaitu penjumlahan dan perkalian dengan skalar (bilangan). Operasi penjumlahan (*addition*) dapat diartikan sebagai suatu aturan yang mengasosiasikan setiap pasang objek $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$. Operasi perkalian skalar (*scalar multiplication*) dapat diartikan sebagai suatu aturan yang mengasosiasikan setiap skalar k dan objek $\boldsymbol{u}$ pada V dengan suatu objek $k\boldsymbol{u}$, yang disebut kelipatan skalar (*scalar multiple*) dari $\boldsymbol{u}$ oleh k. Jika aksioma-aksioma berikut dipenuhi oleh semua objek ***u*, *v*, *w*** pada V dan semua skalar k dan l, maka disebut V sebagai ruang vektor (*vector space*) dan objek-objek pada V disebut sebagai vektor.

1. Jika $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah objek-objek pada V, maka $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ berada pada $\boldsymbol{V}$.
2. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.
3. $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$.
4. Di dalam V terdapat suatu objek 0, yang disebut vektor nol (*zero vector*) untuk V, sedemikian rupa sehingga $\boldsymbol{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + 0 = \boldsymbol{u}$ untuk semua $\boldsymbol{u}$ pada V.
5. Untuk setiap $\boldsymbol{u}$ pada V, terdapat suatu objek $-\boldsymbol{u}$ pada V, yang disebut sebagai negatif dari $\boldsymbol{u}$, sedemikian rupa sehingga $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = 0$.
6. Jika k adalah skalar sebarang dan $\boldsymbol{u}$ adalah objek sebarang pada V, maka $k\boldsymbol{u}$ terdapat pada V.
7. $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + kv$.
8. $(k + l)\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{u}$.
9. $k(l\boldsymbol{u}) = (kl)\boldsymbol{u}$.
10. $l\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

Definisi 2.3.2 (Anton, dan Rores, 2004)

Suatu subhimpunan W dari suatu ruang vektor V disebut subruang (*subspace*) dari V jika W itu sendiri merupakan suatu ruang vektor dibawah penjumlahan dan perkalian skalar yang didefenisikan pada V.

Teorema 2.3.3 (Rores, 2004)

Jika W adalah suatu himpunan yang terdiri dari satu atau lebih vektor dari suatu ruang vektor V, maka W adalah sub ruang dari V, jika dan hanya jika syarat-syarat berikut terpenuhi,

a. Jika ***u*** dan ***v*** adalah vektor-vektor pada W, maka ***u*** + ***v*** terletak di W

b. Jika k adalah skalar sebarang dan ***u*** adalah sebarang vektor pada W, maka ***ku*** berada pada W.

Bukti :

Jika W adalah suatu ruang vektor dari V, maka semua aksioma ruang vektor terpenuhi, khususnya aksioma 1 dan 6 yang merupakan syarat dari (a) dan (b) yaitu jika ***u*** dan ***v*** adalah objek-objek pada V, maka ***u*** + ***v*** berada pada V (teorema 1) dan jika k adalah skalar sebarang dan u adalah objek pada V, maka ***ku*** terdapat pada V (teorema 6). Sebaliknya asumsikan syarat (a) dan (b) berlaku. Karena syarat-syarat ini merupakan aksioma 1 dan 6 dari ruang vektor, maka kita hanya perlu menunjukan bahwa W memenuhi aksioma lainnya. Aksioma 2, 3, 7, 8, 9 dan 10 secara otomatis terpenuhi oleh vektor W karena aksioma itu terpenuhi oleh V. Untuk melengkapi bukti hanya dibutuhkan pembuktian oksioma 4 dan 5.

Misalkan ***u*** adalah vektor sebarang pada W. Menurut syarat (b), ***ku*** berada pada W untuk setiap skalar k. Dengan mengambil $k = 0$, sesuai teorema diperoleh $0\boldsymbol{u} = 0$ berada pada W, dan dengan mengambil $k = -1$, maka $(-1)\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$ berada W.

Teorema 2.3.4 (Rores, 2004)

Jika $Mx = 0$ adalah suatu sistem linier homogen yang terdiri dari m persamaan dengan n faktor yang tidak diketahui, maka himpunan vektor solusi adalah subruang dari R^n.

Bukti :

Misalkan W adalah himpunan vektor solusi. Terdapat paling tidak satu vektor pada W, yaitu 0. Untuk menunjukkan bahwa W adalah tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian skalar, maka harus ditunjukan bahwa $\boldsymbol{x}$ dan x' adalah vektor solusi sebarang dan k adalah skalar sebarang, maka $\boldsymbol{x} + x'$ dan $k\boldsymbol{x}$ adalah juga merupakan vektor solusi. Tetapi jika $\boldsymbol{x}$ dan x' adalah vektor solusi, maka

$$M\boldsymbol{x} = 0 \text{ dan } Mx' = 0$$

di mana

$$M(\boldsymbol{x} + x') = M\boldsymbol{x} + Mx'$$

$$= 0 + 0 = 0 \; dan$$

$$M(k\boldsymbol{x}) = k\,M\boldsymbol{x} = k\,0 = 0$$

yang membuktikan $\boldsymbol{x} + x'$ dan $k\boldsymbol{x}$ adalah vektor solusi.

Definisi 2.3.5 (Anton, dan Rores, 2004)

Suatu vektor $\boldsymbol{w}$ disebut suatu kombinasi linier *(linear combination)* dari vektor-vektor $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ jika dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\boldsymbol{w} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + k_r\boldsymbol{v}_r$$

di mana $k_1, k_2, \ldots, k_r$ adalah skalar.

2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Dari pemasangan genotip dapat ditentukan kemungkinan jenis genotip keturunannya dengan merubah bentuk hasil pemasangan kedalam bentuk matriks yang dinamakan matriks M. Nilai eigen adalah salah satu solusi dalam aljabar linier yang dapat digunakan untuk menentukan jenis genotip turunan.

Definisi 2.4.1 (Anton, dan Rores, 2004)

Apabila M adalah matriks $n \times n$, maka vektor taknol $\boldsymbol{x}$ didalam R^n dinamakan vek tor eigen (*eigenvector*) dari M, jika $M\boldsymbol{x}$ adalah kelipatan skalar dari $\boldsymbol{x}$, yakni

$$M\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

untuk skalar sebarang λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen (*eigenvalue*) dari M dan $\boldsymbol{x}$ dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Teorema 2.4.2 (Anton, dan Rores, 2004)

Jika M adalah sebuah matriks $n \times n$ dan λ adalah sebuah bilangan real, maka pernyataan-pernyataan yang berikut ini adalah ekuivalen.

(a) λ adalah nilai eigen dari M.

(b) Sistem persamaan $(\lambda \text{I- } M)\boldsymbol{x} = 0$ mempunyai pemecahan yang tak trivial.

(c) Ada sebuah vektor taknol $\boldsymbol{x}$ di dalam R^n sehingga $M\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$.

(d) λ adalah sebuah solusi dari persamaan karakteristik det $(\lambda \text{I- } M) = 0$.

Bukti :

Pembuktiannya dapat berupa

(a)$\rightarrow$(b)Diasumsikan λ adalah nilai eigen dari M, maka sesuai dengan definisi 2.4.1 maka

$$M\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

dapat diturunkan sehingga diperoleh :

$$\lambda\, \boldsymbol{x} - M\boldsymbol{x} = 0$$

$$\lambda I \boldsymbol{x} - M\boldsymbol{x} = 0$$

$$(\lambda \text{I-} M)\boldsymbol{x} = 0$$

Karena λ adalah nilai eigen dari M maka harus terdapat satu solusi taknol dari persamaan $(\lambda \text{I- } M)\boldsymbol{x} = 0$, solusi taknol akan didapat apabila $\det(\lambda I - M) = 0$

dimana $\det(\lambda I - M) = 0$ ini disebut dengan persamaan karakteristik (*caracteristic equation*) dari matriks *M*, akibatnya persamaan $(\lambda \mathrm{I} - M)\,\boldsymbol{x} = 0$ mempunyai pemecahan tak trivial.

(b) → (a)

Apabila $(\lambda I - M)\boldsymbol{x} = 0$ mempunyai pemecahan tak trivial maka λ merupakan nilai eigen dari M.

(b) → (c)

Karena $\det(\lambda I - M) = 0$ maka didapat nilai eigen, dengan mensubstitusi nilai eigen yang didapat dari persamaan $\det(\lambda I - M) = 0$ maka dapat ditentukan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen yaitu vektor-vektor taknol di dalam ruang solusi $(\lambda \mathrm{I} - M)\,\boldsymbol{x} = 0$. Ruang solusi ini disebut dengan ruang eigen (*eigen space*) dari matriks *M* yang terkait dengan λ, maka $\boldsymbol{x}$ merupakan suatu vektor taknol di dalan R^n sehingga $M\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$.

(c) → (d)

Dengan menyelesaiakan persamaan karakteristik menggunakan ekspansi kovaktor maka didapat nilai iegen atau λ dari *M*, apabila diketahui

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Maka $\det(\lambda \mathrm{I} - M) = 0$ dapat ditulis dengan :

$$\left|\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - m_{11} & -m_{12} & \cdots & -m_{1n} \\ -m_{21} & \lambda - m_{22} & \cdots & -m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{n1} & -m_{n2} & \cdots & \lambda - m_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga didapat nilai eigen dari M yang merupakan pemecahan riil.

Teorema 2.4.3 (Anton, dan Rores, 2004)

Jika $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ adalah nilai-nilai eigen yang berbeda bagi suatu matriks $n \times n$, vektor-vektor eigennya $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\}$ membentuk suatu himpunan bebas linier.

Bukti

Misalkan $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ adalah vektor eigen dari matriks M yang berkaitan dengan beragam nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$. Diasumsikan bahwa $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ tidak bebas linier dan menimbulkan suatu kontradiksi. Oleh karena itu kita dapat menyimpulkan bahwa $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ bebas linier. Karena menurut definisi vektor eigen adalah taknol, $\{\bar{v}\}$adalah bebas linear. Misalkan r interger terbesar sehingga $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_3\}$tidak bebas linier, r memenuhi $1 \leq r \leq k$. Sesuai definisi dari r, $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_3\}$tidak bebas linier. Dengan demikian, skalar $c_1, c_2, \ldots, c_{r+1}$, tidak semuanya nol, sehingga

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \ldots + c_{r+1}\bar{v}_{r+1} = 0 \tag{2.4.3.a}$$

Dengan mengalikan kedua ruas (*) dengan matriks M dan memakaikan

$$M\bar{v}_1 = \lambda_1 \bar{v}_1, \quad M\bar{v}_2 = \lambda_2 \bar{v}_2, \ldots, M\bar{v}_{r+1} = \lambda_{r+1} \bar{v}_{r+1}$$

diperoleh

$$c_1\lambda_1\bar{v}_1 + c_2\lambda_2\bar{v}_2 + \ldots + c_{r+1}\lambda_{r+1}\bar{v}_{r+1} = 0 \qquad (2.4.3.b)$$

Dengan mengalikan kedua sisi (2.4.3.a) dengan λ_{r+1} dan mengurangkan dengan (2.4.3.b) hasilnya :

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})\bar{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1})\bar{v}_2 + \ldots + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})\bar{v}_r = 0$$

Karena $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_3\}$ bebas linier persamaan ini mengimplikasikan bahwa

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1}) = \ldots = c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0$$

Karena $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{r+1}$ berbeda maka diperoleh

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_r = 0 \qquad (2.4.3.c)$$

apabila disubstitusi pada (2.4.3.a) maka

$$c_{r+1}\bar{v}_{r+1} = 0 \qquad (2.4.3.d)$$

Karena vektor eigen taknol maka $c_{r+1} = 0$

Persamaan (2.4.3.c) dan (2.4.3.d) bertentangan dengan fakta bahwa $c_1, c_2, \ldots, c_{r+1}$ tidak semuanya nol dan terbukti $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\}$ membentuk suatu himpunan bebas linier.

2.5 Diagonalisasi

Definisi 2.5.1 (Anton, dan Rores, 2004)

Sebuah matriks bujur sangkar M dikatakan dapat didiagonalisasi (*diagonalizable*) jika terdapat sebuah matrik P yang dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1}MP$ Adalah sebuah matriks diagonal dilambangkan dengan D. Matriks P dikatakan mendiagonalisasikan matriks M.

Teorema 2.5.2 (Anton, dan Rores, 2004)

Jika M adalah sebuah matriks $n\times n$, maka kedua pernyataan berikut ekuivalen

a. M dapat didiagonalisasi.

b. M memiliki n faktor eigen yang bebas linier.

Bukti :

$(a)\rightarrow(b)$, karena M diasumsikan dapat didiagonalisasi, maka terdapat sebuah matriks yang dapat dibalik.

Apabila diketahui P, di mana

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah diagonal, katakan $P^{-1}MP = D$, dimana

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Bedasarkan Definisi 2.5.1 :

$$P^{-1}MP = D$$

$$P\,P^{-1}MP = PD$$

Sehingga

$$MP = PD$$

$$MP = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_{2n} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2.5.1.a)$$

Apabila $p_1, p_2, \ldots, p_n$ merupakan notasi vektor-vektor kolom dari matriks P, maka dari (2.5.1.a) urutan kolom-kolom MP adalah $\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \cdots, \lambda_n p_n$. Sesuai dengan cara penulisan pada matriks, urutan kolom-kolom MP adalah Mp_1, Mp_2. ..., Mp_n. Karena kolom MP berurutan sebagai Mp_1, Mp_2. ..., Mp_n , maka diperoleh

$$Mp_1 = \lambda_1 p_1 \quad Mp_2 = \lambda_2 p_2 , \ldots, \quad Mp_n = \lambda_n p_n. \qquad (2.5.1.b)$$

Karena P dapat dibalik, vektor-vektor kolomnya semua taknol, sehingga berdasarkan (2.5.1.b), $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen dari M, dan $p_1, p_2, \ldots, p_n$ adalah vektor-vektor eigen yang terkait. Karena P dapat dibalik sesuai dengan teorema maka Teorema 2.5.1 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ bebas linier. Dengan demikian M memiliki n vektor eigen yang bebas linier.

$(b) \to (a)$. Asumsikan bahwa M memiliki n vektor eigen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ yang bebas linier, dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ yang terkait, dan misalkan

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

adalah sebuah matriks yang vektor-vektor kolomnya adalah p_1, p_2, ..., p_n. Berdasarkan rumus vektor –vektor kolom dari matriks hasil kali MP adalah

$$Mp_1, Mp_2, ..., Mp_n$$

apabila

$$Mp_1 = \lambda_1 p_1, \quad Mp_2 = \lambda_2 p_2 \quad , ..., \quad Mp_n = \lambda_n p_n.$$ maka

$$MP = \begin{pmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_{2n} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$MP = PD \qquad (2.5.1.c)$$

di mana D adalah matriks diagonal yang memiliki nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sebagai entri-entri utamanya. Karena vektor-vektor kolom matriks P bebas linier, P dapat dibalik

sehingga, persamaan (2.5.1.c) dapat dituliskan sebagai

$$P^{-1}MP = D \qquad (2.5.1.d)$$

berarti M dapat didiagonalisasi.

Apabila kedua sisi pada (2.5.1.d) dipangkatkan maka diperoleh :

$$(P^{-1}MP)^2 = D^2$$

$$P^{-1}MP\,P^{-1}MP =$$

$$P^{-1}M\,I\,M\,P =$$

$$P^{-1}M^2P = D^2$$

$$\vdots$$

$$P^{-1}M^nP = D^n$$

$$D^n = P^{-1}M^nP$$

$$PD^nP^{-1} = PP^{-1}M^nPP^{-1} \quad \text{maka}$$

$$PD^nP^{-1} = IM^nI$$

$$PD^nP^{-1} = M^n$$

$$M^n = PD^nP^{-1} \qquad (2.5.1.e)$$

BAB III

METODOLOGI

3.1 Waktu Dan Tempat

Penelitian ini dilakukan dari bulan Januari sampai dengan Mei 2008 dan bertempat di Perpustakaan Universitas Andalas Padang.

3.2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur, dari buku-buku perpustakaan, jurnal, hasil penelitian, dan konsultasi dengan dosen pembimbing dan teman-teman.

3.3 Langkah Kerja

Langkah-langkah kerja yang dilakukan dalam penelitian ini setelah semua bahan terkumpul adalah sebagai berikut :

1. Menentukan genotip asal.
2. Menentukan kemungkinan hasil pemasangan setiap genotip.
3. Menentukan jenis genotip yang terjadi dengan menggunakan nilai eigen dan vektor eigen.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Menentukan genotip Asal

Setiap makhluk hidup memiliki jumlah kromosom yang berbeda, didalam kromosom itu terdapat beribu-ribu gen, salah satu adalah gen pembawa sifat. Gen yang dipilih adalah gen *A* dan *a* yang berasal dari induk, dimana induk merupakan individu yang memiliki genotip *AA* dan *aa.*

Pemasangan genotip induk akan membentuk genotip *AA, Aa, aa* dan merupakan turunan pertama, apabila turunan selanjutnya dipasangkan kembali dengan genotip yang sama yaitu *AA, Aa, aa* yang merupakan genotip asal, maka jenis genotip turunan akan selalu sama dengan genotip turunan pertama.

Dari pemasangan setiap individu itu dapat ditentukan berapa kemungkinan jenis genotip baru yang terjadi, kemungkinan jenis genotip tiap generasi bisa saja sama, bisa tidak sama, tergantung dengan genotip asal mana dipasangkan tetapi jumlah kemungkinan genotip yang dihasilkan disetiap generasi selalu sama .

4.2 Menentukan Kemungkinan Hasil Setiap Pemasangan Genotip.

Apabila genotip turunan *AA, Aa, aa* dipasangkan lagi dengan genotip asalnya maka keturunannya seperti diagram pohon dibawah ini :

1. Apabila *AA* genotip turunan yang dilambangkan dengan genotip pertama (genotipI)dipasangkan dengan *AA* genotip asal yang dilambangkan dengan

genotip kedua (genotip II) maka diagram pohon kemungkinan genotip hasilnya adalah :

$$
\begin{array}{lll}
 & \nearrow A \longrightarrow & AA \\
A & (\text{ genotip } II_1) & \\
 & \searrow A \longrightarrow & AA \\
(\text{genotip } I_1) & (\text{ genotip } II_2) &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
 & \nearrow A \longrightarrow & AA \\
A & (\text{ genotip } II_1) & \\
 & \searrow A \longrightarrow & AA \\
(\text{genotip } I_2) & (\text{ genotip } II_2) &
\end{array}
$$

Disini kelihatan semua keturunan mempunyai genotip *AA* dan peluangnya sama dengan 1, tidak ada keturunan yang mempunyai genotip *Aa* dan *aa*, keturunannya 100% adalah *AA*.

2. Apabila *AA* genotip turunan (genotipI) dipasangkan dengan *Aa* genotip asal (genotip II) maka hasil perkawinan :

$$
\begin{array}{lll}
 & \nearrow A \longrightarrow & AA \\
A & (\text{ genotip } II_1) & \\
 & \searrow a \longrightarrow & Aa \\
(\text{genotip } I_1) & (\text{ genotip } II_2) &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
 & \nearrow A \longrightarrow & AA \\
A & (\text{ genotip } II_1) & \\
 & \searrow a \longrightarrow & Aa \\
(\text{ genotip } I_2) & (\text{ genotip } II_2) &
\end{array}
$$

Keturunannya 50 % mempunyai genotip *AA* dan 50 % mempunyai genotip *Aa* dengan peluang *AA* sama dengan Aa yaiu $1/2$ dan tidak ada keturunan bergenotip aa.

3. Apabila *AA* genotip turunan pertama (genotip I) dipasangkan dengan *aa* genotip asal (genotipII) maka hasil perkawinannya :

$a \longrightarrow Aa$

A (genotip II_1)

(genotip I_1) $a \longrightarrow Aa$

(genotip II_2)

$a \longrightarrow Aa$

A (genotip II_1)

(genotip I_2) $a \longrightarrow Aa$

(genotip II_2)

Dari pemasangan *AA* dan *aa* ternyata semuanya menghasilkan genotip *Aa*, dengan peluang *Aa* adalah 100 %

4. Apabila *Aa* genotip turunan (genotip I) dipasangkan dengan *Aa* genotip asal (genotip II) maka hasil perkawinananya adalah :

$A \longrightarrow AA$

A (genotip II_1)

(genotip I_1) $a \longrightarrow Aa$

(genotip II_2)

$$a \begin{cases} \to A \longrightarrow aA \quad (\text{genotip } II_1) \\ \to a \longrightarrow aa \quad (\text{genotip } II_2) \end{cases}$$

(genotip I_2)

Dari hasil perkawinan ternyata genotip *AA* dan *aa* adalah sama yaitu 25 %, sedangkan genotip *Aa* adalah 50 % dan berarti peluang *AA* dan *aa* sama yaitu 1/4.

5. Apabila *Aa* genotip turunan (genotipI) dipasangkan dengan *aa* genotip asal (genotip II) maka hasil perkawinannya adalah :

$$A \begin{cases} \to A \longrightarrow Aa \quad (\text{genotip } II_1) \\ \to a \longrightarrow Aa \quad (\text{genotip } II_2) \end{cases}$$

(genotip I_1)

$$a \begin{cases} \to a \longrightarrow aa \quad (\text{genotip } II_1) \\ \to a \longrightarrow aa \quad (\text{genotip } II_2) \end{cases}$$

(genotip I_2)

Dari hasil perkawinan ternyata menghasilkan genotip *Aa* dan *aa* sebanyak 50 % dan berarti peluang *Aa, aa* adalah 1/2., sedangkan peluang *AA* sama dengan0

6. Apabila *aa* genotip turunan (genotip I) dipasangkan dengan *aa* genotip asal (genotip II) maka hasil perkawinannya ada

$$a \begin{cases} \to a \longrightarrow aa \quad (\text{genotip } II_1) \\ \to a \longrightarrow aa \quad (\text{genotip } II_2) \end{cases}$$

(genotip I_1)

$a \longrightarrow aa$
(genotip II_1)

a
(genotip I_2)

$a \longrightarrow aa$
(genotip II_2)

Dari hasil perkawinan ternyata menghasilkan semua genotip *aa*, kejadian *aa* sama dengan 100 %, sehingga peluang kejadian *aa* adalah 1.

Dari diagram pohon di atas dapat ditentukan jenis keturunan dari pemasangan genotip dengan genotip asal dan juga peluang jenis keturunannya. Pemasangan genotip turunan dengan semua genotip asal dapat dibuat dalam bentuk tabel seperti dibawah ini.

Tabel 1 Hasil Pemasangan Genotip Turunan dengan Genotip Asal

genotip asal / genotip turunan	*AA-AA*	*AA-Aa*	*AA-aa*	*Aa-Aa*	*Aa-aa*	*aa-aa*
AA	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
Aa	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
aa	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
Jumlah	1	1	1	1	1	1

Dari Table 1 selain dapat dilihat distribusi pemasangan genotip dengan genotip asal, juga dapat dilihat bahwa jumlah kemungkinan setiap genotip dari setiap pemasangan selalu sama yaitu sama dengan 1.

4.3 Menentukan Jenis Genotip Yang Terjadi Dengan Menggunakan Nilai Eigen

Seperti yang sudah dijelaskan dalam pembatasan masalah maka penulis akan meneliti pemasangan genotip turunan dengan genotip asal, dimana pemasangan genotip itu didapat dari mengambil pemasangan genotip pada Tabel 1 sebagai berikut

4.3.1 Pemasangan Genotip Turunan Dengan Genotip Asal *AA*

Dari Tabel 1 pemasangan genotip turunan dengan genotip asal dapat berupa pasangan dari : *AA-AA, Aa-AA, aa-AA* yang ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

di mana :

$$a_0 + b_0 + c_0 = 1 \qquad (2)$$

a_0, b_0, c_0 adalah genotip asal

Bentuk linier dari persamaan diatas adalah :

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + 1/2 b_0 \\ b_1 &= 1/2 b_0 + c_0 \\ c_1 &= 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Persamaan (3) dapat ditulis dalam bentuk umum :

$$x^1 = M x^0 \qquad (4)$$

di mana

$$x^1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad , \quad x^0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \quad dan \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

di mana a_1 = bagian dari genotip *AA* dalam generasi ke-1

b_1 = bagian dari genotip *Aa* dalam generasi ke-1

c_1 = bagian dari genotip *aa* dalam generasi ke-1

x^1 = genotip turunan ke-1

apabila disubstitusikan nilai n sama dengan 1 sampai dengan n pada persamaan (4) maka :

$$\begin{aligned} x^1 &= Mx^0 \\ x^2 &= Mx^1 = MMx^0 = M^2x^0 \\ x^3 &= Mx^2 = M^3x^0 \\ &\vdots \\ x^n &= M^n x^0 \end{aligned} \tag{5}$$

n = 1, 2, …

di mana a_n = bagian dari genotip *AA* dalam generasi ke-n

b_n = bagian dari genotip *Aa* dalam generasi ke-n

c_n = bagian dari genotip *aa* dalam generasi ke-n

x^n = genotip turunan ke-n

Untuk menentukan nilai eigen dari matriks M terlebih dahulu ditentukan nilai dari persamaan karakteristik $|\lambda I - M| = 0$

$$\text{dengan } M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

maka nilai dari persamaan karakteristik $|\lambda I - M| = 0$ yaitu :

$$\left| \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & \lambda - 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor maka diperoleh nilai diatas adalah

$$(\lambda - 1)\begin{vmatrix} \lambda - 1/2 & -1 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} + (1/2)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} -1 & \lambda - 1/2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 1/2)(\lambda) = 0$$

sehingga didapat nilai-nilai eigen dari M adalah :

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = 0 \tag{6}$$

Dan terdapat ruang solusi dari M misal $\bar{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

yang merupakan himpunan ruang solusi $s = \left\{ \begin{pmatrix} x_{1_1} \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| (\lambda I - M)v \right\} = 0$ (7)

Selanjutnya akan ditentukan vektor eigen dari masing-masing nilai eigen yang diperoleh pada persamaan (6) dengam mensubstitusikan pada persamaan (7) merupakan vektor solusi dari ruang solusi

$$s=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}\lambda-1 & -1/2 & 0\\ 0 & \lambda-1/2 & -1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}v\right\}=0 \tag{8}$$

(a) Untuk $\lambda_1 = 1$ disubstitusikan pada persamaan (8) maka :

$$s=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}0 & -1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right\}=0$$

dengan menggunakan operasi baris elementer maka

$$\begin{pmatrix}0 & -1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ baris kedua ditambah dengan baris 3

$$\approx\begin{pmatrix}0 & -1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ baris pertama ditukar baris ketiga

$$\approx\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1/2 & 0\\ 0 & -1/2 & 0\end{pmatrix}$$ baris ketiga dikurang baris kedua

$$\approx\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

oleh karena itu sistem persamaan mempunyai solusi

$$x_3 = 0$$

$$-1/2x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0$$

$$x_1 = t\,,\, t \neq 0$$

sehingga ruang solusi untuk nilai $\lambda_1 = 1$ adalah :

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, t \in R \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t\,, t \in R \right\}$$

didapat vektor eigen dari M untuk $\lambda_1 = 1$ adalah vektor taknol

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (8a)$$

(b) Untuk $\lambda_2 = ½$ disubstitusikan pada persamaan (8) yaitu

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & \lambda - 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\} = 0$$

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\} = 0$$

dengan menggunakan operasi baris elementer maka

$$\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$ baris ketiga ditambah dengan baris 1/2 baris 2

$$\approx \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

oleh karena itu sistem persamaan mempunyai solusi

$$x_3 = 0$$

$$-1/2x_1 - 1/2x_2 = 0$$

$$1/2x_1 = -1/2x_2$$

$$x_1 = -x_2$$

Apabila $x_2 = s$, maka $x_1 = -s, s \neq 0$

sehingga ruang solusi untuk nilai $\lambda_2 = 1/2$

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ s \\ 0 \end{pmatrix}, s \in R \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s, s \in R \right\}$$

didapat vektor eigen dari M untuk $\lambda_2 = 1/2$ adalah vektor taknol

$$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8b)$$

(c) Untuk $\lambda_3 = 0$ disubstitusikan pada persamaan (8) yaitu :

$$s=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}\lambda-1 & -1/2 & 0\\0 & \lambda-1/2 & -1\\0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right\}=0$$

$$s=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}-1 & -1/2 & 0\\0 & -1/2 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right\}=0$$

tanpa operasi baris elementer didapat solusi dari :

$$\begin{pmatrix}-1 & -1/2 & 0\\0 & -1/2 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

adalah :

$$-1/2x_2-x_3=0$$

$$1/2x_2=-x_3$$

$$x_2=-2x_3$$

apabila $x_3=s$, maka $x_2=-2s, s\neq 0$

$$-x_1-1/2x_2=0$$

$$x_1=-1/2x_2$$

$$x_1=-1/2(-2s)=s$$

sehingga ruang solusi untuk nilai $\lambda_3=0$

$$s=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\-2s\\s\end{pmatrix}, s\in R\right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} s,\ s \in R \right\}$$

sehingga vektor eigen dari M untuk $\lambda_3 = 0$ adalah vektor taknol yaitu

$$\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (8c)$$

Dari (8a), (8b), (8c) maka didapat :

$$P = [v_1 \quad v_2 \quad v_3] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Untuk menentukan matriks P^{-1} ditentukan terlebih dahulu Minor P yang dilambangkan dengan α dan kofaktornya dilambangkan dengan C, sehingga didapat :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Determinan P} = 1$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Adjoin } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

maka :

$$P^{-1} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dengan menurunkan rumus D, untuk menentukan bentuk explisit dari x^n ditentukan terlebih dahulu D^n, karena P matriks 3×3 maka

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$$

maka D^n dari P adalah :

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dengan diagonalisasi maka akan diperoleh :

$$M^n = P\ D^n P^{-1}$$

Dari uraian diatas baru dapat dicari hasil dari pasangan yang terjadi dengan menyelesaikan persamaan (5) yaitu :

$$\mathrm{x}^n = M^n x^0$$

$$x^n = P D^n P^{-1} x^0$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -(1/2)^n & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

$$x^n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 1-(1/2)^n+0 & 1-2(1/2)^n+0 \\ 0+0+0 & 0+(1/2)^n+0 & 0+2(1/2)^n+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1-(1/2)^n & 1-(1/2)^{-1}(1/2)^n \\ 0 & (1/2)^n & (1/2)^{-1}(1/2)^n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_0 + b_0 - (1/2)^n b_0 + c_0 - (1/2)^{n-1} c_0 \\ (1/2)^n b_0 + (1/2)^{n-1} c_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_0 + b_0 + c_0 - (1/2)^n b_0 - (1/2)^{n-1} c_0 \\ (1/2)^n b_0 + (1/2)^{n-1} c_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (1/2)^n b_0 - (1/2)^{n-1} c_0 \\ (1/2)^n b_0 + (1/2)^{n-1} c_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dengan diketahui M maka didapat rumusan genotip keturunan sebagai berikut

:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 - (1/2)^n b_0 - (1/2)^{n-1} c_0 \\ b_n &= (1/2)^n b_0 + (1/2)^{n-1} c_0 \\ c_n &= 0 \end{aligned} \qquad (9)$$

$$n = 1,2,\ldots$$

Rumus di atas (9) merupakan rumus-rumus eksplisit dari ketiga genotip pada generasi ke- n, apabila kita ingin mengetahui turunan ketiga dari pemasangan genotip ini maka dapat ditentukan dengan memakai rumus (9) dengan mensubstitusi n sama dengan 3 sehingga

$$a_3 = 1 - (1/2)^3 (1/2) - (1/2)^{3-1}.0$$

$$= 1 - (1/8)(1/2) - 1/4.0$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - 1/16 \\
&= 15/16 \\
b_3 &= (1/2)^3(1/2) + (1/2)^2.0 \\
&= 1/16 \\
c_3 &= 0
\end{aligned}
$$

yang berarti genotip *AA* akan dihasilkan 15/16 dari jumlah keturunan, genotip *Aa* akan dihasilkan 1/16 dari jumlah keturunan sedangkan genotip *aa* tidak ada pada generasi ketiga.

Untuk turunan ke-*n* yang tak berhingga maka $(1/2)^n$ cenderung menuju 0. akibatnya apabila disubstitusikan pada rumus (9) maka :

$a_n \longrightarrow 1$ yang berarti genotip *AA* yang dihasilkan semua

$b_n \longrightarrow 0$ genotip *Aa* tidak dihasilkan

$c_n \longrightarrow 0$ genotip *aa* juga tidak dihasilkan

Jadi untuk *n* mendekati takberhingga dengan perhitungan limit maka menghasilkan populasi yang hanya mengandung *AA*

4.3.2 Pemasangan Genotip Turunan Dengan Genotip Asal *Aa*

Dari Tabel 1 pemasangan genotip *AA-Aa, Aa-Aa, aa-Aa* dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$
\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \qquad (1)
$$

di mana :

$$a_0 + b_0 + c_0 = 1 \tag{2}$$

a_0 , b_0, c_0 adalah genotip asal

Bentuk linier dari persamaan (1) diatas adalah :

$$\begin{aligned} a_1 &= 1/2a_0 + 1/4b_0 \\ b_1 &= 1/2a_0 + 1/2b_0 + 1/2c_0 \\ c_1 &= 1/4b_0 + 1/2c_0 \end{aligned} \tag{3}$$

persamaan (3) dapat ditulis bentuk umum :

$$x^1 = Mx^0 \ , \tag{4}$$

di mana

$$x^1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad , \quad x^0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \quad dan \quad M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

di mana a_1 = bagian dari genotip *AA* dalam generasi ke-1

b_1 = bagian dari genotip *Aa* dalam generasi ke-1

c_1 = bagian dari genotip *aa* dalam generasi ke-1

x^1 = genotip turunan ke-1

apabila disubstitusikan nilai *n* sama denga 1 sampai dengan *n* pada persamaan (4) maka

$$\begin{aligned} x^1 &= Mx^0 \\ x^2 &= Mx^1 = MMx^0 = M^2x^0 \\ x^3 &= Mx^2 = M^3x^0 \\ &\vdots \\ x^n &= M^nx^0 \end{aligned} \tag{5}$$

n = 1, 2,…

di mana a_n = bagian dari genotip *AA* dalam generasi ke-n

b_n = bagian dari genotip *Aa* dalam generasi ke-n

c_n = bagian dari genotip *aa* dalam generasi ke-n

x^n = genotip turunan ke-n

Sama dengan pemasangan genotip dengan *AA* pada pemasangan pertama, untuk menentukan nilai eigen dari matriks *M* terlebih dahulu ditentukan nilai persamaan karakteristik $|\lambda I - M| = 0$

dengan $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 01/2 \end{pmatrix}$

maka nilai dari persamaan karakteristik $|\lambda I - M| = 0$

$$\left| \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1/2 & -1/4 & 0 \\ -1/2 & \lambda-1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/4 & \lambda-1/2 \end{vmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor maka diperoleh nilai diatas adalah :

$$(\lambda-1/2)\begin{vmatrix}\lambda-1/2 & -1/2\\ -1/4 & \lambda-1/2\end{vmatrix}+(1/4)\begin{vmatrix}-1/2 & -1/2\\ 0 & \lambda-1/2\end{vmatrix}+(0)\begin{vmatrix}-1/2 & \lambda-1/2\\ 0 & -1/4\end{vmatrix}=0$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor maka diperoleh nilai diatas adalah

$$(\lambda-1/2)\begin{vmatrix}\lambda-1/2 & -1/2\\ -1/4 & \lambda-1/2\end{vmatrix}+(1/4)\begin{vmatrix}-1/2 & -1/2\\ 0 & \lambda-1/2\end{vmatrix}+(0)\begin{vmatrix}-1/2 & \lambda-1/2\\ 0 & -1/4\end{vmatrix}=0$$

$$(\lambda-1/2)((\lambda-1/2)^2-1/8)-1/8(\lambda-1/2)=0$$

$$(\lambda-1/2)((\lambda-1/2)^2-1/8-1/8)=0$$

$$(\lambda-1/2)((\lambda-1/2)^2-1/4\,)=0$$

$$(\lambda-1/2)(\lambda^2-\lambda)=0$$

$$(\lambda-1/2)(\lambda)(\lambda-1)=0$$

Sehingga didapat nilai-nilai eigen dari M adalah :

$$\lambda_1=1/2,\quad \lambda_2=0,\quad \lambda_3=1 \tag{6}$$

Dan terdapat ruang solusi dari M misal $\bar{v}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$

yang merupakan himpunan ruang solusi $s=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\middle|\,(\lambda I-M)\bar{v}\right\}=0$ (7)

Selanjutnya akan ditentukan vektor eigen dari masing-masing nilai eigen yang diperoleh pada persamaan (6) dengan mensubstitusi pada persamaan (7) yang merupakan vektor solusi dari

$$s=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}\lambda-1/2 & -1/4 & 0\\-1/2 & \lambda-1/2 & -1/2\\0 & -1/4 & \lambda-1/2\end{pmatrix}\bar{v}\right\}=0 \tag{8}$$

(a) Untuk $\lambda_1 = ½$ disubstitusikan pada persamaan (8) maka :

$$s=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}0 & -1/4 & 0\\-1/2 & 0 & -1/2\\0 & -1/4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right\}=0$$

dengan menggunakan operasi baris elementer maka

$$\begin{pmatrix}0 & -1/4 & 0\\-1/2 & 0 & -1/2\\0 & -1/4 & 0\end{pmatrix}$$ baris kedua ditukar dengan baris

pertama

$$\approx\begin{pmatrix}-1/2 & 0 & -1/2\\0 & -1/4 & 0\\0 & -1/4 & 0\end{pmatrix}$$ baris ketiga dikurang baris kedua

$$\approx\begin{pmatrix}-1/2 & 0 & -1/2\\0 & -1/4 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Oleh karena itu sistem persamaan mempunyai solusi

$$x_2=0$$

$$-1/2x_1-1/2x_3=0$$

$$1/2x_1=-1/2x_3$$

$$x_1=-x_3$$

apabila $x_3=s$, maka $x_1=-s, s\neq 0$

sehingga ruang solusi untuk nilai $\lambda_1 = ½$ adalah :

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{pmatrix}, t \in R \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s,\ s \in R \right\}$$

sehingga vektor eigen dari *M* untuk $\lambda_1 = 1/2$ adalah vektor taknol yaitu

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (8a)$$

(b) Untuk $\lambda_2 = 0$ disubstitusikan pada persamaan (8) maka

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1/2 & -1/4 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/4 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\} = 0$$

dengan menggunakan operasi baris elementer maka

$$\begin{pmatrix} -1/2 & -1/4 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/4 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ baris kedua dikurang dengan baris pertama}$$

$$\approx \begin{pmatrix} -1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & -1/2 \\ 0 & -1/4 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ baris ketiga dikurang baris kedua}$$

$$\approx \begin{pmatrix} -1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

oleh karena itu sistem persamaan mempunyai solusi

$$-1/4\,x_2 - 1/2\,x_3 = 0$$

$$1/4x_2 = -1/2x_3$$

$$x_2 = -2x_3$$

apabila $x_3 = s$, maka $x_2 = -2s, s \neq 0$

$$-1/2x_1 - 1/4\,x_2 = 0$$

$$1/2x_1 = -1/4x_2$$

$$x_1 = -1/2x_2$$

$$x_1 = -1/2(-2s) = s$$

sehingga ruang solusi untuk nilai $\lambda_2 = 0$ adalah :

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -2s \\ s \end{pmatrix}, s \in R \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} s, s \in R \right\}$$

didapat vektor eigen dari M untuk $\lambda_2 = 0$ adalah vektor taknol yaitu

$$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8b}$$

(c) Untuk $\lambda_3 = 1$ disubstitusikan pada persamaan (8) maka :

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\} = 0$$

dengan menggunakan operasi baris elementer maka

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$ baris kedua ditambah baris pertama

$$\approx \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$ baris ketiga ditambah baris kedua

$$\approx \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

oleh karena itu sistem persamaan mempunyai solusi

$$1/4x_2 - 1/2x_3 = 0$$

$$1/4x_2 = 1/2x_3$$

$$x_2 = 2x_3$$

apabila $x_3 = s$, maka $x_2 = 2s, s \neq 0$

$$1/2x_1 - 1/4x_2 = 0$$

$$x_1 = 1/2x_2$$

$$x_1 = 1/2(2s) = s$$

sehingga ruang solusi untuk nilai $\lambda_3 = 1$ adalah :

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 2s \\ s \end{pmatrix}, s \in R \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} s, s \in R \right\}$$

sehingga vektor eigen dari M untuk $\lambda_3 = 1$ adalah vektor taknol yaitu

$$\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (8c)$$

Dari (8a),(8b),(8c) maka didapat :

$$P = \left[\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3 \right] = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Untuk menentukan matrik P^{-1} ditentukan terlebih dahulu Minor P yang dilambangkan dengan α dan kofaktornya dilambangkan dengan C, sehingga didapat :

$$\alpha = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} , \quad \text{Determinan } P = 8$$

$$C = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{Adjoin } P = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = 8 \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Dengan menurunkan rumus D, untuk menentukan bentuk explisit dari x^n maka D^n adalah :

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$$

sehingga

$$D^n = \begin{pmatrix} (1/2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dengan diagonalisasi maka akan diperoleh :

$$M^n = P\ D^n P^{-1}$$

Dari uraian di atas baru dapat dicari hasil dari pasangan yang terjadi dengan menyelesaikan persamaan (5) yaitu :

$$x^n = M^n x^0$$

$$x^n = P\,D^n P^{-1} x^0$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1/2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -(1/2)^n & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ (1/2)^n & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

$$x^n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/2)(1/2)^n+0+1/4 & 0+0+1/4 & -(1/2)(1/2)^n+0+1/4 \\ 0+0+1/2 & 0+0+1/2 & 0+0+1/2 \\ -(1/2))(1/2)^n+0+1/4 & 0+0+1/4 & (1/2)(1/2)^n+0+1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1/2)^{n+1}+1/4 & 1/4 & -(1/2)^{n+1}+1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -(1/2)^{n+1}+1/4 & 1/4 & (1/2)^{n+1}+1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1/2)^{n+1}a_0+1/4a_0+1/4b_0-(1/2)^{n+1}c_0+1/4c_0 \\ 1/2a_0+1/2b_0+1/2c_0 \\ -(1/2)^{n+1}a_0+1/4a_0+1/4b_0+(1/2)^{n+1}c_0+1/4c_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/4a_0+1/4b_0+1/4c_0+(1/2)^{n+1}(b_0-c_0) \\ 1/2(a_0+b_0+c_0) \\ 1/4a_0+1/4b_0+1/4c_0-(1/2)^{n+1}(a_0-c_0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4(a_0+b_0+c_0)+(1/2)^{n+1}(b_0-c_0) \\ 1/2(a_0+b_{0+}c_0) \\ 1/4(a_0+b_0+c_0)-(1/2)^{n+1}(a_0-c_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/4(1)+(1/2)^{n+1}(b_0-c_0) \\ 1/2(1) \\ 1/4(1)-(1/2)^{n+1}(a_0-c_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/4+(1/2)^{n+1}(b_0-c_0) \\ (1/2) \\ 1/4-(1/2)^{n+1}(a_0-c_0) \end{pmatrix}$$

Dengan diketahui M maka didapat rumusan genotip keturunan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} a_n &= 1/4+(1/2)^{n+1}(b_0-c_0) \\ b_n &= 1/2 \\ c_n &= 1/4-(1/2)^{n+1}(a_0-c_0) \end{aligned} \tag{9}$$

Rumus di atas rumus (9) merupakan rumus-rumus eksplisit dari ketiga genotip pada generasi ke-*n*. Apabila kita ingin mengetahui turunan kelima dari pemasangan genotip ini maka dapat ditentukan jenis genotip keturunan dengan mensubstitusi nilai n sama dengan lima pada rumus (9) sehingga :

$$\begin{aligned} a_5 &= 1/4 + (1/2)^6(1/2 - 1/2) \\ &= 1/4 \\ b_5 &= 1/2 \\ c_5 &= 1/4 \end{aligned}$$

yang berarti genotip *AA* akan dihasilkan 1/4 dari jumlah keturunan, genotip *Aa* akan dihasilkan 1/2 dari jumlah keturunan dan genotip *aa* adalah ¼ dari jumlah keturunan kelima.

Untuk turunan ke-*n* yang tak berhingga jenis genotip keturunannya dihitung dengan menggunakan limit, maka $(1/2)^n$ cenderung menuju 0, akibatnya :

$a_n \longrightarrow$ 1/4 yang berarti genotip *AA* adalah ¼ dari jumlah genotip hasil

$b_n \longrightarrow$ 1/2 berarti genotip *Aa* adalah ½ dari jumlah genotip hasil

$c_n \longrightarrow$ 1/4 berarti genotip *aa* adalah ¼ dari jumlah genotip hasil

4.3.3 Pemasangan Genotip Turunan Dengan Genotip Asal *aa*

Jenis genotip dari pemasangan genotip *AA, Aa*, dan *aa* bila dipasangkan dengan genotip aa dengan menggunakan nilai eigen dan vektor eigen dimulai dengan mengambil hasil pemasangan genotip pada Tabel 1. Dari Tabel 1 hasil pemasangan *AA-aa, Aa-aa* dan *aa-aa* dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

di mana :

$$a_0 + b_0 + c_0 = 1 \qquad (2)$$

$a_0,\ b_0,\ c_0$ adalah genotip asal

Bentuk linier dari persamaan (1) diatas adalah :

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ b_1 &= a_0 + 1/2b_0 \\ c_1 &= 1/2b_0 + c_0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Persamaan (3) dapat ditulis bentuk umum :

$$x^1 = M x^0 \ , \qquad (4)$$

di mana

$$x^1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad , \quad x^0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \quad dan \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

di mana a_1 = bagian dari genotip *AA* dalam generasi ke-1

b_1 = bagian dari genotip *Aa* dalam generasi ke-1

c_1 = bagian dari genotip *aa* dalam generasi ke-1

x^1 = genotip turunan ke-1

Apabila disubstitusikan nilai 1 sampai dengan n pada persamaan (4) maka :

$$
\begin{aligned}
x^1 &= Mx^0 \\
x^2 &= Mx^1 = MMx^0 = M^2x^0 \\
x^3 &= Mx^2 = M^3x^0 \\
&\vdots \\
x^n &= M^n x^0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

n = 1, 2, …

di mana a_n = bagian dari genotip *AA* dalam generasi ke-n

b_n = bagian dari genotip *Aa* dalam generasi ke-n

c_n = bagian dari genotip *aa* dalam generasi ke-n

x^n = genotip turunan ke-n

Sama dengan 4.3.1 dan 4.3.2 maka untuk menentukan nilai eigen dari matriks M terlebih dahulu ditentukan nilai persamaan karakteristik $|\lambda I - M| = 0$

dengan $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

maka nilai dari persamaan karakteristik $|\lambda I - M| = 0$

$$\left| \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor maka diperoleh

$$\lambda \begin{vmatrix} \lambda - 1/2 & 0 \\ -1/2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -1 & \lambda - 1/2 \\ 0 & -1/2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda)(\lambda - 1/2)(\lambda - 1) = 0$$

Sehingga didapat nilai-nilai eigen dari M adalah :

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1/2, \quad \lambda_3 = 1 \tag{6}$$

Dan terdapat ruang solusi dari M misal $\bar{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

yang merupakan himpunan ruang solusi $s = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| (\lambda I - M)\bar{v} \right\} = 0$ (7)

Selanjutnya akan ditentukan vektor eigen dari masing-masing nilai eigen yang diperoleh pada persamaan (6) yang disubstitusikan pada persamaan (7) dan merupakan vektor solusi dari ruang solusi

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \bar{v} \right\} = 0 \tag{8}$$

(a) Untuk $\lambda_1 = 0$ disubstitusikan pada persamaan (8) maka :

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\} = 0$$

dengan menggunakan operasi baris elementer maka

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{baris kedua ditukar dengan baris 1}$$

$$\approx \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{baris ketiga ditukar baris ketiga}$$

$$\approx \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{baris pertama dikurang baris kedua}$$

$$\approx \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{kalikan baris kedua dengan -2}$$

$$\approx \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Kalikan baris pertama dengan -1}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

oleh karena itu sistem persamaan mempunyai solusi

$$x_2 + 2x_3 = 0$$

$$x_2 = -2x_3$$

$$x_1 = x_3$$

apabila $x_3 = s$, maka $x_2 = -2s, x_1 = s, s \neq 0$

sehingga ruang solusi untuk nilai $\lambda_1 = 0$ adalah :

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -2s \\ s \end{pmatrix}, t \in R \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} s, s \in R \right\}$$

sehingga vektor eigen dari M untuk $\lambda_1 = 1$ adalah vektor taknol yaitu

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8a}$$

(b) Untuk $\lambda_2 = ½$ disubstitusikan pada persamaan (8) maka

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\} = 0$$

dengan menggunakan operasi baris elementer maka

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ baris kedua ditukar dengan ketiga}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ baris ketiga ditambah 2 kali baris pertama}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{baris kedua kalikan} -2$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{baris pertama kalikan dengan 2}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sistem persamaan mempunyai solusi

$$x_2 + x_3 = 0$$

$$x_2 = -x_3$$

$$x_1 = 0$$

misal : $x_3 = s$, $x_3 = s, s \neq 0$, $s \in R$, sehingga didapat :

$$x_2 = -s$$

$$x_1 = 0$$

sehingga ruang solusi untuk nilai λ_2 = ½ adalah :

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -s \\ s \end{pmatrix}, s \in R \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} s, s \in R \right\}$$

sehingga vektor eigen dari M untuk $\lambda_2 = 1/2$ adalah vektor taknol yaitu

$$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8b}$$

(c) Untuk $\lambda_3 = 1$ disubstitusikan pada persamaan (8) maka

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\} = 0$$

dengan menggunakan operasi baris elementer maka

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Baris kedua ditambah baris pertama}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Baris ketiga ditambah dengan baris kedua}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sistim persamaan mempunyai solusi

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0 \text{ dan } x_3 = t,\ t \neq 0$$

sehingga ruang solusi untuk $\lambda_3 = 1$

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, t \in R \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t, t \in R \right\}$$

sehingga vektor eigen dari M untuk $\lambda_3 = 1$ adalah vektor taknol yaitu

$$\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8c}$$

Dari (8a), (8b), (8c) maka didapat :

$$P = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Untuk menentukan matrik P^{-1} ditentukan terlebih dahulu Minor P yang dilambangkan dengan α dan kofaktornya dilambangkan dengan C, sehingga didapat :

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{Determinan } P = -1$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{Adjoin } P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dengan menurunkan rumus D, untuk menentukan bentuk explisit dari x^n maka

:

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$$

sehingga

$$D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dengan diagonalisasi maka akan diperoleh :

$$M^n = P\ D^n P^{-1}$$

Dari uraian diatas baru dapat dicari hasil dari pasangan yang terjadi dengan menyelesaikan persamaan (5) yaitu :

$$x^n = M^n x^0$$

$$x^n = P D^n P^{-1} x^0$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1/2)^n & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

$$x^n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2(1/2)^n & (1/2)^n & 0 \\ -2(1/2)^n + 1 & -(1/2)^n + 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ (1/2)^{-1}(1/2)^n b_0 + (1/2)^n c_0 \\ -(1/2)^{-1}(1/2)^n a_0 + a_0 - (1/2)^n b_0 + b_0 + c_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ (1/2)^{n-1} b_0 + (1/2)^n c_0 \\ -((1/2)^{n-1} a_0 + (1/2)^n b_0) + a_0 + b_0 + c_0 \end{pmatrix}$$

Dengan diketahui *M* maka didapat rumusan genotip keturunan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
a_n &= 0 \\
b_n &= (1/2)^{n-1} b_0 + (1/2)^n c_0 \\
c_n &= a_0 + b_0 + c_0 - ((1/2)^{n-1} a_0 + (1/2) b_0) \\
&= 1 - ((1/2)^{n-1} a_0 + (1/2)^n b_0) \\
n &= 1, \quad 2, \ldots
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Dari rumus diatas rumus (9) dapat ditentukan kemungkinan jenis genotip dari turunan ke-*n*, penulis mengambil jenis genotip keturunan keempat sebagai contoh, sehingga :

$a_4 = 0$

$b_4 = (1/2)^3(1/2) + (1/2)^4(1/2)$

$= 1/16 + 1/32 = 3/32$

$c_4 = 1 - (1/2)^3(1/2) + (1/2)^4(1/2)$

$= 1 - (1/16 + 1/32) = 29/32$

Rumus diatas merupakan rumus-rumus eksplisit dari ketiga genotip pada generasi ke-*n* yang merupakan genotip permulaan, untuk turunan ke-*n* yang tak berhingga maka $(1/2)^n$ cendrung menuju 0, akibatnya :

$a_n \longrightarrow$ 0 yang berarti genotip *AA* tidak dihasilkan

$b_n \longrightarrow$ 0 genotip *Aa* juga tidak dihasilkan

$c_n \longrightarrow$ 1 berarti seluruh keturunan bergenotip *aa*

Jadi untuk *n* mendekati takberhingga dengan perhitungan limit maka menghasilkan populasi yang hanya mengandung *aa* semuanya.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Dari penelitian ini dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Kemungkinan jenis genotip yang terjadi dapat ditentukan dengan menggunakan nilai Eigen
2.. Hasil pemasangan genotip turunan dengan genotip asal memiliki jumlah genotip yang berbeda-beda tergantung dengan genotip mana genotip asal itu dipasangkan.
3. Pemasangan genotip turunan dengan genotip asal untuk n mendekati tak berhingga adalah :
    a. Apabila genotip turunan *AA, Aa, aa* dipasangkan dengan genotip asal *AA* maka semua turunan mempunyai genotip *AA*
    b. Apabila genotip turunan *AA, Aa, aa* dipasangkan dengan genotip asal *Aa* maka genotip *AA* akan terjadi ¼ , genotip*Aa* akan terjadi ½ dan genotip *aa* akan terjadi ¼ dari jenis genotip hasil
    c. Apabila genotip turunan *AA, Aa, aa* dipasangkan dengan genotip asal aa maka semua turunan mempunyai genotip *aa*.

5.2 Saran

Seperti yang telah penulis teliti ternyata jenis genotip turunan jika dipasangkan dengan genotip asal dapat ditentukan jenis genotip hasilnya dengan menggunakan nilai eigen dan vektor eigen. Oleh karena itu perlu adanya penelitian lanjutan tentang penentuan jenis genotip yang terjadi apabila genotip turunan dipasangkan dengan genotip asal yang heterogen dengan menggunakan nilai eigen.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. 1998. *Aljabar Linier Elementer* ; Alih Bahasa: Patur Siaban, I Nyoman Susila: Erlangga: Jakarta .

Anton, H. dan Rorres C. 2004. *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi* jilid 1; Alih Bahasa: Refina Idriasari, Irzam Harmein; Erlangga:Jakarta.

Anton, H. dan Rorres C. 2004. *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi* jilid 2; Alih AlihBahasa: Refina Idriasari, Irzam Harmein; Erlangga: Jakarta.

Charles,C. 1992. *Aljabar Linier dengan Penerapannya*; Alih Bahasa Bambang Sumantri; Gramedia Pustaka Utama: Jakarta

Goodenough, U. 1984.*Genetika*; Alih Bahasa Adisoe; Erlangga: Jakarta

Jacob, B. 1990. *Linear Algebra*; W.H. Freman and Company; New York

Leon, J, Steven. 1998. *Aljabar Linear Dan Aplikasinya*; Erlangga: Jakarta

Meyer, C.D. 1995. *Matrix Analysis and Applied Linier Algebra*

Program Pascasarjana Universitas Andalas. 1997. *Pedoman Penulisan Proporsal dan Tesis*

Suryo,Ir. 1996.*Genetika*; Fakultas biologi UGM; Proyek Pendidikan Tenaga Akademik Direktoral Jendral Pendidikan Tinggi

Tim Genetika FMIPA Universitas Andalas. 2007. *Modul Kuliah Genetika*