

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam dunia matematika, terdapat lebih dari 75 persen permasalahan ilmiah yang penyelesaiannya melibatkan penyelesaian sistem linear. Permasalahan ilmiah yang cukup rumit dapat direduksi menjadi suatu sistem persamaan linear dengan menggunakan metode matematika modern [9].

Sistem persamaan linear (sistem linear) beserta solusinya adalah salah satu topik penting yang dibahas dalam Aljabar Linear. Sistem persamaan linear berperan di berbagai bidang kehidupan, diantaranya fisika, ekonomi, demografi, perdagangan, teknik, sosiologi, ekologi, genetika [2].

Sistem persamaan linear ada yang mempunyai solusi serta tidak mempunyai solusi. Jika sistem persamaan linear mempunyai solusi maka dikatakan konsisten, sedangkan jika tidak mempunyai solusi maka sistem persamaan linear dikatakan tidak konsisten [2]. Salah satu cara menyelesaikan sistem persamaan linear adalah dengan mengaplikasikan konsep invers matriks koefisien, tetapi faktanya tidak semua matriks koefisien memiliki invers. Jika matriks koefisien tidak memiliki invers, maka solusi sistem persamaan linear dapat dicari dengan menggunakan konsep Solusi Kuadrat Terkecil dan Generalisasi Invers Moore Penrose [4].

Sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dimana $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ dibagi menjadi dua yaitu: sistem persamaan linear dengan matriks koefisien A mempunyai rank penuh dan sistem persamaan linear dengan matriks koefisien A mempunyai rank tidak penuh. Jika m lebih besar dari n ($m > n$) artinya ada lebih banyak persamaan dari pada koefisien yang tidak diketahui, sistem ini disebut sistem kelebihan persamaan (*overdetermined*) dan sistem ini tidak memiliki solusi. Sebaliknya jika n lebih besar dari m ($n > m$) artinya ada lebih banyak koefisien yang tidak diketahui dari pada persamaannya, sistem ini disebut sistem kekurangan persamaan (*underdetermined*) dan sistem ini memiliki tak terhingga solusi [2].

Pada sistem persamaan linear yang tidak konsisten dengan $m > n$, sistem persamaan linear masih tetap memiliki solusi tunggal yang disebut Solusi Kuadrat Terkecil, sehingga untuk memperoleh solusi dari sistem tersebut perlu mencari vektor $\hat{\mathbf{x}}$ yang meminimalkan nilai $\|\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}\|$ dimana nilai $\|\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}\|$ disebut sebagai galat yang diperoleh dari \mathbf{x} yang digunakan untuk penyelesaian sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ [4].

Solusi pendekatan selain dengan Solusi Kuadrat Terkecil dapat juga dicari menggunakan Generalisasi Invers Moore Penrose. Generalisasi Invers Moore Penrose digunakan untuk mencari solusi sistem persamaan linear dengan matriks koefisien bujur sangkar maupun tidak bujur sangkar. Dengan menggunakan Generalisasi Invers Moore Penrose suatu sistem persamaan linear yang tidak konsisten akan didapatkan solusinya, dimana solusi tersebut mendekati dengan norm yang minimal, sehingga dapat dikatakan Generalisasi Invers

Moore Penrose merupakan salah satu cara yang cukup baik untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear.

Pada tugas akhir ini akan ditunjukkan aplikasi dari Generalisasi Invers Moore Penrose untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan matriks koefisien memiliki rank yang penuh atau tidak. Selain itu, juga akan dijelaskan hubungan antara Generalisasi Invers Moore Penrose dan Solusi Kuadrat Terkecil dimana solusi untuk sistem persamaan linear yang didapatkan dari Generalisasi Invers Moore Penrose adalah Solusi Kuadrat Terkecil minimal untuk sistem kelebihan persamaan.

1.2 Rumusan Masalah

Misal diberikan sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan A berukuran $m \times n$ dimana $m > n$ yang memiliki rank penuh atau tidak. Pada tugas akhir ini akan dijelaskan bagaimana prosedur mencari solusi pendekatan dari suatu sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan mengaplikasikan konsep Generalisasi Invers Moore-Penrose dan Solusi Kuadrat Terkecil. Selain itu, akan ditunjukkan bagaimana hubungan antara Generalisasi Invers Moore Penrose dan Solusi Kuadrat Terkecil dalam penyelesaian sistem kelebihan persamaan.

1.3 Batasan Masalah

Pada penulisan tugas akhir ini, permasalahan sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dibatasi untuk entri-entri dari A dan \mathbf{b} elemen bilangan riil dengan A berukuran $m \times n$ dimana $m > n$ yang memiliki rank penuh atau

tidak. Konsep penyelesaian sistem persamaan linear tersebut dibatasi dengan menggunakan konsep Generalisasi Invers Moore Penrose dan Solusi Kuadrat Terkecil.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan, maka tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan solusi sistem persamaan linear dengan mengaplikasikan konsep Generalisasi Invers Moore Penrose dan Solusi Kuadrat Terkecil dengan memperhatikan matriks koefisien A mempunyai rank penuh atau tidak. Kemudian akan ditunjukkan bahwa solusi pendekatan yang didapatkan dari Generalisasi Invers Moore Penrose ini adalah Solusi Kuadrat Terkecil minimal untuk sistem kelebihan persamaan .

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini terdiri dari empat bab, yaitu Bab I Pendahuluan, berisikan: latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan. Bab II Landasan Teori, yang membahas mengenai definisi maupun teorema sebagai dasar acuan yang digunakan dalam penelitian. Bab III Aplikasi Generalisasi Invers Moore Penrose untuk sistem persamaan linear. Bab IV Kesimpulan, berisikan kesimpulan yang diperoleh dari penelitian.