

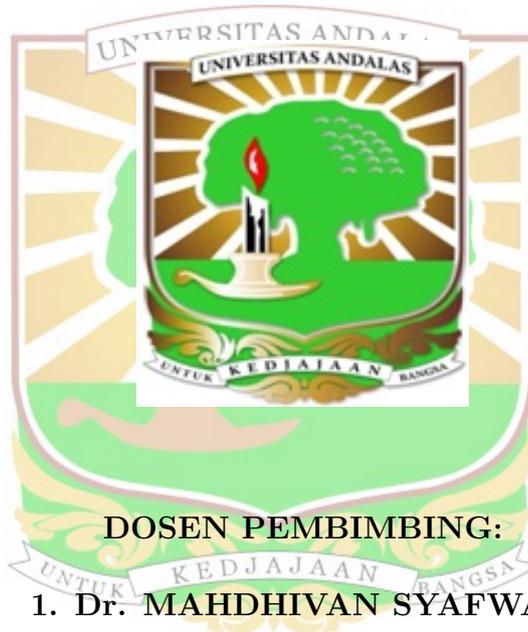
**ANALISIS KESTABILAN DAN VERIFIKASI MODEL
PENYEBARAN PENGGUNA NARKOBA**

SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA

OLEH :

GHEA RATU ANNISA

1310432045



DOSEN PEMBIMBING:

1. Dr. MAHDHIVAN SYAFWAN

2. RIRI LESTARI, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

PADANG

2020

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa :

Nama : Ghea Ratu Annisa
No. Buku Pokok : 1310432045
Jurusan : Matematika
Bidang : Terapan
Judul Skripsi : Analisis Kestabilan dan Verifikasi Model
Penyebaran Pengguna Narkoba

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal 6 Agustus 2020 berdasarkan ketentuan yang berlaku.

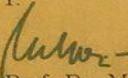
Pembimbing,
1.


Dr. Mahdhivan Syafwan
NIP. 198208032006041001

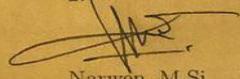
2.


Riri Lestari, M.Si
NIP. 198112302009122002

Penguji,
1.


Prof. Dr. Muhafzan
NIP. 196706021993021001

2.


Narwen, M.Si
NIP. 196704101997021001

3.


Budi Rudianto, M.Si
NIP. 197103271997021004

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand



UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih untuk **Papa** dan **Mama** atas kasih sayang yang sangat besar untuk Ghea. Papa yang selalu bekerja begitu keras untuk keluarganya, mengajarkan untuk menjadi pribadi yang sabar dan pribadi yang lebih baik dari hari ke hari. Mama yang sangat perhatian ke semua anak-anaknya dan mengusahakan apapun demi kebaikan keluarga kami. Terima kasih juga untuk **Abang Galuh**, **Uda Gilang** dan **Gusti** atas kasih sayang yang secara tidak langsung ditunjukkan. Perjuangan Ghea tidak luput berkat doa, usaha dan kasih sayang dari Papa, Mama, Abang, Uda dan Gusti selama ini.

Terima kasih untuk **Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan** dan **Ibu Riri Lestari, M.Si** untuk semua ilmu yang diberikan, waktu dan usaha yang dikorbankan dalam membimbing dan membantu Ghea menyelesaikan tugas akhir ini. Terima kasih Pak Ivan dan Bu Riri yang juga tidak henti memberi Ghea motivasi dan semangat selama ini. Doa dari Ghea, semoga Bapak dan Ibu selalu dalam lindungan Allah SWT, diberikan keberkahan untuk segala aktivitas yang dilakukan dan semoga segala kebaikan yang telah Bapak dan Ibu berikan dibalas dengan hal yang jauh lebih baik nantinya. Aamiin.

Untuk **Gandhi**, terima kasih banyak untuk waktu hampir 2 tahun ini, untuk semua perjalanan, pengalaman dan perjuangan sampai hari ini. Semua usaha kamu dari menemani, memberi semangat, dan motivasi dalam membuat skripsi ini dari awal hingga sidang berakhir, dari subuh sampai larut malam. Dan banyak lagi yang tidak bisa dituliskan semua disini. Berkat kehadiran dan doa kamu juga, aku bisa menyelesaikan tugas akhir ini.

Terima kasih untuk **Olla** dan **Daffa**, dua sejoli yang juga setia mememani dan menyemangati hari-hari Ghea. Semoga kalian juga segera menyelesaikan skripsi. Tetap semangat dan diberi kemudahan. Untuk **Iffah** dan **Tafe**, terima kasih sudah mengajarkan kerasnya perjuangan hidup hehe.

Untuk **Anggi**, **Anjun**, **Arino**, **Deyana**, **Dita**, **Filan**, **Ganang**, **Intan** dan **Pamek**, terima kasih sudah saling berbagi pengalaman pribadi dan profesional di AIESEC. Siang dan malam dihabiskan untuk meeting internal dan external, self dan member development, work achievements, dan banyak hal produktif yang dihabiskan untuk self-growth.

Terima kasih untuk **Dini**, teman seperjuangan dari masa kuliah sampai hari ini. Mengajarkan tetap menjadi pribadi positif walaupun dikeadaan paling sulit. **Nabila** yang masih berjuang untuk S2-nya, semoga tetap diberikan kelancaran untuk menyelesaikan studi disana. **Adib**, **Corex**, **Denok**, **Rezi**, **Sarah**, **Venny**, **Wulan**, dan **Yelly** yang telah menjadi teman bermain semasa kuliah. Semoga kita semua sukses dikarir masing-masing.

Akhirnya, terima kasih untuk teman di **AIESEC**, **HIMATIKA**, **DPM FMIPA**, **Uni-Uda Padang**, **Dua Pintu Coffee**, **Lalito Coffee**, **Cerita Kopi**, **Blend Coffee**, **Kopi Arunika** dan semua pihak yang terlibat yang tidak bisa disebutkan satu persatu, sudah mewarnai hari-hari Ghea selama ini dan sedikit banyak membantu dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

Salam Hangat,

Ghea Ratu Annisa

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, segala puji penulis haturkan atas kehadiran Allah SWT yang telah memberikan rahmat, hidayah, dan karunia-Nya yang berlimpah, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "**Analisis Kestabilan dan Verifikasi Model Penyebaran Pengguna Narkoba**" ini, sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Shalawat dan salam semoga selalu tercurahkan kepada Baginda Rasulullah SAW yang telah menebarkan ilmu dan iman dalam cahaya Islam.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, dorongan, kerjasama maupun bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah membantu dalam penulisan skripsi ini, terutama kepada:

1. Keluarga tercinta, Ayahanda Adang Sutisno dan Ibunda Rozaolina Zahir. Kasih sayang yang tiada henti dan setiap untaian doa yang selalu mengiringi langkah ini. Kakak tersayang Galuh Bagus Utama dan Gilang Bagus Pamungkas serta Adik Gusti Bagus Baihaqi, yang menjadi motivasi dalam setiap langkah ini.
2. Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan dan Ibu Riri Lestari, M.Si, selaku dosen pembimbing yang dengan sabar dan ikhlas telah meluangkan waktu un-

tuk memberikan ilmu, motivasi, dan nasehat dalam menyelesaikan skripsi ini.

3. Bapak Prof. Dr. Muhafzan, Bapak Narwen, M.Si, dan Bapak Budi Rudianto, M. Si, selaku tim penguji yang telah memberikan kritikan dan saran untuk perbaikan dalam penulisan skripsi ini.

4. Bapak Dr. Dodi Devianto selaku dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan ilmu, nasehat serta motivasi kepada penulis selama masa studi.

5. Seluruh Bapak dan Ibu dosen yang telah memberikan ilmu, nasehat, dan pengajaran dengan penuh kesabaran dan pengorbanan, serta keluarga besar Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas yang telah membantu selama penulis melaksanakan studi.

6. Seluruh sahabat dan teman-teman yang telah mendukung serta memberikan bantuan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.



Penulis sangat menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis mengharapkan kritik dan saran untuk kesempurnaan skripsi ini. Penulis berharap agar skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang memerlukan.

Padang, Agustus 2020

Ghea Ratu Annisa, S.Si

ABSTRAK

Tugas akhir ini menjelaskan tentang penurunan model penyebaran pengguna narkoba yang dirumuskan oleh White-Comiskey. Dari model tersebut dilakukan analisis kestabilan titik-titik kesetimbangan endemik. Selanjutnya dilakukan verifikasi model White Comiskey terhadap data empirik dari kasus pengguna narkoba yang terjadi di Sumatera Barat. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa kasus pengguna narkoba di Sumatera Barat akan tetap ada dengan jumlah yang cenderung konstan. Oleh karena itu diperlukan upaya lebih untuk menekan jumlah pengguna narkoba di Sumatera Barat dari tahun ke tahun.

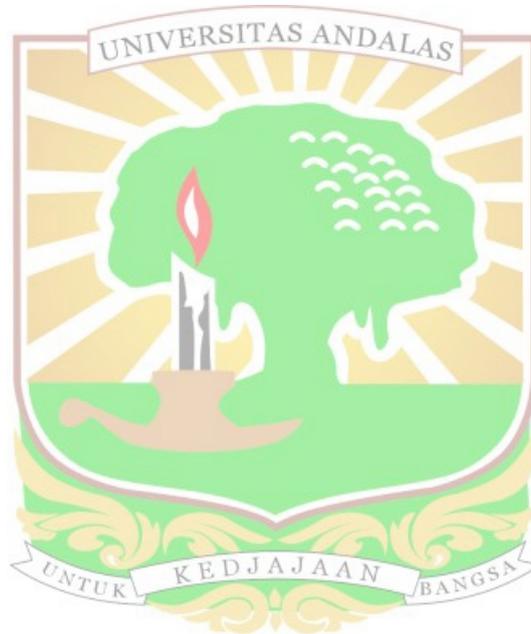
Kata kunci : model White-Comiskey, titik kesetimbangan endemik, analisis kestabilan.



ABSTRACT

This final project explains about the derivation of a model of the spread of drug users formulated by White-Comiskey. From the model, we perform the analysis of stability of the endemic equilibrium points. Next, we verify the White-Comiskey model to the empirical data from the cases of drug users that occurred in West Sumatera. The obtained result indicates that cases of drug users in West Sumatera will continue to exist with a number that tends to be constant. Therefore, more efforts are needed to reduce the number of drug users in West Sumatera from year to year.

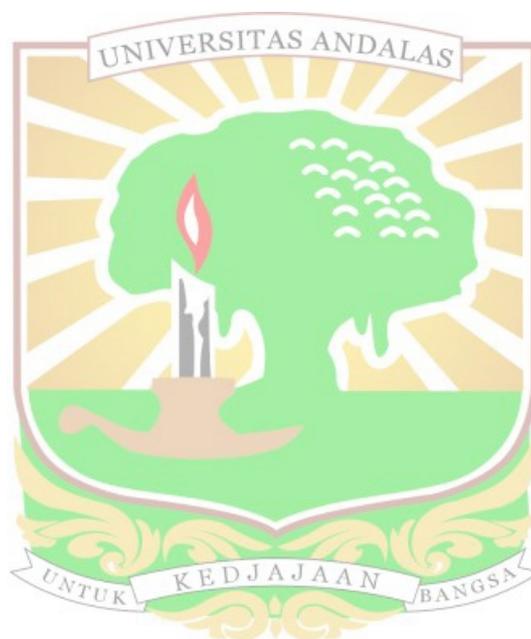
Keywords: the White-Comiskey model, endemic equilibrium point, stability analysis.



DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	ii
ABSTRAK.	iv
DAFTAR ISI.	vi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Pembatasan Masalah	4
1.5 Sistematika Penulisan	4
BAB II LANDASAN TEORI	6
2.1 Sekilas tentang Narkoba	6
2.2 Persamaan Diferensial	9
2.3 Matriks	11
2.4 Kestabilan Sistem	13
2.5 Aturan Tanda Descartes	15
2.6 Kriteria Routh - Hurwitz	16
2.7 Model Epidemik SIRS	17
2.8 Formulasi Model Penyebaran Pengguna Narkoba	19
BAB III ANALISIS MODEL	24
3.1 Titik Kesetimbangan	24
3.2 Analisis Kestabilan	28

BAB IV VERIFIKASI MODEL	33
4.1 Penyederhanaan Model	33
4.2 Verifikasi Model terhadap Data Empirik	34
BAB V PENUTUP	42
5.1 Kesimpulan	42
5.2 Saran	43
DAFTAR PUSTAKA	44



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Kasus penyalahgunaan narkoba di Indonesia sudah menyebar di berbagai kalangan masyarakat, baik pada usia dewasa, remaja maupun usia anak-anak. Kondisi seperti ini tentunya sangat meresahkan dan merugikan bagi masa depan generasi penerus bangsa. Tidak hanya kecanduan, efek samping dari penyalahgunaan bahan berbahaya ini apabila dikonsumsi dalam dosis yang tinggi dapat berujung pada kematian.

Data dari World Drugs Report tahun 2016 menyebutkan setidaknya 1 dari 20 orang dewasa atau seperempat dari jumlah penduduk dunia dalam rentang usia 15-64 tahun telah mengkonsumsi 1 jenis narkoba. Data tersebut juga menyebutkan bahwa penyalahgunaan narkoba di dunia mengakibatkan 207.400 kasus kematian [6].

United Nations Office on Drugs and Crime (UNODC) menyebutkan bahwa saat ini Indonesia menduduki peringkat pertama dalam jumlah pengguna narkoba ditingkat Asean. Hal ini disebabkan Indonesia mudah dimasuki pengedar luar negeri terkhusus untuk jalur laut [2].

Selanjutnya berdasarkan hasil survei tahun 2016 oleh Badan Narkotika Nasional (BNN) dan Pusat Penelitian Kesehatan Universitas Indonesia (PP-KUI), dilaporkan bahwa 2 dari 100 orang pelajar dan mahasiswa di Indone-

sia pernah mengkonsumsi narkoba. Hal ini mengakibatkan angka prevalensi kelompok pelajar dan mahasiswa di Indonesia yang menyalahgunakan narkoba mencapai 1,9%. Hasil survei ini juga menyebutkan angka prevalensi penyalahgunaan narkoba berdasarkan usia: untuk usia di bawah 15 tahun sebesar 1,02%, dalam rentang usia 15-19 tahun sebesar 2,27%, di atas 20 tahun sebesar 1,91%. Lebih lanjut, penyalahgunaan narkoba di Indonesia mengakibatkan sekitar 12.044 orang meninggal setiap tahun atau 33 orang setiap hari [6].

Situasi darurat yang memprihatinkan ini terus saja berkembang. Badan Narkotika Nasional (BNN) mengatakan bahwa masyarakat yang masuk dalam fase ketergantungan berbagai jenis narkoba mencapai hampir 6 juta orang pada tahun 2017. Angka ini belum termasuk pengguna ganda, baik masyarakat yang masih coba-coba maupun pengedar narkoba. Hal ini diperparah dengan kenyataan bahwa pengguna narkoba paling banyak berada dalam rentang usia 24-30 tahun [1].

Disamping itu, data dari Badan Narkotika Nasional Provinsi (BNNP) Sumatera Barat mencatat jumlah pengguna narkoba di Sumbar mencapai 66.612 orang pada tahun 2017. Jumlah ini meningkat dari tahun 2016 sebesar 63 ribu orang dan 2015 sebesar 59 ribu orang. Hal ini menyebabkan pengguna narkoba di Sumatera Barat menduduki peringkat ke-13 dari seluruh provinsi di Indonesia [15]

Kecanduan narkoba tentu saja dapat diobati melalui program rehabilitasi yang disediakan bagi pengguna narkoba. Namun, program tersebut membutuhkan biaya yang sangat besar dan menjadi beban yang berat

dalam sistem kesehatan negara. Kepala Urusan Rumah Tangga Balai Rehabilitasi Penyalahgunaan Narkoba, Lembaga Rehabilitasi Pencegahan Penyalahgunaan Narkoba (LRPPN) mengatakan bahwa rehabilitasi standar bagi pecandu narkoba membutuhkan dana sekitar Rp 20-an juta per orang [24].

Berdasarkan penjelasan di atas, maka perlu dibuat pemodelan matematika yang dapat menggambarkan penyebaran pengguna narkoba. Model matematika penyebaran pengguna narkoba diformulasi pertama kali oleh White - Comiskey pada tahun 2007 [23]. Ada tiga pembagian kelompok dalam model White - Comiskey, yaitu kelompok individu yang rentan menjadi pengguna narkoba, kelompok pengguna narkoba yang tidak dalam masa rehabilitasi dan kelompok pengguna narkoba yang dalam masa rehabilitasi. Pendekatan yang digunakan pada model ini adalah pendekatan model epidemik SIRS (*Susceptible - Infected - Removed - Susceptible*), yaitu individu yang telah berhenti memakai narkoba dapat berkemungkinan kembali menjadi pecandu.

Dalam [4] diketahui terdapat kesalahan kecil dalam perhitungan titik kesetimbangan yang dilakukan oleh White - Comiskey, meskipun hal tersebut tidak mengubah hasilnya secara kualitatif. Kestabilan titik kesetimbangan non endemik pada model White - Comiskey ini juga sudah dibahas kembali dalam [4]. Tugas akhir ini akan melanjutkan kajian dalam [4] untuk menganalisis kestabilan titik kesetimbangan endemik dari model White - Comiskey. Selanjutnya model White - Comiskey tersebut akan diverifikasi terhadap data empirik.

1.2 Perumusan Masalah

Perumusan masalah dalam tugas akhir ini adalah bagaimana analisis kestabilan model White-Comiskey di sekitar titik kesetimbangan endemik dan verifikasi model White-Comiskey terhadap data pengguna narkoba, serta interpretasi hasil analisis yang diperoleh.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah:

1. Menentukan kestabilan model penyebaran pengguna narkoba yang dirumuskan oleh White-Comiskey di sekitar titik kesetimbangan endemik.
2. Melakukan verifikasi model penyebaran pengguna narkoba yang dirumuskan oleh White-Comiskey terhadap data empirik.
3. Menginterpretasikan hasil analisis yang diperoleh.

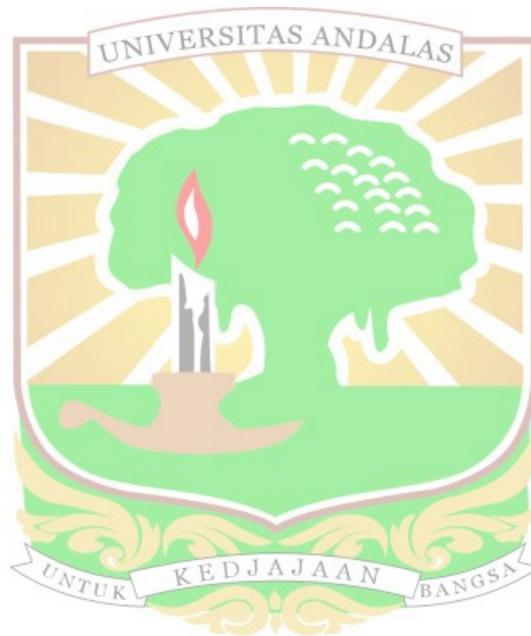
1.4 Pembatasan Masalah

Verifikasi model penyebaran pengguna narkoba pada penelitian ini dilakukan terhadap data empirik dari kasus narkoba yang terjadi di Sumatera Barat.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada tugas akhir ini dijelaskan sebagai berikut. Bab I menjelaskan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, pem-

batasan masalah, dan sistematika penulisan. Bab II membahas teori-teori sebagai dasar acuan dalam pembahasan. Bab III berisi analisis kestabilan model penyebaran pengguna narkoba di sekitar titik kesetimbangan endemik. Bab IV menjelaskan verifikasi model penyebaran pengguna narkoba yang dirumuskan oleh White-Comiskey terhadap data empirik di Sumatera Barat. Terakhir, Bab V menyajikan kesimpulan dan saran.



BAB II

LANDASAN TEORI

Teori yang berkaitan dengan bahasan topik penelitian akan diuraikan pada bab ini. Hal ini dijadikan sebagai acuan untuk mendukung tujuan penulisan.

2.1 Sekilas tentang Narkoba

Narkoba merupakan singkatan dari narkotika, psikotropika, dan bahan adiktif lain. Istilah narkoba juga seringkali disebut dengan Napza yang merupakan singkatan dari narkotika, psikotropika, dan zat adiktif [17]. Baik istilah narkoba maupun Napza, keduanya mengacu pada kelompok senyawa yang umumnya memiliki resiko kecandua bagi penggunaanya. Menurut Undang-Undang Republik Indonesia Nomor 22 Tahun 1997 Pasal 1, narkotika adalah zat atau obat yang berasal dari tanaman atau bukan tanaman, baik sintetis maupun semisintetis, yang dapat menyebabkan penurunan atau perubahan kesadaran, hilangnya rasa, mengurangi sampai hilangnya rasa nyeri, dan dapat menimbulkan ketergantungan [5].

Lebih lanjut, berdasarkan Undang-undang Nomor 22 Tahun 1997, narkotika dapat diklasifikasikan sebagai berikut :

1. Narkotika Golongan I

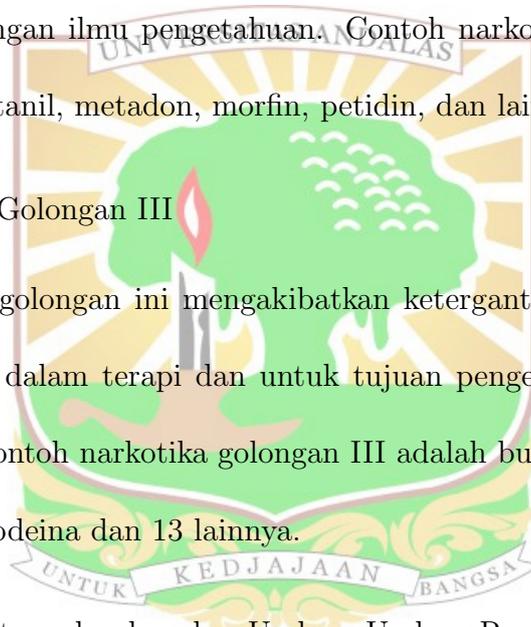
Narkotika golongan ini mengakibatkan ketergantungan yang sangat tinggi dan tidak digunakan dalam terapi, melainkan untuk tujuan pengembangan ilmu pengetahuan. Contoh narkotika pada golongan I adalah ganja, gicing, heroin, katinon, kokain, dan lebih dari 65 lainnya.

2. Narkotika Golongan II

Narkotika golongan ini juga mengakibatkan ketergantungan yang sangat tinggi, namun dapat digunakan dalam terapi dan sekaligus untuk tujuan pengembangan ilmu pengetahuan. Contoh narkotika pada golongan II adalah fentanil, metadon, morfin, petidin, dan lain-lain.

3. Narkotika Golongan III

Narkotika golongan ini mengakibatkan ketergantungan ringan, banyak digunakan dalam terapi dan untuk tujuan pengembangan ilmu pengetahuan. Contoh narkotika golongan III adalah buprenorfin, codein, etilmorfina, kodeina dan 13 lainnya.



Selanjutnya, berdasarkan Undang-Undang Republik Indonesia Nomor 5 Tahun 1997 tentang Psikotropika, disebutkan bahwa definisi dari psikotropika adalah zat atau obat baik alamiah maupun sintetis bukan narkotika yang berkhasiat psikoaktif melalui pengaruh selektif pada susunan saraf pusat yang menyebabkan perubahan khas pada aktifitas mental dan perilaku bagi penggunaanya [5].

Menurut [5], psikotropika dapat digolongkan sebagai berikut :

1. Psikotropika Golongan I

Psikotropika golongan ini mengakibatkan ketergantungan yang tinggi bagi penggunanya, tidak digunakan dalam terapi dan diperuntukkan untuk tujuan pengembangan ilmu pengetahuan. Contoh psikotropika pada golongan I adalah ekstasi, LAD, LSD, dan STP.

2. Psikotropika Golongan II

Psikotropika golongan ini mengakibatkan ketergantungan yang tinggi bagi penggunanya, digunakan dalam terapi dan untuk tujuan pengembangan ilmu pengetahuan. Contoh psikotropika golongan II adalah amfetamin, metilfenidat, dan ritalin.

3. Psikotropika Golongan III

Psikotropika ini mengakibatkan ketergantungan dengan potensi sedang bagi penggunanya, digunakan dalam terapi dan untuk tujuan pengembangan ilmu pengetahuan. Contoh psikotropika golongan III adalah buprenorsina, flunitrazepam, lumibal, dan pentobarbital.

4. Psikotropika Golongan IV

Psikotropika golongan ini mengakibatkan ketergantungan dengan potensi rendah bagi penggunanya, digunakan dalam terapi dan untuk tujuan ilmu pengetahuan. Contoh psikotropika golongan IV adalah diazepam dan nitrazepam.

Zat adiktif lainnya yang dikenal di kalangan masyarakat diantaranya etanol dalam minuman beralkohol, nikotin dalam rokok dan pelarut lain yang mudah menguap [17].

Ada tiga tingkatan pengguna narkoba menurut definisi operasional, yaitu coba pakai, teratur pakai dan pecandu. Pecandu dipilih menurut faktor resiko, yaitu pecandu bukan suntik dan pecandu suntik. Kelompok coba pakai adalah mereka yang pernah menggunakan jenis narkoba apapun maksimal sebanyak lima kali dalam seumur hidupnya. Kelompok teratur pakai adalah mereka yang pernah menggunakan narkoba jenis apapun (selain cara suntik) dimana frekuensi untuk jumlah pakai narkoba kurang dari 49 kali dalam setahun terakhir. Sedangkan pecandu adalah mereka yang pernah menggunakan narkoba jenis apapun dengan frekuensi lebih dari 49 kali dalam setahun terakhir (pecandu bukan suntik) atau pernah menggunakan narkoba dengan cara suntik dalam setahun terakhir (pecandu suntik) [13].

2.2 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memiliki satu atau lebih turunan fungsi yang tidak diketahui. Berdasarkan banyaknya variabel bebas, persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi dua, yaitu [8] :

1. Persamaan diferensial biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang memiliki satu variabel bebas. Adapun contoh dari persamaan diferensial biasa sebagai berikut :

$$y' + xy = 2x. \quad (2.2.1)$$

2. Persamaan diferensial parsial

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memiliki dua variabel bebas atau lebih. Adapun contoh dari persamaan diferensial parsial sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (2.2.2)$$

Persamaan diferensial juga dapat dikelompokkan atas dasar berikut

[22] :

1. Orde Turunan tertinggi yang terdapat pada persamaan diferensial disebut orde dari persamaan diferensial tersebut.

2. Kelinieran

Suatu persamaan diferensial dikatakan *linier* jika :

i. Pangkat tertinggi pada variabel tak bebas dan semua turunannya adalah satu,

ii. Tidak ada perkalian pada variabel tak bebas dan turunannya.

Persamaan diferensial dikatakan *nonlinier* jika syarat di atas tidak terpenuhi.

3. Kehomogenan

Jika setiap suku dari persamaan diferensial memuat variabel tak bebas atau turunannya, maka persamaan diferensial tersebut dikatakan

homogen. Jika tidak demikian, maka persamaan diferensial tersebut dikatakan nonhomogen.

Kumpulan beberapa persamaan diferensial yang memiliki lebih dari satu variabel tak bebas dikatakan sistem persamaan diferensial. Sistem persamaan diferensial biasa orde satu secara umum diberikan oleh

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.2.3)$$

dimana $\dot{\mathbf{x}}$ menyatakan turunan terhadap t ,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}(t), t) \\ f_2(\mathbf{x}(t), t) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}(t), t) \end{pmatrix}.$$

2.3 Matriks

Secara umum, matriks A yang berukuran $m \times n$ dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan matriks A , a_{ij} merupakan entri dari matriks yang terletak pada baris ke- i dan kolom ke- j .

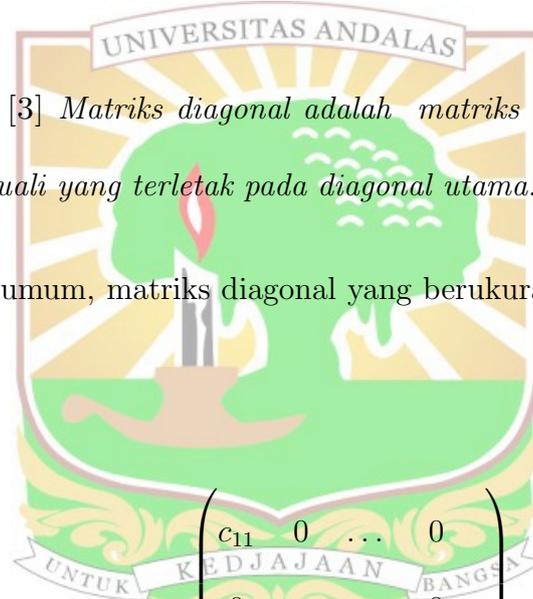
Matriks persegi adalah matriks yang mempunyai ukuran baris dan kolom yang sama atau $m = n$. Perhatikan matriks persegi berikut :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan matriks B , entri-entri $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn}$ disebut sebagai diagonal utama.

Definisi 2.3.1. [3] *Matriks diagonal adalah matriks persegi yang semua entrinya nol kecuali yang terletak pada diagonal utama.*

Secara umum, matriks diagonal yang berukuran $n \times n$ dapat ditulis sebagai :



$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Definisi 2.3.2. [3] *Jika A adalah suatu matriks $n \times n$, maka sebuah vektor tak nol \mathbf{x} pada \mathbb{R}^n disebut vektor eigen dari A jika $A\mathbf{x}$ adalah sebuah kelipatan skalar dari \mathbf{x} . Lebih jelasnya,*

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{2.3.1}$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ disebut nilai eigen dari A , dan \mathbf{x} disebut vektor eigen dari A yang terkait dengan λ .

Perhatikan bahwa persamaan (2.3.1) ekuivalen dengan

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (2.3.2)$$

Dalam hal ini I menyatakan matriks identitas. Matriks identitas merupakan matriks diagonal dengan entri-entri yang terletak pada diagonal utamanya bernilai satu. Persamaan (2.3.2) memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika determinan matriks $(\lambda I - A)$ bernilai nol [3], yaitu

$$\det(\lambda I - A) = 0. \quad (2.3.3)$$

Persamaan (2.3.3) disebut persamaan karakteristik dari matriks A , dan nilai-nilai eigen dari matriks A diperoleh dari akar-akar persamaan tersebut.

2.4 Kestabilan Sistem

Perhatikan sistem persamaan diferensial biasa berikut :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2.4.1)$$

dimana $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ dan $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})]^T$.

Titik kesetimbangan dari sistem (2.4.1) dan kestabilannya didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.4.1. [7] *Titik kesetimbangan (disebut juga titik tetap, titik kritis atau titik stasioner) dari sistem (2.4.1) adalah solusi yang memenuhi persamaan*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Definisi 2.4.2. [7] *Titik kesetimbangan $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ dari sistem (2.4.1) dikatakan*

1. *Stabil jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk*

setiap solusi $\mathbf{x}(t)$ yang memenuhi $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^\| < \delta$ berlaku*

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| < \epsilon \text{ untuk } t \geq t_0,$$

2. *Stabil asimtotik jika titik kesetimbangan $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ stabil dan terdapat*

$\delta_0 > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $\mathbf{x}(t)$ yang memenuhi

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*\| < \delta_0 \text{ berlaku } \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*.$$

Dengan mendapatkan solusi dari sistem persamaan diferensial (2.4.1) maka kestabilan dari sistem tersebut di sekitar titik kesetimbangan dapat diketahui. Namun, tidak semua persamaan diferensial dapat ditentukan dengan mudah solusi eksaknya. Alternatif lain, analisis kestabilan dapat didekati secara linier di sekitar titik kesetimbangan (dinamakan kestabilan linier). Oleh karena itu cukup ditinjau linierisasi terhadap sistem (2.4.1) di sekitar titik kesetimbangan $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, yaitu diberikan oleh [11]:

$$\dot{\mathbf{y}} = J\mathbf{y}, \tag{2.4.2}$$

dimana $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T = [x_1 - x_1^*, x_2 - x_2^*, \dots, x_n - x_n^*]^T$, dan

$$J \equiv J(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \tag{2.4.3}$$

Matriks J merupakan matriks Jacobian dari sistem (2.4.1) yang dihitung di titik kesetimbangan \mathbf{x}^* .

Solusi dari sistem (2.4.2), yang merupakan sistem PDB linier orde satu, dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut :

$$\mathbf{y} = \mathbf{p}e^{\lambda t}, \quad (2.4.4)$$

dimana \mathbf{p} adalah suatu vektor konstan tak nol dan λ adalah suatu skalar. Persamaan (2.4.4) disubstitusi ke dalam sistem (2.4.2), sehingga diperoleh

$$(J - \lambda I)\mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad (2.4.5)$$

dimana λ adalah nilai eigen dari matriks J dan \mathbf{p} adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ . Dengan demikian, kestabilan (linier) dari sistem (2.4.1) di sekitar titik kesetimbangan ditentukan oleh nilai-nilai eigen dari matriks Jacobian, sebagaimana diberikan oleh teorema berikut.

Teorema 2.4.1. [10] *Pandang sistem (2.4.1) dimana matriks Jacobian J mempunyai k nilai eigen yang berbeda, misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, dengan $k \leq n$. Titik kesetimbangan \mathbf{x}^* dikatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika bagian riil dari semua nilai eigennya bernilai negatif, yaitu $Re(\lambda_i) < 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$.*

2.5 Aturan Tanda Descartes

Banyaknya akar riil positif atau negatif suatu polinomial dengan koefisien riil diberikan oleh Aturan Tanda Descartes. Aturan ini didasarkan pada

banyak perubahan tanda pada barisan koefisien suatu polinomial, sebagaimana diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 2.5.1. [14] *Misalkan $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ merupakan polinomial dengan koefisien riil. Polinomial $f(x)$ dengan s kali perubahan tanda pada barisan koefisien mempunyai $s - 2k$ buah akar riil positif, dimana k adalah bilangan bulat non negatif.*

Sebagai contoh, misalkan $f(x) = x^3 - 6x - 5$. Perhatikan bahwa 1,-6,-5 merupakan barisan koefisien dari $f(x)$. Jelas bahwa $s = 1$, artinya perubahan tanda pada barisan koefisien tersebut terjadi sebanyak satu kali. Menurut Teorema 2.5.1, banyaknya akar riil positif dari $f(x)$ adalah $s - 2k = 1 - 2(0) = 1$.

2.6 Kriteria Routh - Hurwitz

Teorema 2.6.1. [9] *Misalkan a_1, a_2, \dots, a_n adalah bilangan riil dan tetapkan $a_j = 0$ jika $j > n$. Maka semua akar polinomial*

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \quad (2.6.1)$$

bernilai riil negatif jika dan hanya jika determinan

$$M_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & a_{2k-4} \\ 0 & 0 & a_1 & \dots & a_{2k-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{vmatrix},$$

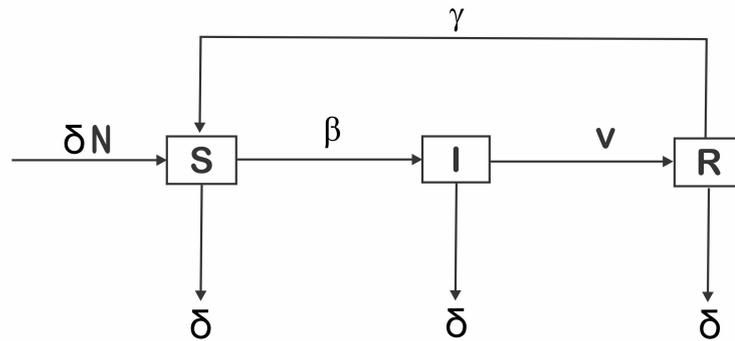
untuk setiap $k = 1, 2, \dots, n$, bernilai positif.

2.7 Model Epidemik SIRS

Model epidemik SIRS (*Susceptible–Infected–Removed–Susceptible*) merupakan pengembangan dari model epidemiologi yang pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan McKendric pada tahun 1927 [12]. Model ini terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu:

1. *Susceptible* (S), yaitu kelompok individu yang masih sehat namun rentan terinfeksi penyakit.
2. *Infected* (I), yaitu kelompok individu yang sudah terinfeksi dan dapat menularkan penyakit ke *susceptible* apabila melakukan kontak dengannya, namun individu ini masih dapat sembuh dari penyakit.
3. *Removed* (R), yaitu kelompok individu yang telah sembuh dari penyakit dan dapat menjadi *susceptible* kembali.

Diagram model SIRS diperlihatkan dalam Gambar 2.7.1



Gambar 2.7.1: Diagram Model SIRS

Parameter-parameter yang digunakan pada model SIRS adalah sebagai berikut [13] :

- i. γ menyatakan tingkat populasi yang rentan kembali terkena penyakit.
- ii. δ menyatakan tingkat kelahiran atau kematian populasi,
- iii. β menyatakan tingkat penyebaran virus,
- iv. v menyatakan tingkat populasi yang sembuh.

Berdasarkan Gambar 2.7.1, individu yang rentan terinfeksi penyakit dapat menjadi terinfeksi setelah melakukan kontak dengan individu terinfeksi. Selanjutnya, individu yang telah terinfeksi oleh penyakit dapat sembuh melalui sebuah pengobatan, dan yang sudah sembuh dapat kembali menjadi rentan terinfeksi.

2.8 Formulasi Model Penyebaran Pengguna Narkoba

Model penyebaran pengguna narkoba diformulasikan pertama kali oleh White - Comiskey pada tahun 2007 [23] berdasarkan model SIRS. Hal ini karena ketergantungan narkoba dapat dianggap sebagai sebuah penyakit yang dapat menular ke individu lain. Populasi dalam model White - Comiskey ini dibagi menjadi tiga kelompok subpopulasi :

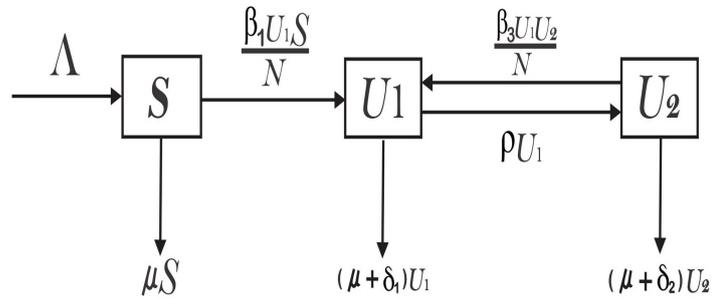
1. Kelompok individu yang sehat namun rentan menjadi pengguna narkoba. Banyaknya individu dalam kelompok ini pada waktu t dinotasikan dengan $S(t)$.
2. Kelompok pengguna narkoba yang tidak dalam masa rehabilitasi dan dapat menginfeksi individu lain (yaitu menjadikan individu lain pengguna narkoba) ketika melakukan interaksi. Banyaknya individu dalam kelompok ini pada waktu t dinotasikan dengan $U_1(t)$.
3. Kelompok pengguna narkoba yang dalam masa rehabilitasi dan berpotensi menjadi pengguna narkoba kembali ketika berinteraksi dengan pengguna narkoba yang tidak dalam masa rehabilitasi. Banyaknya individu dalam kelompok ini pada waktu t dinotasikan dengan $U_2(t)$.

Total populasi keseluruhan dari jumlah kelompok subpopulasi tersebut dinotasikan dengan N dan dianggap konstan, yaitu

$$N = S(t) + U_1(t) + U_2(t). \quad (2.8.1)$$

Sebelum model penyebaran pengguna narkoba diformulasikan, terlebih dahulu dikonstruksi diagram model penyebaran pengguna narkoba den-

gan menggunakan diagram model SIRS. Hasil konstruksi diagram yang dimaksud diberikan pada Gambar 2.8.2.



Gambar 2.8.1: Diagram Model Penyebaran Pengguna Narkoba.

Berikut adalah penjelasan parameter-parameter yang terdapat pada diagram model penyebaran pengguna narkoba :

- i. β_1 : peluang individu menjadi pengguna narkoba
- ii. β_3 : peluang pengguna narkoba dalam masa rehabilitasi yang kembali menggunakan narkoba
- iii. ρ : proporsi pengguna narkoba yang masuk masa rehabilitasi
- iv. μ : laju kematian alami dari populasi (per satuan waktu)
- v. δ_1 : laju kematian pengguna narkoba yang tidak dalam masa rehabilitasi
(per satuan waktu)
- vi. δ_2 : laju kematian pengguna narkoba dalam masa rehabilitasi
(per satuan waktu)
- vii. Λ : jumlah individu yang memasuki populasi rentan.

Semua parameter di atas ditetapkan bernilai positif.

Ada beberapa asumsi yang digunakan pada model penyebaran penggunaan narkoba ini, yaitu :

1. Populasi tidak mengalami proses migrasi atau bersifat tertutup.
2. Total populasi N dianggap konstan sehingga berlaku :

$$\Lambda = \mu S + (\mu + \delta_1)U_1 + (\mu + \delta_2)U_2, \quad (2.8.2)$$

Berdasarkan persamaan (2.8.2), jumlah individu yang memasuki populasi rentan (*susceptible*) sama dengan jumlah individu yang keluar di setiap kelompok karena kematian. Kematian tersebut diakibatkan karena kematian alami maupun penggunaan narkoba.

3. Individu yang rentan menggunakan narkoba maupun pengguna narkoba yang dalam masa rehabilitasi dapat terinfeksi apabila melakukan kontak dengan pengguna narkoba yang tidak dalam masa rehabilitasi.
4. Ada suatu proporsi pengguna narkoba yang masuk masa rehabilitasi.
5. Seluruh individu dalam populasi memiliki potensi rentan terhadap kecanduan narkoba.
6. Pengguna narkoba yang dalam masa rehabilitasi tidak dapat menginfeksi individu yang rentan.

Beberapa hal yang dapat dijelaskan berdasarkan Gambar 2.8.2 adalah sebagai berikut:

1. Laju individu yang rentan menjadi pengguna narkoba diformulasikan dengan

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \frac{\beta_1 U_1 S}{N} - \mu S. \quad (2.8.3)$$

Persamaan (2.8.3) menyatakan bahwa laju individu yang rentan menjadi pengguna narkoba sama dengan jumlah individu yang memasuki populasi rentan dikurangi dengan proporsi individu menjadi pengguna narkoba dan yang meninggal karena kematian alami.

2. Laju individu pengguna narkoba yang tidak dalam masa rehabilitasi diformulasikan dengan

$$\frac{dU_1}{dt} = \frac{\beta_1 U_1 S}{N} - \rho U_1 + \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_1) U_1. \quad (2.8.4)$$

Persamaan (2.8.4) menyatakan bahwa laju individu pengguna narkoba yang tidak dalam masa rehabilitasi sama dengan proporsi individu rentan dan dalam masa rehabilitasi menjadi pengguna narkoba dikurangi dengan proporsi pengguna narkoba yang masuk masa rehabilitasi dan yang meninggal baik karena kematian alami maupun akibat penggunaan narkoba dalam masa di luar rehabilitasi.

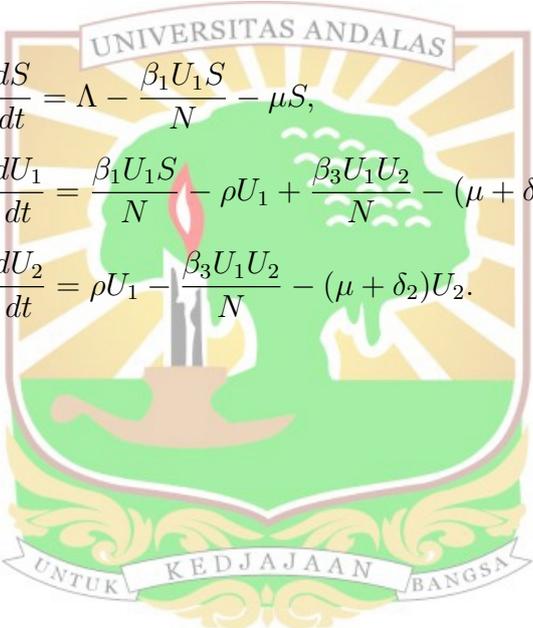
3. Laju individu pengguna narkoba yang dalam masa rehabilitasi diformulasikan dengan

$$\frac{dU_2}{dt} = \rho U_1 - \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_2) U_2. \quad (2.8.5)$$

Persamaan (2.8.5) menyatakan bahwa laju individu pengguna narkoba yang dalam masa rehabilitasi sama dengan proporsi pengguna narkoba

yang masuk masa rehabilitasi dikurangi proporsi pengguna narkoba yang dalam masa rehabilitasi kembali menggunakan narkoba yang meninggal baik karena kematian alami maupun akibat penggunaan narkoba dalam masa rehabilitasi.

Berdasarkan penjelasan di atas, maka penyebaran pengguna narkoba dapat dimodelkan oleh sistem persamaan diferensial biasa orde satu nonlinier berikut:



$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \frac{\beta_1 U_1 S}{N} - \mu S, \\
 \frac{dU_1}{dt} &= \frac{\beta_1 U_1 S}{N} - \rho U_1 + \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_1) U_1, \\
 \frac{dU_2}{dt} &= \rho U_1 - \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_2) U_2.
 \end{aligned} \tag{2.8.6}$$

BAB III

ANALISIS MODEL

Analisis kestabilan model White - Comiskey di titik kesetimbangan endemik akan dijelaskan pada bab ini.

3.1 Titik Kesetimbangan

Berdasarkan Definisi 2.4.1, titik kesetimbangan dari sistem (2.8.6) dapat ditentukan dengan menetapkan S , U_1 dan U_2 tidak bergantung terhadap waktu t atau dikatakan sebagai fungsi konstan, sehingga berlaku

$$\Lambda - \frac{\beta_1 U_1 S}{N} - \mu S = 0, \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\beta_1 U_1 S}{N} - \rho U_1 + \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_1) U_1 = 0, \quad (3.1.2)$$

$$\rho U_1 - \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_2) U_2 = 0. \quad (3.1.3)$$

Perhatikan bahwa persamaan (3.1.2) dapat ditulis ulang menjadi

$$U_1 \left(\frac{\beta_1 S}{N} - \rho + \frac{\beta_3 U_2}{N} - (\mu + \delta_1) \right) = 0,$$

sehingga didapatkan

$$U_1 = 0. \quad (3.1.4)$$

Selanjutnya, persamaan (3.1.4) disubstitusi ke persamaan (3.1.1), diperoleh

$$\Lambda - \mu S = 0$$

atau

$$S = \frac{\Lambda}{\mu}. \quad (3.1.5)$$

Hal yang serupa dilakukan pada persamaan (3.1.3), sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} \rho(0) - \frac{\beta_3(0)U_2}{N} - (\mu + \delta_2)U_2 &= 0 \\ -(\mu + \delta_2)U_2 &= 0 \\ U_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Dari persamaan (3.1.4), (3.1.5) dan (3.1.6) diperoleh solusi

$$(S, U_1, U_2) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right), \quad (3.1.7)$$

yang memberikan titik kestimbangan non-endemik.

Selanjutnya dari persamaan (3.1.1) juga diperoleh

$$S = \frac{\Lambda N}{N\mu + U_1\beta_1}. \quad (3.1.8)$$

Persamaan (3.1.8) merupakan koreksi pada [4] atas kesalahan perhitungan White dan Comiskey. Sebagai hasilnya, perhitungan-perhitungan berikut juga mengoreksi yang dilakukan White - Comiskey, meskipun pada akhirnya tidak mengubah hasil secara kualitatif.

Persamaan (3.1.8) disubstitusi ke persamaan (3.1.2) dan selesaikan untuk U_2 , diperoleh

$$U_2 = \frac{(-\beta_1\Lambda + \rho\beta_1U_1 + \rho\mu N + \mu\beta_1U_1 + \mu^2N + \delta_1\beta_1U_1 + \delta_1\mu N)N}{(\beta_1U_1 + \mu N)\beta_3}. \quad (3.1.9)$$

Persamaan (3.1.8) dan (3.1.9) disubstitusi ke persamaan (3.1.3) dan dihasilkan persamaan berikut:

$$(\beta_3\delta_1\beta_1 + \beta_3\mu\beta_1)U_1^2 + (-\beta_3\beta_1\Lambda + \beta_3\mu^2N + \beta_3\delta_1\mu N + N\mu\rho\beta_1 + N\mu^2\beta_1 +$$

$$N\delta_2\rho\beta_1 + N\mu\delta_1\beta_1 + N\delta_2\mu\beta_1 + N\delta_2\delta_1\beta_1)U_1 - N\delta_2\beta_1\Lambda + \delta_2\rho\mu N^2 + \delta_2\delta_1\mu N^2 + \delta_2\mu^2 N^2 - N\mu\beta_1\Lambda + \rho\mu^2 N^2 + \mu^3 N^2 + \delta_1\mu^2 N^2 = 0. \quad (3.1.10)$$

Perhatikan bahwa persamaan (3.1.10) merupakan persamaan kuadrat dalam U_1 . Agar terdapat titik kesetimbangan endemik, maka U_1 haruslah bernilai riil positif. Dari persamaan (3.1.10) jelas bahwa koefisien U_1^2 bernilai positif karena semua nilai parameter bernilai positif. Namun koefisien U_1 dan konstanta pada suku ketiga belum dapat dipastikan apakah bernilai positif atau negatif. Dengan demikian terdapat empat kemungkinan kasus yang muncul pada persamaan kuadrat (3.1.10) berdasarkan tanda positif atau negatif pada koefisien-koefisien:

1. $aU_1^2 + bU_1 + c = 0, (a, b, c > 0)$

Pada kasus ini tidak ada tanda yang berubah pada barisan koefisien, sehingga menurut Aturan Descartes (Teorema 2.5.1) tidak ada akar riil positif pada persamaan kuadrat (3.1.10) dalam kasus ini.

2. $aU_1^2 - bU_1 + c = 0, (a, b, c > 0)$

Pada kasus ini terdapat dua kali perubahan tanda pada barisan koefisien, sehingga menurut Aturan Descartes (Teorema 2.5.1) kemungkinan dua akar riil positif atau tidak ada akar riil positif pada persamaan kuadrat (3.1.10) dalam kasus ini.

3. $aU_1^2 + bU_1 - c = 0, (a, b, c > 0)$

Pada kasus ini terdapat satu kali perubahan tanda pada barisan koefisien, sehingga menurut Aturan Descartes (Teorema 2.5.1) persamaan kuadrat

(3.1.10) dalam kasus ini memiliki satu akar riil positif.

4. $aU_1^2 - bU_1 - c = 0$, ($a, b, c > 0$)

Pada kasus ini terdapat satu kali perubahan tanda pada barisan koefisien, sehingga menurut Aturan Descartes (Teorema 2.5.1) persamaan kuadrat (3.1.10) dalam kasus ini memiliki satu akar riil positif.

Berdasarkan keempat kasus di atas, maka akar riil positif pada persamaan kuadrat (3.1.10) dijamin ada pada kasus 3 dan 4. Dengan demikian konstanta pada suku ketiga persamaan kuadrat (3.1.10) haruslah bernilai negatif untuk menjamin eksistensi dari titik keseimbangan endemik. Perhatikan bahwa konstanta pada suku ketiga persamaan kuadrat (3.1.10) bernilai negatif jika berlaku

$$\delta_2 N(\rho\mu + \delta_1\mu + \mu^2) + N(\rho\mu^2 + \mu^3 + \delta_1\mu^2) < \Lambda\beta_1(\delta_2 + \mu). \quad (3.1.11)$$

Berdasarkan penjelasan di atas, maka terdapat dua titik kesetimbangan pada sistem (2.8.6), yaitu :

(i) $E = (S, U_1, U_2)$ dimana $S = \frac{\Lambda}{\mu}$, $U_1 = 0$ dan $U_2 = 0$, yang merupakan titik kesetimbangan non-endemik, artinya tidak ada pengguna narkoba baik dalam masa rehabilitasi maupun tidak dalam masa rehabilitasi.

(ii) $E^* = (S^*, U_1^*, U_2^*)$ dimana $U_1^* = W$ dengan W suatu konstanta positif,

$$S^* = \frac{\Lambda N}{N\mu + W\beta_1}, \text{ dan}$$

$$U_2^* = \frac{(-\beta_1\Lambda + \rho\beta_1W + \rho\mu N + \mu\beta_1W + \mu^2N + \delta_1\beta_1W + \delta_1\mu N)N}{(\beta_1W + \mu N)\beta_3}, \text{ yang}$$

merupakan titik kesetimbangan endemik, artinya ada pengguna narkoba

yang tidak berada dalam masa rehabilitasi sehingga dapat menginfeksi individu lain melalui kontak atau interaksi.

3.2 Analisis Kestabilan

Dalam [4] telah dikaji kestabilan titik kesetimbangan non-endemik. Pada skripsi ini akan dianalisis kestabilan titik kesetimbangan endemik E^* yang diberikan oleh teorema berikut.

Teorema 3.2.1. *Jika $\beta_1 > \beta_3$ dan $\mu + \delta_2 < 1$, maka titik kesetimbangan endemik E^* stabil asimtotik.*

Bukti. Perhatikan matriks Jacobian dari sistem (2.8.6) berikut :

$$\begin{aligned}
 J(S, U_1, U_2) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(S, U_1, U_2)}{\partial S} & \frac{\partial f_1(S, U_1, U_2)}{\partial U_1} & \frac{\partial f_1(S, U_1, U_2)}{\partial U_2} \\ \frac{\partial f_2(S, U_1, U_2)}{\partial S} & \frac{\partial f_2(S, U_1, U_2)}{\partial U_1} & \frac{\partial f_2(S, U_1, U_2)}{\partial U_2} \\ \frac{\partial f_3(S, U_1, U_2)}{\partial S} & \frac{\partial f_3(S, U_1, U_2)}{\partial U_1} & \frac{\partial f_3(S, U_1, U_2)}{\partial U_2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{-\beta_1 U_1}{N} - \mu & \frac{-\beta_1 S}{N} & 0 \\ \frac{\beta_1 U_1}{N} & \frac{\beta_1 S}{N} - \rho + \frac{\beta_3 U_2}{N} - \mu - \delta_1 & \frac{\beta_3 U_1}{N} \\ 0 & \rho - \frac{\beta_3 U_2}{N} & \frac{-\beta_3 U_1}{N} - \mu - \delta_2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Kestabilan sistem (2.8.6) di sekitar titik kesetimbangan endemik E^* dapat ditentukan dengan terlebih dahulu mensubstitusikan nilai $S^* = \frac{\Lambda N}{N\mu + W\beta_1}$,

$U_1^* = W$, dan

$U_2^* = \frac{(-\beta_1 \Lambda + \rho \beta_1 W + \rho \mu N + \mu \beta_1 W + \mu^2 N + \delta_1 \beta_1 W + \delta_1 \mu N) N}{(\beta_1 W + \mu N) \beta_3}$ ke matriks

Jacobian (3.2.1), yaitu diperoleh

$$J(S^*, U_1^*, U_2^*) = \begin{pmatrix} \frac{-\beta_1 W}{N} - \mu & \frac{-\beta_1 \Lambda}{N\mu + W\beta_1} & 0 \\ \frac{\beta_1 W}{N} & C & \frac{\beta_3 W}{N} \\ 0 & D & \frac{-\beta_3 W}{N} - \mu - \delta_2 \end{pmatrix}, \quad (3.2.2)$$

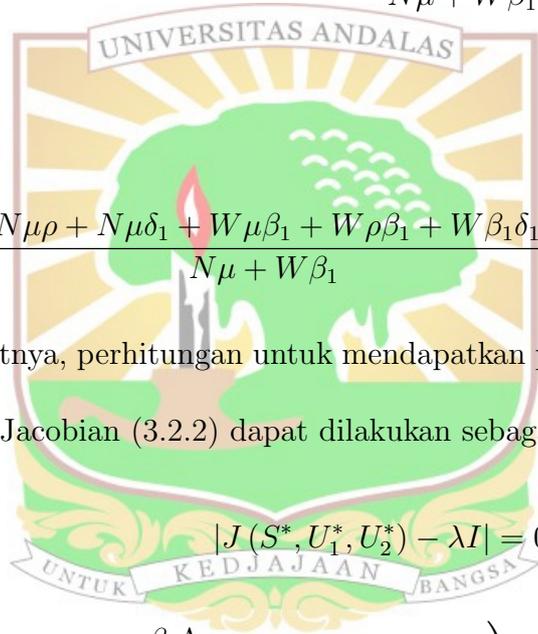
dimana

$$C = \frac{\beta_1 \Lambda}{N\mu + W\beta_1} - \rho + \frac{N\mu^2 + N\mu\rho + N\mu\delta_1 + W\mu\beta_1 + W\rho\beta_1 + W\beta_1\delta_1 - \Lambda\beta_1}{N\mu + W\beta_1}$$

$$-\mu - \delta_1,$$

$$D = \rho - \frac{N\mu^2 + N\mu\rho + N\mu\delta_1 + W\mu\beta_1 + W\rho\beta_1 + W\beta_1\delta_1 - \Lambda\beta_1}{N\mu + W\beta_1}.$$

Selanjutnya, perhitungan untuk mendapatkan persamaan karakteristik dari matriks Jacobian (3.2.2) dapat dilakukan sebagai berikut :



$$|J(S^*, U_1^*, U_2^*) - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} \frac{-\beta_1 W}{N} - \mu & \frac{-\beta_1 \Lambda}{N\mu + W\beta_1} & 0 \\ \frac{\beta_1 W}{N} & C & \frac{\beta_3 W}{N} \\ 0 & D & \frac{-\beta_3 W}{N} - \mu - \delta_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} \frac{-\beta_1 W}{N} - \mu - \lambda & \frac{-\beta_1 \Lambda}{N\mu + W\beta_1} & 0 \\ \frac{\beta_1 W}{N} & C - \lambda & \frac{\beta_3 W}{N} \\ 0 & D & \frac{-\beta_3 W}{N} - \mu - \delta_2 - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0,$$

dan diperoleh

$$\lambda^3 + \frac{(2N\mu + N\delta_2 + W\beta_1 + W\beta_3)\lambda^2}{N} + \frac{1}{N^2(N\mu + W\beta_1)}(N^3\mu^3 + N^3\mu^2\delta_2 + 2N^2W\mu^2\beta_1 + 2N^2W\mu^2\beta_3 + 2N^2W\mu\beta_1\delta_2 + N^2W\mu\beta_3\delta_1 + NW^2\mu\beta_1^2 + 3NW^2\mu\beta_1\beta_3 + NW^2\beta_1^2\delta_2 + NW^2\beta_1\beta_3\delta_1 + W^3\beta_1^2\beta_3 + \Lambda NW\beta_1^2 - \Lambda NW\beta_1\beta_3)\lambda + \frac{1}{N^2(N\mu + W\beta_1)}(N^2W\mu^3\beta_3 + N^2W\mu^2\beta_3\delta_1 + 2NW^2\mu^2\beta_1\beta_3 + 2NW^2\mu\beta_1\beta_3\delta_1 + W^3\mu\beta_1^2\beta_3 + W^3\beta_1^2\beta_3\delta_1 + \Lambda NW\mu\beta_1^2 - \Lambda NW\mu\beta_1\beta_3 + \Lambda NW\beta_1^2\delta_2) = 0. \quad (3.2.3)$$

Dari persamaan karakteristik (3.2.3), jelas terlihat bahwa koefisien dari λ^3 dan λ^2 bernilai positif. Namun koefisien λ dan konstanta suku ke-empat belum dapat dipastikan apakah bernilai positif atau negatif. Agar titik keseimbangan endemik E^* stabil asimtotik, maka akar dari persamaan karakteristik (3.2.2) (nilai-nilai eigen λ) haruslah bernilai riil negatif. Berdasarkan Kriteria Routh - Hurwitz (Teorema 2.6.1), untuk mendapatkan akar persamaan karakteristik (3.2.2) bernilai riil negatif haruslah

$$\left| a_1 \right| > 0, \quad (3.2.4)$$

dan

$$M(S^*, U_1^*, U_2^*) = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad (3.2.5)$$

dimana

$$a_1 = \frac{2N\mu + N\delta_2 + W\beta_1 + W\beta_3}{N},$$

$$a_2 = \frac{1}{N^2(N\mu + W\beta_1)}(N^3\mu^3 + N^3\mu^2\delta_2 + 2N^2W\mu^2\beta_1 + 2N^2W\mu^2\beta_3 + 2N^2W\mu$$

$$\beta_1\delta_2 + N^2W\mu\beta_3\delta_1 + NW^2\mu\beta_1^2 + 3NW^2\mu\beta_1\beta_3 + NW^2\beta_1^2\delta_2 + NW^2\beta_1\beta_3\delta_1$$

$$+W^3\beta_1^2\beta_3 + \Lambda NW\beta_1^2 - \Lambda NW\beta_1\beta_3),$$

$$a_3 = \frac{1}{N^2(N\mu + W\beta_1)}(W(N^2\mu^3\beta_3 + N^2\mu^2\beta_3\delta_1 + 2NW\mu^2\beta_1\beta_3 + 2NW\mu\beta_1\beta_3\delta_1$$

$$+W^2\mu\beta_1^2\beta_3 + W^2\beta_1^2\beta_3\delta_1 + \Lambda N\mu\beta_1^2 - \Lambda N\mu\beta_1\beta_3 + \Lambda N\beta_1^2\delta_2)).$$

Dari pertidaksamaan (3.2.5), diperoleh

$$\frac{1}{N^3(N\mu + W\beta_1)}(2N^4\mu^4 + 3N^4\mu^3\delta_2 + N^4\mu^2\delta_2^2 + 5N^3W\mu^3\beta_1 + 4N^3W\mu^3\beta_3 +$$

$$7N^3W\mu^2\beta_1\delta_2 + N^3W\mu^2\beta_3\delta_1 + 3N^3W\mu^2\beta_3\delta_2 + 2N^3W\mu\beta_1\delta_2^2 + N^3W\mu\beta_3\delta_1\delta_2 +$$

$$4N^2W^2\mu^2\beta_1^2 + 8N^2W^2\mu^2\beta_1\beta_3 + 2N^2W^2\mu^2\beta_3^2 + 5N^2W^2\mu\beta_1^2\delta_2 + N^2W^2\mu\beta_1$$

$$\beta_3\delta_1 + 5N^2W^2\mu\beta_1\beta_3\delta_2 + N^2W^2\mu\beta_3^2\delta_1 + N^2W^2\beta_1^2\delta_2^2 + N^2W^2\beta_1\beta_3\delta_1\delta_2 +$$

$$NW^3\mu\beta_1^3 + 5NW^3\mu\beta_1^2\beta_3 + 3NW^3\mu\beta_1\beta_3^2 + NW^3\beta_1^3\delta_2 + 2NW^3\beta_1^2\beta_3\delta_2 +$$

$$NW^3\beta_1\beta_3^2\delta_1 + W^4\beta_1^3\beta_3 + W^4\beta_1^2\beta_3^2 + \Lambda N^2W\mu\beta_1^2 - \Lambda N^2W\mu\beta_1\beta_3 - \Lambda N^2W\beta_1$$

$$\beta_3\delta_2 + \Lambda NW^2\beta_1^3 - \Lambda NW^2\beta_1\beta_3^2) > 0.$$

Jelas bahwa pertidaksamaan di atas berlaku jika

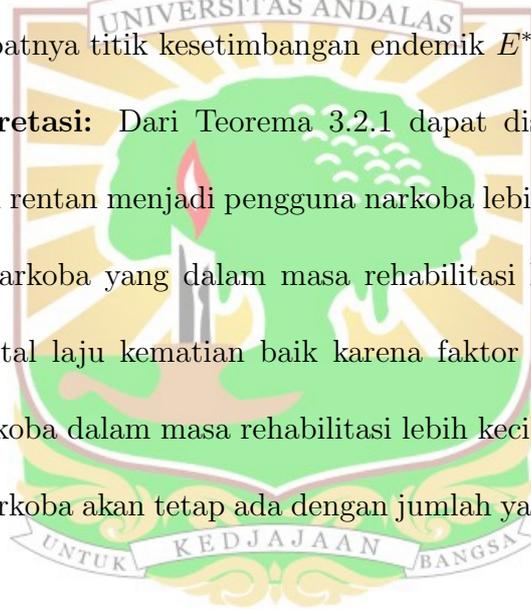
$$\beta_1 > \beta_3 \tag{3.2.6}$$

dan

$$\mu + \delta_2 < 1. \tag{3.2.7}$$

Dengan demikian jika $\beta_1 > \beta_3$ dan $\mu + \delta_2 < 1$, maka nilai-nilai eigen λ bernilai riil negatif. Akibatnya titik kesetimbangan endemik E^* stabil asimtotik.

Interpretasi: Dari Teorema 3.2.1 dapat disimpulkan bahwa jika peluang individu rentan menjadi pengguna narkoba lebih besar daripada peluang pengguna narkoba yang dalam masa rehabilitasi kembali menggunakan narkoba, dan total laju kematian baik karena faktor alami maupun akibat penggunaan narkoba dalam masa rehabilitasi lebih kecil daripada 1, maka kasus pengguna narkoba akan tetap ada dengan jumlah yang cenderung konstan.



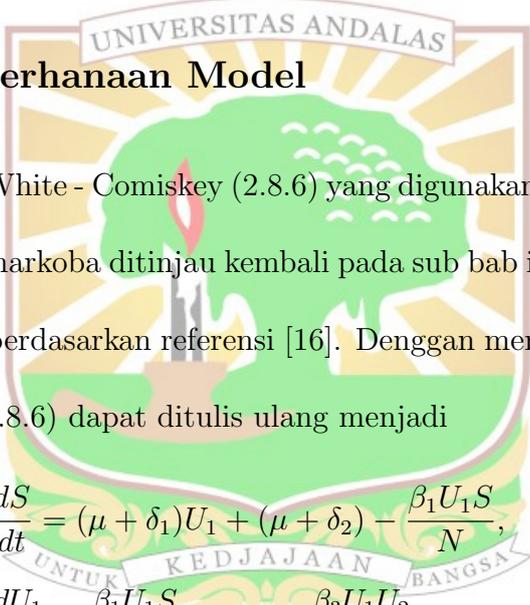
BAB IV

VERIFIKASI MODEL

Setelah menganalisis kestabilan model di titik kesetimbangan endemik pada bab sebelumnya, pada bab ini model akan diverifikasi terhadap data empirik dari kasus narkoba yang terjadi di Sumatera Barat. Untuk memudahkan perhitungan, dilakukan terlebih dahulu penyederhanaan model.

4.1 Penyederhanaan Model

Model White - Comiskey (2.8.6) yang digunakan dalam masalah penyebaran pengguna narkoba ditinjau kembali pada sub bab ini dalam bentuk yang lebih sederhana berdasarkan referensi [16]. Dengan menggunakan persamaan (2.8.2), sistem (2.8.6) dapat ditulis ulang menjadi


$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= (\mu + \delta_1)U_1 + (\mu + \delta_2) - \frac{\beta_1 U_1 S}{N}, \\ \frac{dU_1}{dt} &= \frac{\beta_1 U_1 S}{N} - \rho U_1 + \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_1)U_1, \\ \frac{dU_2}{dt} &= \rho U_1 - \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_2)U_2.\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

Karena $N = S + U_1 + U_2$ adalah konstan, maka misalkan

$$s = \frac{S}{N}, u_1 = \frac{U_1}{N}, u_2 = \frac{U_2}{N},\tag{4.1.2}$$

sehingga diperoleh $s + u_1 + u_2 = 1$.

Dengan menggunakan persamaan (4.1.2), maka sistem (4.1.1) menjadi

$$\frac{ds}{dt} = (\mu + \delta_1)u_1 + (\mu + \delta_2)u_2 - \beta_1 u_1 s,$$

$$\frac{du_1}{dt} = \beta_1 u_1 s - \rho u_1 + \beta_3 u_1 u_2 - (\mu + \delta_1) u_1, \quad (4.1.3)$$

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_1 - \beta_3 u_1 u_2 - (\mu + \delta_2) u_2.$$

Karna $u_2 = 1 - s - u_1$, maka sistem (4.1.3) direduksi menjadi

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= (\mu + \delta_1) u_1 + (\mu + \delta_2)(1 - s - u_1) - \beta_1 u_1 s, \\ \frac{du_1}{dt} &= \beta_1 u_1 s - \rho u_1 + \beta_3 u_2(1 - s - u_1) - (\mu + \delta_1) u_1 \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

atau dapat ditulis ulang sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \mu + \delta_2 + (\delta_1 - \delta_2) u_1 - (\mu + \delta_2) s - \beta_1 u_1 s, \\ \frac{du_1}{dt} &= (\beta_3 - \rho - \mu - \delta_1) u_1 + (\beta_1 - \beta_3) u_1 s - \beta_3 u_1^2. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Sistem (4.1.4) akan digunakan dalam proses verifikasi terhadap data empirik.

4.2 Verifikasi Model terhadap Data Empirik

Data yang digunakan untuk memverifikasi model White - Comiskey [dalam hal ini sistem (4.1.5)] adalah Data Jumlah Penyalahgunaan Narkoba dari Sumatera Barat pada rentang usia 15 - 64 tahun dari tahun 2010 sampai 2014. Data ini diambil di situs resmi Badan Narkotika Nasional. Dengan menggunakan tambahan data kependudukan Sumatera Barat maka diperoleh data $S(t)$, $U_1(t)$, $U_2(t)$ dan $N(t)$ seperti ditampilkan pada Tabel 4.2.1

Berdasarkan pada Tabel 4.2.1, nilai $U_2(t)$ didapatkan dari Data Pemberantasan Penyalahgunaan dan Peredaran Gelap Narkotika (PG4N), untuk

t (tahun)	S(t)	U1(t)	U2(t)	N(t)	S(t) / N(t)	U1(t) / N(t)	U2(t) / N(t)
2010	2961253	63797	76	3025126	0,978885838	0,021089039	0,000025123
2012	3119026	70026	109	3189161	0,978008323	0,021957499	0,000034178
2013	3166927	74154	204	3241285	0,977059098	0,022877964	0,000062938
2014	3212862	78094	608	3291564	0,976089786	0,023725499	0,000184715

Tabel 4.2.1: Data $S(t)$, $U_1(t)$, $U_2(t)$ dan $N(t)$ di Sumatera Barat tahun 2010 - 2014

kelompok pengguna narkoba yang tidak dalam masa rehabilitasi. nilai $U_1(t)$ didapatkan dari hasil pengurangan total pengguna narkoba ($U_1(t) + U_2(t)$) (Data dari LIT BNN) dengan $U_2(t)$, untuk kelompok pengguna narkoba yang dalam masa rehabilitasi. Data Pemberantasan Penyalahgunaan dan Peredaran Gelap Narkotika (PG4N) dan LIT BNN diambil di situs resmi Badan Narkotika Nasional. Nilai $N(t)$ didapatkan dari data kependudukan Sumatera Barat di situs resmi Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Sumatera Barat, selengkapnya terdapat dalam lampiran 1.

$S(t)$ diperoleh dari hasil perhitungan $S(t) = N(t) - U_1(t) + U_2(t)$, dimana $N(t) = S(t) + U_1(t) + U_2(t)$. $\frac{S(t)}{N(t)}$, $\frac{U_1(t)}{N(t)}$, $\frac{U_2(t)}{N(t)}$ diperoleh dari hasil bagi antara $S(t)$, $U_1(t)$, $U_2(t)$ dengan $N(t)$.

Selanjutnya, nilai laju kematian alami dari populasi diperoleh dari hasil perhitungan rata-rata angka kematian penduduk Sumatera Barat per 1000 kelahiran pada tahun 2014 hingga 2017. Angka kematian penduduk Sumatera Barat pada tahun 2014 hingga 2017 ini diambil dari situs resmi Badan Narkotika Nasional.

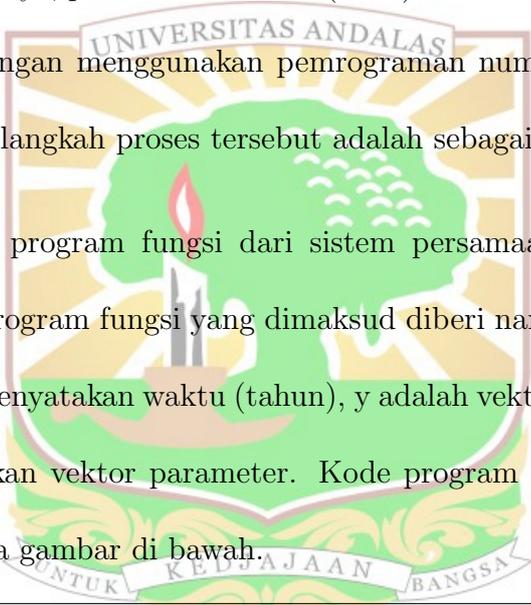
Angka kematian penduduk Sumatera Barat pada tahun 2014 sebesar

7, tahun 2015 sebesar 6,5, tahun 2016 sebesar 6,4 dan tahun 2017 sebesar 6,2. Sehingga untuk laju kematian alami dari populasi diperoleh dari rata-rata jumlah angka kematian tiap tahunnya sebesar 6,5, selengkapnya terdapat pada lampiran 2 hingga 5.

Data pada Tabel 4.2.1 memperlihatkan bahwa seiring meningkatnya jumlah populasi di Sumatera Barat pada tahun 2010 - 2014, total pengguna narkoba juga terus meningkat.

Selanjutnya, pencocokan model (4.1.5) dilakukan terhadap data pada Gambar 4.1.1 dengan menggunakan pemrograman numerik pada MATLAB. Adapun langkah-langkah proses tersebut adalah sebagai berikut :

1. Definisikan program fungsi dari sistem persamaan diferensial (4.1.5). Misalkan program fungsi yang dimaksud diberi nama dengan $ode(t,y,p)$, dimana t menyatakan waktu (tahun), y adalah vektor fungsi s dan u_1 dan p menyatakan vektor parameter. Kode program fungsi tersebut dapat dilihat pada gambar di bawah.



```
function dydt = sir_ode(t,y,p)
b1 = p(1);
b3 = p(2);
rho = p(3);
mu = p(4);
d1 = p(5);
d2 = p(6);

s = y(1);
u1 = y(2);

dydt = [mu+d2+(d1-d2)*u1-(mu+d2)*s-b1*u1*s;
        (b3-rho-mu-d1)*u1+(b1-b3)*u1*s-b3*u1^2];
```

2. Inputkan nilai terkaan awal parameter (p_0), nilai data (data), rentang waktu data ($tspan$) dan nilai awal pada model (y_0) yang diperoleh dari

data pada waktu awal (dalam hal ini tahun 2010)

3. Tulis program fungsi untuk menentukan tingkat perbedaan (discrepancy) antara model dengan data. Dalam hal ini, tingkat perbedaan tersebut didefinisikan sebagai "jumlah kuadrat". Kode program fungsi tersebut dapat dilihat pada gambar di bawah. `discrepancy(p,data,tspan,y0)`.

```
function disc = sir_discrepancy(p, data, tspan, y0)
[t,y] = ode45(@sir_ode,tspan,y0,[],p);
I = y
disc = sum(sum(sum((I-data').^2))
```

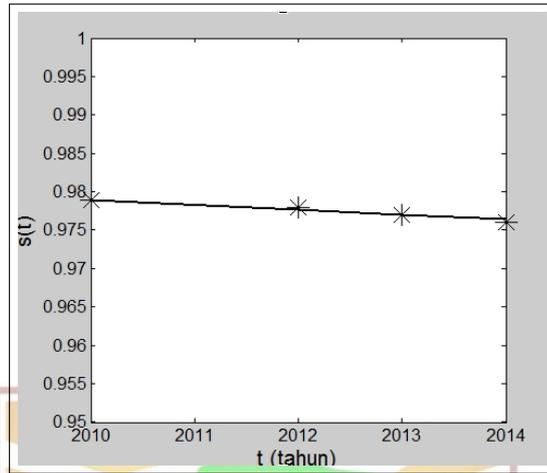
4. Lakukan optimasi numerik terhadap parameter-parameter pada sistem persamaan diferensial (4.1.5) dengan menggunakan fungsi `fminsearch` yang telah tersedia pada Matlab. Berikut kode program fungsinya.

```
function p_opt = sir_optimize(data, tspan, y0, p0)
p_opt = fminsearch(@sir_disc_nested, p0);
function disc = sir_disc_nested(p)
disc = sir_discrepancy(p, data, tspan, y0);
end
end
```

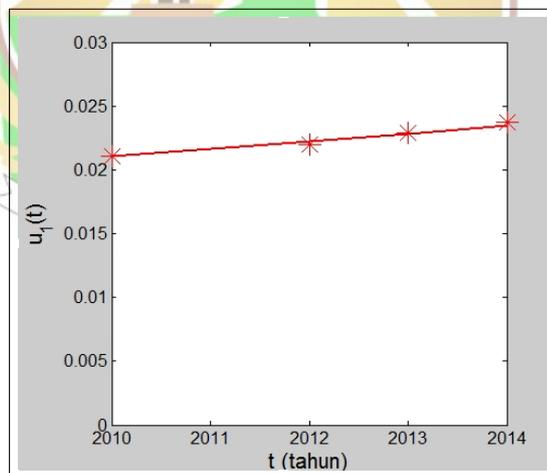
5. Selanjutnya jalankan `p_opt = optimize(data, tspan, y0, p0)` untuk memperoleh hasil optimasi dari nilai-nilai parameter (disimpan dalam `p_opt`)
6. Selesaikan model persamaan diferensial (dalam hal ini digunakan solver `ode45`) dengan memasukkan nilai optimal parameter (`p_opt`). Selanjutnya plot data dan solusi model yang diperoleh dengan pencocokan.

Gambar 4.2.2, 4.2.3 dan 4.2.3 menampilkan hasil pencocokan model dengan data kasus narkoba di Sumatera Barat masing-masing untuk solusi

$s(t)$, $u_1(t)$, dan $u_2(t)$.

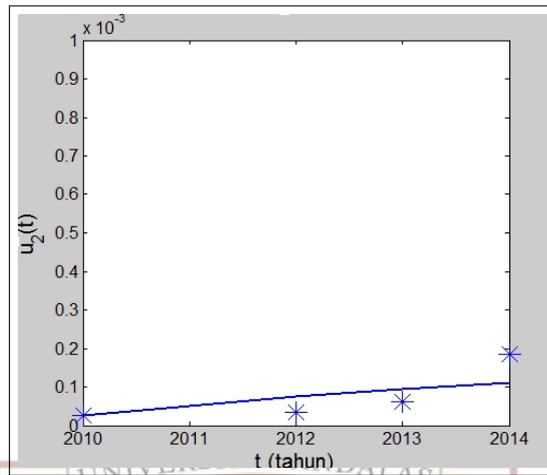


Gambar 4.2.1: Hasil pencocokan model (garis) dengan data (bintang) untuk solusi $s(t)$



Gambar 4.2.2: Hasil pencocokan model (garis) dengan data (bintang) untuk solusi $u_1(t)$

Selanjutnya nilai-nilai parameter yang diperoleh dari hasil pencocokan data diberikan pada Tabel 4.2.2.



Gambar 4.2.3: Hasil pencocokan model (garis) dengan data (bintang) untuk solusi $u_2(t)$



Parameter	Nilai Parameter
β_1	0.1880
β_3	0.1804
ρ	0.0016
μ	0,0850
δ_1	0.0705
δ_2	0.1228

Tabel 4.2.2: Nilai-nilai Parameter pada Model White Comiskey

Nilai-nilai parameter yang diperoleh tersebut dapat diinterpretasikan sebagai berikut :

1. Peluang individu menjadi pengguna narkoba (β_1).

Nilai peluang individu menjadi pengguna narkoba adalah ini sebesar 0,1880. Angka ini dinilai cukup besar karena sekitar 2 dari 10 orang penduduk Sumbar dalam rentang usia 15 - 64 tahun berpeluang menjadi pengguna narkoba.

2. Peluang pengguna narkoba yang dalam masa rehabilitasi kembali menggunakan narkoba (β_3).

Nilai peluang pengguna narkoba yang dalam masa rehabilitasi kembali menggunakan narkoba adalah ini sebesar 0,1804. Artinya sekitar 2 dari 10 orang yang pernah ikut rehabilitasi kembali menjadi pengguna narkoba. Hal ini dinilai cukup memprihatinkan.

3. Proporsi pengguna narkoba yang masuk dalam masa rehabilitasi (ρ).

Parameter yang mendeskripsikan proporsi pengguna narkoba yang masuk dalam masa rehabilitasi menunjukkan nilai yang cukup kecil, yaitu sebesar 0,0016, artinya hanya 16 dari 10000 orang pengguna narkoba yang menjalani masa rehabilitasi.

4. Laju kematian alami dari populasi (per satuan waktu) (μ).

Nilai laju kematian alami dari populasi adalah sebesar 0,0850. Hal ini menunjukkan bahwa sekitar 8 dari 100 kasus kematian alami terjadi tiap tahunnya.

5. Laju kematian pengguna narkoba yang tidak dalam masa rehabilitasi (δ_1).

Nilai laju kematian pengguna narkoba yang tidak dalam masa rehabilitasi adalah sebesar 0,0705. Hal ini menunjukkan bahwa sekitar 7 dari 100 pengguna narkoba yang tidak dalam masa rehabilitasi mengalami kematian tiap tahunnya.

6. Laju kematian pengguna narkoba yang dalam masa rehabilitasi (δ_2).

Nilai laju kematian pengguna narkoba yang dalam masa rehabilitasi adalah sebesar 0,1228. Hal ini menunjukkan bahwa sekitar 12 dari 100 pengguna narkoba yang dalam masa rehabilitasi mengalami kematian tiap tahunnya.

Interpretasi: Berdasarkan hasil pencocokan model terhadap data, diperoleh $\beta_1 = 0,1880$ dan $\beta_3 = 0,1804$, yaitu memenuhi $\beta_1 > \beta_3$. Selanjutnya juga diperoleh $\mu = 0,0850$ dan $\delta_2 = 0,1228$, yaitu memenuhi $\mu + \delta_2 < 1$. Berdasarkan Teorema 3.2.1, hasil ini menunjukkan bahwa kasus pengguna narkoba di Sumatera Barat akan tetap ada dengan jumlah yang cenderung konstan. Oleh karena itu perlu dilakukan upaya lebih dari berbagai pihak agar kasus pengguna narkoba di Sumatera Barat dapat ditekan jumlahnya dari tahun ke tahun.

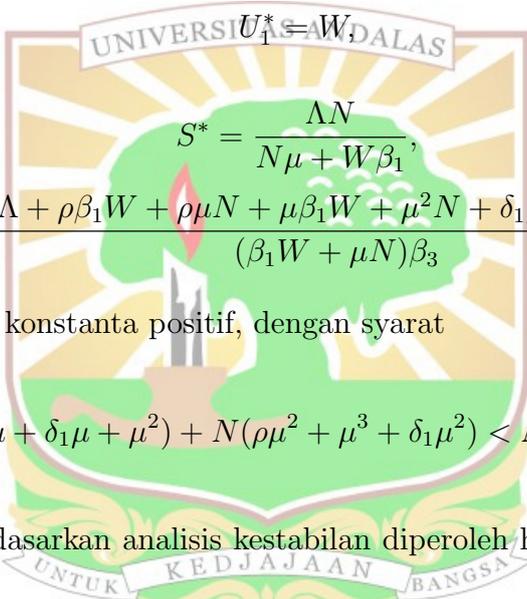
BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Pada tugas akhir ini telah diperoleh titik kesetimbangan endemik

$E^* = (S^*, U_1^*, U_2^*)$ dari sistem (2.8.6) sebagai berikut :


$$U_1^* = W,$$
$$S^* = \frac{\Lambda N}{N\mu + W\beta_1},$$
$$U_2^* = \frac{(-\beta_1\Lambda + \rho\beta_1W + \rho\mu N + \mu\beta_1W + \mu^2N + \delta_1\beta_1W + \delta_1\mu N)N}{(\beta_1W + \mu N)\beta_3}$$

dimana W suatu konstanta positif, dengan syarat

$$\delta_2N(\rho\mu + \delta_1\mu + \mu^2) + N(\rho\mu^2 + \mu^3 + \delta_1\mu^2) < \Lambda\beta_1(\delta_2 + \mu).$$

Selanjutnya, berdasarkan analisis kestabilan diperoleh hasil bahwa titik kesetimbangan endemik E^* stabil asimtotik jika memenuhi

$$\beta_1 > \beta_3$$

dan

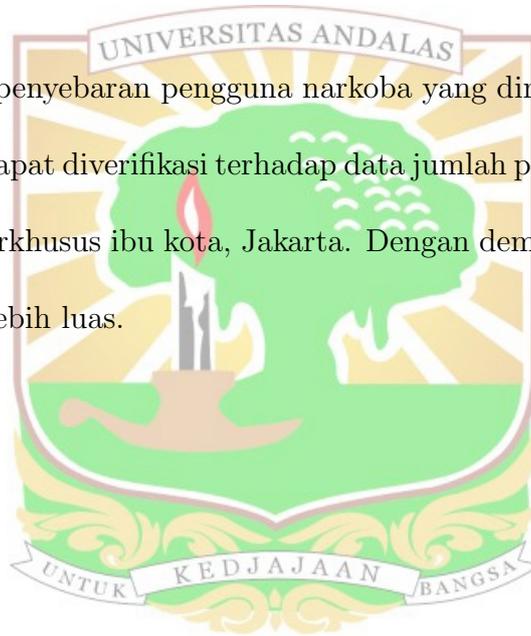
$$\mu + \delta_2 < 1.$$

Hasil dari analisis kestabilan model di sekitar titik kesetimbangan endemik tersebut kemudian diverifikasi terhadap data empirik pada kasus narkoba yang terjadi di Sumatera Barat tahun 2010 - 2014. Dengan melakukan pencocokan

model terhadap data, diperoleh $\beta_1 = 0,1880$, $\beta_3 = 0,1804$, $\mu = 0,0850$ dan $\delta_2 = 0,1228$ yaitu memenuhi $\beta_1 > \beta_3$ dan $\mu + \delta_2 < 1$. Hasil ini menunjukkan bahwa kasus pengguna narkoba di Sumatera Barat akan tetap ada dengan jumlah yang cenderung konstan. Oleh karena itu perlu dilakukan upaya lebih dari berbagai pihak agar kasus pengguna narkoba di Sumatera Barat dapat ditekan jumlahnya dari tahun ke tahun.

5.2 Saran

Model penyebaran pengguna narkoba yang dirumuskan oleh White - Comiskey juga dapat diverifikasi terhadap data jumlah penyalahgunaan narkoba di daerah lain terkhusus ibu kota, Jakarta. Dengan demikian, dapat diperoleh informasi yang lebih luas.



DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anonim. 2017. Indonesia darurat narkoba, 6 juta orang jadi pecandu. <https://nasional.okezone.com/read/2017/07/20/337/1740788/indonesia-darurat-narkoba-6-juta-orang-jadi-pecandu>, diakses tanggal 20 Agustus 2019 pukul 12.00 WIB.
- [2] Anonim. 2015. Indonesia, peringkat 1 narkoba se-Asean. <https://www.kompasiana.com/amp/andinifie/indonesia-peringkat-1-narkoba-seasean-54f8a0eba33311a188b460b>, diakses tanggal 27 Juli 2020 pukul 17.00 WIB.
- [3] Anton, H. 1991. *Aljabar Linier Elementer Edisi Kedelapan Jilid 1*. Erlangga, Jakarta
- [4] Ariesy, D. E. 2018. *Pemodelan dan Analisis Kestabilan Penyebaran Pengguna Narkoba. Skripsi S-1*, tidak diterbitkan. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Andalas, Padang
- [5] Badan Narkotika Nasional, [PKKUI] Pusat Penelitian Kesehatan Universitas Indonesia. 2016. *Hasil Survei Penyalahgunaan dan Peredaran Gelap Narkoba Pada Kelompok Pelajar dan Mahasiswa di 18 Provinsi Tahun 2016*.

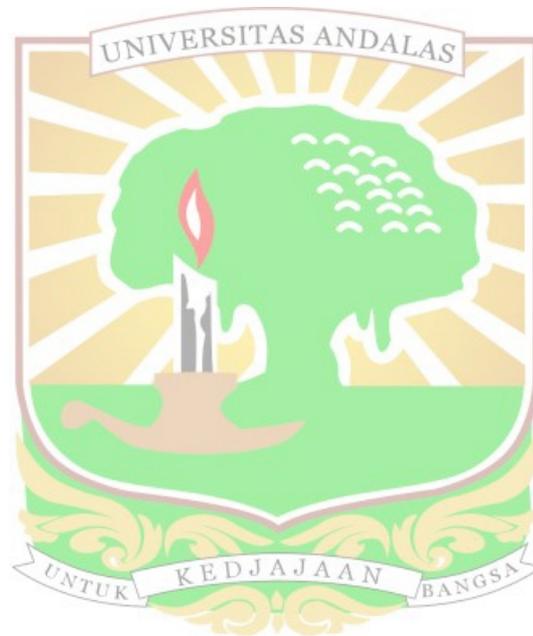


- [6] Badan Narkotika Nasional Republik Indonesia. 2017. *Modul Pendidikan Anti Narkoba Bagi Kalangan Pelajar*. Direktorat Diseminasi Informasi Deputi Bidang Pencegahan BNN, Jakarta Timur.
- [7] Boyce, W. E. and Prime. 2001 *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley Sons, New York
- [8] Finizio, J. and Ladas, T. 1982. *An Introduction to Differential Equations*. Wadsworth Publishing Company Belmon, California
- [9] Fisher, S. D. 1990. *Complex Variables Second Edition*. Wadworth and Software Pacific Grove, California
- [10] G. J. Olsder. 1994. *Mathematical System Theory*. Delft University Press, Delft
- [11] Grossman, S.I. 1986. *Multivariable Calculus, Linear Algebra, and Differential Equations Second Edition*. Academic Press, Orlando
- [12] Keshet, L. 1988. *Matematisal Models in Biology*. Random House, New York.
- [13] Lestari, R. 2012. Pengembangan Model Penyebaran Pengguna Narkoba White-Comiskey. *Tesis S-2*, tidak diterbitkan. Institut Pertanian Bogor, Bogor.
- [14] Meserve, B. E. 1953. *Fundamental Concepts of Algebra*. General Publising Company, Canada



- [15] Moerti, W. 2018. Data BNNP: jumlah pengguna narkoba di Sumbar capai 66.612 orang. <https://merdeka.com/peristiwa/data-bnnp-jumlah-pengguna-narkoba-di-sumbar-capai-66612-orang.html>, diakses tanggal 27 Juli 2020 pukul 17.30 WIB
- [16] Mulone G. and B. Straughan. 2009. A note on heroin epidemics. *Mathematical Biosciences*. **218**: 138-141.
- [17] Riadi, M. 2013. Pengertian dan jenis-jenis napza. <http://www.kajianpustaka.com/2013/08/pengertian-dan-jenis-jenis-napza.html?m=1>, diakses tanggal 5 Maret 2019 pukul 22.00 WIB.
- [18] Savitri, R., dkk. 2014. *Profil Dinas Kesehatan Tahun 2014*. Dinas Kesehatan Provinsi Sumatera Barat, Padang
- [19] Savitri, R., dkk. 2015. *Profil Dinas Kesehatan Tahun 2015*. Dinas Kesehatan Provinsi Sumatera Barat, Padang
- [20] Savitri, R., dkk. 2014. *Profil Dinas Kesehatan Tahun 2016*. Dinas Kesehatan Provinsi Sumatera Barat, Padang
- [21] Savitri, R., dkk. 2017. *Profil Dinas Kesehatan Tahun 2017*. Dinas Kesehatan Provinsi Sumatera Barat, Padang
- [22] Wazwaz, A. M. 2009. *Partial Differential Equation and Solitary Waves Theory*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin

- [23] White, E. and Comiskey, C. 2006. Heroin epidemics, treatment and ODE modelling. *Mathematical Biosciences*. **208**: 312-324.
- [24] Winata, R. 2018. Biaya rehabilitasi narkoba beikisar Rp 20 juta. <http://www.medanbisnisdaily.com/news/read/2018/02/28/338941/biaya-rehabilitasi-narkoba-berkisar-rp-20juta>, diakses tanggal 27 Juni 2019 pukul 13.00 WIB.



Lampiran 1. Data Penyalahgunaan Narkoba Sumatera Barat Tahun 2010
 - 2014 berdasarkan PG4N dan LIT BNN

Tahun	Jumlah Populasi	Total Pengguna Narkoba	Total Pengguna Narkoba	Pengguna dalam Rehabilitasi	Pengguna tidak dalam Rehabilitasi
	Umur 15 - 64	PG4N	LIT BNN	PG4N	
2010	3025126	62082	63873	76	63797
2011	3136423	66041	66041		
2012	3189161	70135	70135	109	70026
2013	3241285	74358	74358	204	74154
2014	3291564		78702	608	78094
2015	3339964		83170		
2016	3386002				
2017	3430904				
2018	3473287				

Tabel 5.2.1: Data Jumlah Penyalahgunaan Narkoba di Sumatera Barat berdasarkan PG4N dan LIT BNN



Lampiran 2. Angka Kematian Penduduk Sumatera Barat Tahun 2017

JUMLAH KELAHIRAN MENURUT JENIS KELAMIN
TAHUN 2017

NO	KABUPATEN	JUMLAH KELAHIRAN								
		LAKI-LAKI			PEREMPUAN			LAKI-LAKI + PEREMPUAN		
		HIDUP	MATI	HIDUP + MATI	HIDUP	MATI	HIDUP + MATI	HIDUP	MATI	HIDUP + MATI
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	PADANG	8,415	28	8,443	8,539	30	8,569	16,954	58	17,012
2	PESISIR SELATAN	4,628	8	4,636	4,419	15	4,434	9,047	23	9,070
3	DHARMASRAYA	1,580	14	1,594	2,091	19	2,110	3,671	33	3,704
4	SIJUNJUNG	2,199	31	2,230	2,046	13	2,059	4,245	47	4,292
5	SOLOK SELATAN	1,752	7	1,759	1,512	15	1,527	3,264	22	3,286
6	PAYAKUMBUH	1,470	13	1,483	1,368	11	1,379	2,838	24	2,862
7	SAWAHLUNTO	534	6	540	479	4	483	1,013	10	1,023
8	50 KOTA	3,200	32	3,232	3,122	15	3,137	6,322	47	6,369
9	BUKITTINGGI	1,219	6	1,225	1,208	6	1,214	2,427	12	2,439
10	KOTA SOLOK	790	5	795	636	4	640	1,426	9	1,435
11	PARIAMAN	898	5	903	782	7	789	1,680	12	1,692
12	PASAMAN BARAT	4,342	20	4,362	3,947	19	3,966	8,289	39	8,328
13	PADANG PARIAMAN	2,625	8	2,633	3,941	9	3,950	6,566	17	6,583
14	AGAM	3,879	38	3,949	3,610	28	3,638	7,489	66	7,555
15	KAB. SOLOK	3,370	28	3,398	3,534	28	3,562	6,904	56	6,960
16	TANAH DATAR	2,492	33	2,525	2,240	12	2,252	4,732	45	4,777
17	PADANG PANJANG	538	2	540	551	10	561	1,089	12	1,101
18	MENTAWAI	891	15	906	939	14	953	1,830	29	1,859
19	PASAMAN	2,772	13	2,785	2,567	18	2,585	5,339	31	5,370
JUMLAH (KAB/KOTA)		47,594	312	47,938	47,531	277	47,808	95,125	592	95,717
ANGKA LAHIR MATI PER 1.000 KELAHIRAN			6.5			5.8			6.2	

Sumber : Dinas Kesehatan Kabupaten/Kota

Keterangan : Angka Lahir Mati (dilaporkan) tersebut di atas belum tentu menggambarkan Angka Lahir Mati yang sebenarnya di populasi

Tabel 5.2.2: Angka Kematian Penduduk Sumatera Barat Tahun 2017 [21]



Lampiran 3. Angka Kematian Penduduk Sumatera Barat Tahun 2016

JUMLAH KELAHIRAN MENURUT JENIS KELAMIN
TAHUN 2016

NO	KABUPATEN	JUMLAH KELAHIRAN								
		LAKI-LAKI			PEREMPUAN			LAKI-LAKI + PEREMPUAN		
		HIDUP	MATI	HIDUP + MATI	HIDUP	MATI	HIDUP + MATI	HIDUP	MATI	HIDUP + MATI
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	PADANG	8,322	22	8,344	8,390	27	8,417	16,712	49	16,761
2	PESISIR SELATAN	4,628	8	4,636	4,419	15	4,434	9,047	23	9,070
3	DHARMASRAYA	2,010	17	2,027	2,046	12	2,058	4,056	29	4,085
4	SIJUNJUNG	2,319	26	2,345	1,910	19	1,929	4,229	45	4,274
5	SOLOK SELATAN	1,752	7	1,759	1,512	15	1,527	3,264	22	3,286
6	PAYAKUMBUH	1,388	13	1,401	1,374	6	1,380	2,762	19	2,781
7	SAWAHLUNTO	563	6	569	473	3	476	1,036	9	1,045
8	SD KOTA	3,252	37	3,289	2,905	22	2,927	6,157	59	6,216
9	BUKITTINGGI	1,256	6	1,262	1,209	3	1,212	2,465	9	2,474
10	KOTA SOLOK	725	5	730	648	3	651	1,373	8	1,381
11	PARIAMAN	879	5	884	754	6	760	1,633	11	1,644
12	PASAMAN BARAT	4,410	22	4,432	4,157	19	4,176	8,567	41	8,608
13	PADANG PARIAMAN	2,625	8	2,633	3,941	9	3,950	6,566	17	6,583
14	AGAM	3,847	43	3,890	3,640	46	3,686	7,467	89	7,576
15	KAB. SOLOK	2,421	30	2,451	3,561	26	3,587	5,982	56	6,038
16	TANAH DATAR	2,550	25	2,575	2,371	19	2,390	4,921	44	4,965
17	PADANG PANJANG	538	1	539	557	0	557	1,096	1	1,096
18	MENTAWAI	722	16	738	636	11	647	1,358	27	1,385
19	PASAMAN	2,937	29	2,966	2,523	21	2,544	5,460	50	5,510
JUMLAH (KAB/KOTA)		47,144	326	47,470	47,026	282	47,308	94,170	608	94,778
ANGKA LAHIR MATI PER 1.000 KELAHIRA			6.9			6.0			6.4	

Sumber : Dinas Kesehatan Kabupaten/Kota

Keterangan : Angka Lahir Mati (dilaporkan) tersebut di atas belum tentu menggambarkan Angka Lahir Mati yang sebenarnya di populasi

Tabel 5.2.3: Angka Kematian Penduduk Sumatera Barat Tahun 2016 [20]



Lampiran 4. Angka Kematian Penduduk Sumatera Barat Tahun 2015

JUMLAH KELAHIRAN MENURUT JENIS KELAMIN
TAHUN 2015

NO	KABUPATEN	JUMLAH KELAHIRAN								
		LAKI-LAKI			PEREMPUAN			LAKI-LAKI + PEREMPUAN		
		HIDUP	MATI	HIDUP + MATI	HIDUP	MATI	HIDUP + MATI	HIDUP	MATI	HIDUP + MATI
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	PADANG	8.545	37	8.582	8.555	23	8.578	17.100	60	17.160
2	PESISIR SELATAN	4.628	8	4.636	4.419	15	4.434	9.047	23	9.070
3	DHARMASRAYA	1.955	16	1.971	1.966	20	1.986	3.921	36	3.957
4	SIJUNJUNG	2.118	21	2.139	3.177	14	3.191	5.295	35	5.330
5	SOLOK SELATAN	1.584	10	1.594	1.514	3	1.517	3.098	13	3.111
6	PAYAKUMBUH	1.339	11	1.350	1.294	7	1.301	2.633	18	2.651
7	SAWAHLUNTO	534	5	539	511	1	512	1.045	6	1.051
8	SO KOTA	3.185	33	3.218	2.920	19	2.939	6.105	52	6.157
9	BUKITTINGGI	1.233	7	1.240	1.174	9	1.183	2.407	16	2.423
10	KOTA SOLOK	698	5	701	637	6	643	1.333	11	1.344
11	PARIAMAN	894	6	890	827	6	833	1.711	12	1.723
12	PASAMAN BARAT	3.962	26	3.988	3.753	27	3.780	7.715	53	7.768
13	PADANG PARIAMAN	3.526	26	3.552	3.864	18	3.882	7.390	44	7.434
14	AGAM	3.886	36	3.922	3.693	40	3.733	7.579	76	7.655
15	KAB. SOLOK	3.155	31	3.186	3.317	40	3.357	6.472	71	6.543
16	TANAH DATAR	2.647	22	2.669	2.467	8	2.475	5.114	30	5.144
17	PADANG PANJANG	513	3	516	483	2	485	996	5	1.001
18	MENTAWAI	975	14	989	885	13	898	1.880	27	1.887
19	PASAMAN	2.855	30	2.885	2.520	14	2.534	5.375	44	5.419
JUMLAH (KAB/KOTA)		48.220	347	48.567	47.976	285	48.261	96.196	632	96.828
ANGKA LAHIR MATI PER 1.000 KELAHIRAN			7,1			5,9			6,5	

Sumber : Dinas Kesehatan Kabupaten/Kota

Keterangan : Angka Lahir Mati (dilaporkan) tersebut di atas belum tentu menggambarkan Angka Lahir Mati yang sebenarnya di populasi

Tabel 5.2.4: Angka Kematian Penduduk Sumatera Barat Tahun 2015 [19]



Lampiran 5. Angka Kematian Penduduk Sumatera Barat Tahun 2014

JUMLAH KELAHIRAN MENURUT JENIS KELAMIN
TAHUN 2014

NO	KABUPATEN/KOTA	JUMLAH KELAHIRAN								
		LAKI-LAKI			PEREMPUAN			LAKI-LAKI + PEREMPUAN		
		HIDUP	MATI	HIDUP + MATI	HIDUP	MATI	HIDUP + MATI	HIDUP	MATI	HIDUP + MATI
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	DHARMASRAYA	1.884	20	1.904	1.957	17	1.974	3.841	37	3.878
2	AGAM	4.056	62	4.118	3.594	31	3.625	7.650	93	7.743
3	PADANG	8.431	33	8.464	8.602	27	8.629	17.033	60	17.093
4	PASAMAN	2.837	22	2.859	2.482	12	2.494	5.319	34	5.353
5	PESISIR SELATAN	4.259	21	4.280	4.391	18	4.409	8.650	39	8.689
6	BUKITTINGGI	1.208	7	1.215	1.197	3	1.200	2.405	10	2.415
7	PAYAKUMBUH	1.316	19	1.335	1.241	5	1.246	2.557	24	2.581
8	SAWAHLUNTO	541	8	549	501	4	505	1.042	12	1.054
9	KAB SOLOK	3.131	33	3.164	3.200	44	3.244	6.331	77	6.408
10	KEPULAUAN MENTAWAI	924	10	934	877	9	886	1.801	19	1.820
11	SOLOK SELATAN	1.406	10	1.416	1.251	2	1.253	2.657	12	2.669
12	KAB SIJUNJUNG	2.301	23	2.324	2.097	19	2.116	4.398	42	4.440
13	PADANG PARIAMAN	3.350	23	3.373	3.399	24	3.423	6.749	47	6.796
14	LIMA PULUH KOTA	3.118	29	3.147	2.885	11	2.896	6.003	40	6.043
15	PADANG PANJANG	478	3	479	490	6	496	966	9	975
16	PASAMAN BARAT	4.157	31	4.188	3.977	13	3.990	8.134	44	8.178
17	PARIAMAN	840	9	849	760	5	765	1.600	14	1.614
18	SOLOK	643	4	647	594	7	601	1.237	11	1.248
19	TANAH DATAR	2.502	24	2.526	2.562	14	2.576	5.064	38	5.102
JUMLAH (KAB/KOTA)		47.380	391	47.771	46.057	271	46.328	93.437	662	94.099
ANGKA LAHIR/MATI PER 1.000 KELAHIRAN (DILAPORKAN)			8,2			5,8			7,0	

Sumber : Dinas Kesehatan Kabupaten/Kota

Keterangan : Angka Lahir Mati (dilaporkan) tersebut di atas belum tentu menggambarkan Angka Lahir Mati yang sebenarnya di populasi

Tabel 5.2.5: Angka Kematian Penduduk Sumatera Barat Tahun 2014 [18]



RIWAYAT HIDUP



Penulis bernama Ghea Ratu Annisa, lahir di Padang pada tanggal 27 Desember 1994 yang merupakan anak ke-tiga dari empat bersaudara dari pasangan Ayahanda Adang Sutisno dan Ibunda Rozaolina Zahir. Penulis menamatkan pendidikan di SD Baiturrahmah Padang pada tahun 2007, SMP Negeri 1 Padang pada tahun 2010, dan SMA Negeri 5 Padang pada tahun 2013. Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa jurusan matematika FMIPA (Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam) Universitas Andalas melalui jalur SBMPTN (Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri).

Selama menjadi mahasiswa di jurusan Matematika FMIPA Unand, penulis aktif dalam organisasi/lembaga kemahasiswaan, yaitu anggota HIMATIKA (Himpunan Mahasiswa Matematika) FMIPA Unand pada tahun 2014-2018. Komisi B DPM KM FMIPA Unand pada tahun 2014-2015. DPF Unand pada tahun 2015. Vice President Public Relation AIESEC Unand pada tahun 2016-2017. Penulis melaksanakan KKN (Kuliah Kerja Nyata) di Kampung Baru Padusunan Kecamatan Pariaman Timur Kota Pariaman pada tahun 2015 dalam rangka melaksanakan salah satu mata kuliah wajib jurusan matematika FMIPA Unand.

Puji syukur atas usaha, dorongan, dan motivasi serta seizin Allah yang Maha Kuasa, penulis dapat menyelesaikan studi di Universitas Andalas selama tujuh tahun satu bulan untuk meraih gelar Sarjana Sains (S.Si) pada tanggal 6 Agustus 2020.