PENENTUAN SUATU MATRIKS PENTADIAGONAL YANG SIMILAR DENGAN MATRIKS KOMPANION

SKRIPSI

MELISA AULIA FITRIYANTI
07 134 031

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2011

PENENTUAN SUATU MATRIKS PENTADIAGONAL YANG SIMILAR DENGAN MATRIKS KOMPANION

SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA

Oleh

MELISA AULIA FITRIYANTI

07 134 031

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

PADANG

2011

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

Alhamdulillah, puji syukur penulis sampaikan kehadirat Allah SWT karena berkat ridho dan izin-Nya jualah penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul **"Penentuan Suatu Matriks Pentadiagonal yang Similar dengan Matriks Kompanion"**. Salawat dan salam tidak lupa penulis kirimkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW yang telah membawa umat manusia dari zaman kebodohan ke zaman yang penuh ilmu pengetahuan. Skripsi ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang.

Selanjutnya, penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini, terutama kepada :

1. Bapak Dr. Muhafzan selaku Pembimbing I yang telah membantu mengarahkan penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Serta ilmu, ide, saran dan nasihat yang telah diberikan selama proses bimbingan tugas akhir maupun selama penulis menjalani perkuliahan.
2. Bapak Prof. Dr. I Made Arnawa selaku Pembimbing II yang telah membantu penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini. Serta ilmu yang didapat selama penulis menjalani perkuliahan.
3. Bapak Dr. Dodi Devianto, Ibu Dr. Lyra Yulianti dan Bapak Dr. Ahmad Iqbal Baqi selaku penguji yang telah membaca, memberi masukan dan saran kepada penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.

4. Ibu Ir. Hazmira Yozza, M.Si selaku Pembimbing Akademik yang telah membantu penulis dalam urusan akademik terutama dalam merancang studi agar dapat selesai pada waktunya. Serta nasihat dan ilmu yang telah diberikan selama penulis menjalani proses studi.
5. Bapak Dr. Syafrizal Sy selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang.
6. Bapak/Ibu dosen dan karyawan/i Jurusan Matematika FMIPA Unand.
7. Sahabat-sahabatku mahasiswa matematika angkatan 2007 FMIPA Unand, Ayu, Lina, Etha, Jisung, Ciap, Cibo, dan semua yang tidak dapat disebutkan satu persatu, tetap semangat.
8. Anggota HIMATIKA, terimakasih untuk semua hal yang mampu membentuk sikap dan kepribadian penulis selama menjalani kehidupan kampus.
9. Sahabat-sahabat seperjuangan di Ikatan Alumni SMA N 3 Bukittinggi, Satel, Peris, Nova, Qbal, Bogem, Niky, Yogi dan Sarul.

Terima kasih kepada ayahanda Zulkifli Hasan dan ibunda Awisda di Bukittinggi, karena dengan kasih sayang, doa, dorongan dan semangat beliau, penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini tepat pada waktunya. Untuk kakakku Vebi Amela ZA dan adikku Nevi Tri Neti, terima kasih untuk segala hal yang telah kita lalui bersama.

Akhir kata, semoga skripsi ini bermanfaat untuk sivitas akademik Universitas Andalas khususnya dan masyarakat umumnya. Amin.

Padang, Juli 2011

Melisa Aulia F

ABSTRAK

Diberikan polinomial berikut

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

dengan $a_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Matriks kompanion untuk polanomial ini adalah

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dalam skripsi ini, dikaji masalah penentuan matriks pentadiagonal yang similar dengan matriks A. Hasil akhir menunjukkan bahwa semua matriks yang diperoleh sebagai hasil kali dari matriks $A_{i_1} \dots A_{i_n}$ untuk suatu permutasi $(i_1, \dots, i_n)$ dari $\{1, \dots, n\}$ memiliki spektrum yang sama dan multiplisitas aljabar yang sama sehingga semua matriks tersebut adalah similar. Selain itu, semua perkalian matriks $A_{i_1} \dots A_{i_n}$ untuk sebarang permutasi $(i_1, \dots, i_n)$ adalah matriks kompanion dari $p(x)$ dan similar dengan matriks A. Khususnya, hal ini berlaku untuk matrik $\hat{A} = BC$, dengan $B = A_1 A_3 \dots A_k$ dengan k bilangan ganjil terbesar diantara $\{1, \dots, n\}$, dan $C = A_2 A_4 \dots A_k$ dengan k bilangan genap terbesar diantara $\{1, \dots, n\}$. Selanjutnya, matriks $B = C_1 \oplus C_3 \oplus \dots \oplus C_k$ dengan k bilangan ganjil terbesar diantara $\{1, \dots, n\}$, dan matriks $C = I_1 \oplus C_2 \oplus C_4 \oplus \dots \oplus C_k$ dengan k bilangan genap terbesar diantara $\{1, \dots, n\}$. Untuk n genap, diagonal terakhir dari matriks C adalah $(-a_n)$, untuk n ganjil, diagonal terakhir dari matriks B adalah $(-a_n)$. Matriks $\hat{A}$ adalah pentadiagonal dan memiliki entri-entri yang sama seperti matriks kompanion A.

Kata Kunci : *Matriks kompanion, Matriks pentadiagonal, Polinomial karakteristik, Similaritas.*

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perhatikan polinomial orde n dengan $n \in \mathbb{N}, n > 1$ berikut [3]

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n\ , \tag{1.1.1}$$

dengan $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$. Berdasarkan polinomial tersebut, diberikan suatu matriks berikut

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.1.2}$$

dengan $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ yang disebut sebagai matriks kompanion untuk polinomial (1.1.1). Pada dasarnya, matriks (1.1.2) memenuhi persamaan berikut

$$\det(xI - A) = p(x). \tag{1.1.3}$$

Perlu diperhatikan bahwa penghitungan akar-akar dari persamaan (1.1.1) tidaklah mudah. Penghitungan ini diduga akan menjadi lebih mudah jika matriks (1.1.2) dapat didiagonalkan, sehingga perlu dilakukan manipulasi terhadap entri-entri matriks (1.1.2) untuk memperoleh bentuk matriks diagonal yang similar dengan matriks (1.1.2).

Sebagai pendekatan, perkalian dari faktor-faktor matriks (1.1.2) di bawah kondisi yang diberikan, akan menghasilkan suatu bentuk matriks kompanion baru yang similar dengan matriks (1.1.2) dimana polinomial karakteristiknya memenuhi persamaan (1.1.3). Seperti yang telah diketahui, setiap matriks bujursangkar akan similar dengan suatu matriks Jordan [6], yaitu jika $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ maka terdapat matriks nonsingular $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sedemikian sehingga

$$B = P^{-1}JP,$$

dengan $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ adalah suatu matriks Jordan. Setiap matriks yang similar dengan A akan memiliki bentuk matriks Jordan yang sama, sehingga jika diinginkan suatu matriks dalam bentuk pentadiagonal yang similar dengan A, maka perlu dikaji teknik pemfaktoran matriks A pada (1.1.2) untuk memperoleh bentuk pentadiagonal yang memiliki bentuk matriks Jordan yang sama dengan matriks A. Hal ini menjadi topik yang menarik untuk dikaji lebih lanjut.

Matriks A dari persamaan (1.1.2) akan difaktorkan ke dalam n buah matriks. Perkalian dari faktor-faktor tersebut adalah similar. Tulisan ini akan menjelaskan teknik atau cara untuk memperoleh suatu matriks kompanion yang baru dalam bentuk matriks pentadiagonal yang similar dengan (1.1.2). Beberapa contoh kasus diberikan untuk mengilustrasikan hal tersebut.

1.2 Perumusan Masalah

Diberikan suatu matriks kompanion $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Masalah yang dikaji adalah bagaimana teknik mendapatkan suatu matriks pentadiagonal yang similar dengan matriks kompanion A.

1.3 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan penulisan ini adalah untuk menentukan suatu matriks pentadiagonal yang similar dengan suatu matriks kompanion A.

1.4 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan terdiri dari empat bab, yaitu:

Bab I : Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang, perumusan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan.

Bab II : Landasan Teori

Bab ini berisi teori-teori mengenai hal-hal yang berhubungan dengan masalah yang akan dibahas, yaitu: teori matriks, similaritas, struktur Jordan dan matriks kompanion.

Bab III : Penentuan Suatu Matriks Pentadiagonal yang Similar dengan Matriks Kompanion

Bab ini berisi tentang langkah-langkah pemfaktoran matriks kompanion untuk memperoleh matriks baru dalam bentuk pentadiagonal yang similar dengan matriks semula. Beberapa contoh kasus diberikan untuk memahami pembahasan.

Bab IV : Kesimpulan

Bab ini berisi kesimpulan dari hasil yang telah dibahas dan dibuktikan pada bab sebelumnya.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini diperkenalkan konsep-konsep dasar, definisi dan notasi, termasuk istilah-istilah yang berguna dalam menentukan suatu matriks pentadiagonal yang similar dengan matriks (1.1.2). Subbab 2.1 menjelaskan teori matriks. Subbab 2.2 berisi tentang similaritas. Subbab 2.3 menjelaskan struktur Jordan. Dan terakhir, subbab 2.4 berisi tentang matriks kompanion.

2.1 Teori Matriks [1]

Istilah matriks digunakan dalam matematika untuk menyatakan jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Ukuran dari suatu matriks menyatakan berapa banyak baris dan kolom yang dimilikinya. Jika m dan n adalah bilangan bulat positif, maka matrik $m \times n$ menyatakan bahwa matriks tersebut memiliki m baris dan n kolom.

Jika A adalah matriks $m \times n$, maka entri pada baris ke-i dan kolom ke-j dari A dinyatakan dengan a_{ij}. Kolom dari A adalah vektor pada $\mathbb{R}^m$ dan dinyatakan dengan $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_n}$ yang dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut

$$A = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n].$$

Definisi 2.1.1 **[1]** *Jika A adalah suatu matriks berukuran $m \times n$ dan B adalah mariks berukuran $n \times p$ dengan kolom $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_p$, maka hasil kali AB adalah matriks berukuran $m \times p$ dengan kolom adalah $A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \dots, A\mathbf{b}_p$, yaitu*

$$AB = A[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \dots \quad \mathbf{b}_p] = [A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2 \quad \dots \quad A\mathbf{b}_p].$$

Suatu matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dikatakan *dapat dibalik* jika terdapat matriks $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sehingga $AB = BA = I$ dimana $I = I_n$ adalah matriks identitas berukuran $n \times n$. Dalam kasus ini B dikatakan *invers* dari A yang dinyatakan sebagai A^{-1}, sehingga

$$A^{-1}A = I \text{ dan } AA^{-1} = I.$$

Suatu matriks yang tidak dapat dibalik disebut sebagai matriks singular, dan suatu matriks yang dapat dibalik disebut sebagai matriks nonsingular.

Selanjutnya, untuk memperluas konsep determinan matriks bujursangkar dengan orde yang lebih tinggi, maka diperlukan konsep awal dari permutasi.

Definisi 2.1.2 [1] *Permutasi dari bilangan bulat* $\{1,2,\dots,n\}$ *adalah susunan bilangan bulat menurut suatu aturan tanpa adanya penghilangan atau pengulangan.*

Secara umum, himpunan $\{1,2,\dots,n\}$ akan memiliki $n(n-1)(n-2)\dots 2 \,.\, 1 = n!$ permutasi yang berbeda. Permutasi umum dari himpunan $\{1,2,\dots,n\}$ dinyatakan sebagai $(i_1, i_2, \dots, i_n)$. Disini i_1 adalah integer pertama dari permutasi, i_2 adalah integer kedua, dan seterusnya. Suatu inversi dikatakan terjadi dalam suatu permutasi $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ jika integer yang lebih besar mendahului yang lebih kecil.

Definisi 2.1.3 [1] *Jika* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *maka sebuah vektor tak nol* $\mathbf{x}$ *pada* $\mathbb{R}^n$ *disebut vektor eigen dari* A *jika* $A\mathbf{x}$ *adalah sebuah kelipatan skalar dari* $\mathbf{x}$ *yaitu*

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \tag{2.1.1}$$

untuk skalar λ sebarang. Skalar λ disebut nilai eigen dari A dan $\mathbf{x}$ *disebut sebagai vektor eigen dari A yang terkait dengan λ.*

Untuk memperoleh nilai eigen dari suatu matriks A, persamaan (2.1.1) dapat dituliskan kembali sebagai

$$A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}\,,$$

atau secara equivalen dapat ditulis sebagai

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0\,. \tag{2.1.2}$$

Agar λ dapat menjadi nilai eigen, harus terdapat satu solusi tak nol dari persamaan (2.1.2). Persamaan (2.1.2) memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0\,. \tag{2.1.3}$$

Persamaan (2.1.3) disebut *persamaan karakteristik* matriks A dan skalar-skalar yang memenuhi persamaan (2.1.3) adalah nilai-nilai eigen dari A. Apabila diperluas lagi, $\det(\lambda I - A)$ adalah sebuah polinomial p dalam variabel λ yang disebut sebagai *polinomial karakteristik* matriks A dengan bentuk sebagai berikut

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Definisi 2.1.4 [5] *Himpunan semua nilai eigen $\lambda \in \mathbb{C}$ dari matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ disebut sebagai spektrum dari matriks A yang dinyatakan sebagai $\sigma(A)$.*

Definisi 2.1.5 [6] *Misalkan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dan λ adalah nilai eigen dari A, multiplisitas aljabar dari λ adalah banyaknya pengulangan λ sebagai akar polinomial karakteristik dari A.*

Definisi 2.1.6 [5] *Suatu matriks* $D = [d_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *disebut matriks diagonal jika* $d_{ij} = 0$ *untuk* $j \neq i$. *Secara umum dinyatakan sebagai*

$$D = \mathrm{diag}(d_{11}, \dots, d_{nn})\,.$$

Definisi 2.1.7 [5] *Suatu matriks* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *dengan bentuk sebagai berikut*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & & & \mathbf{0} \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & A_{kk} \end{pmatrix}, \tag{2.1.4}$$

dimana $A_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i}, i = 1, \dots, k$ *dan* $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, *disebut sebagai matriks blok diagonal. Matriks* (2.1.4) *dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut*

$$A = A_{11} \oplus A_{22} \oplus \dots \oplus A_{kk} = \oplus \sum_{i=1}^{k} A_{ii}\,. \tag{2.1.5}$$

Persamaan (2.1.5) *disebut sebagai jumlah langsung (direct sum) matriks* $A_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i}, i = 1, \dots, k$.

Definisi 2.1.8 [2] *Suatu matriks* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *dikatakan matriks pentadiagonal dengan* $n \geq 3$ *adalah matriks dengan bentuk sebagai berikut*

$$P = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 & e_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b_1 & c_2 & d_2 & e_2 & \ddots & & \vdots \\ a_1 & b_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & e_{n-3} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & d_{n-2} & e_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & a_{n-3} & b_{n-2} & c_{n-1} & d_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-2} & b_{n-1} & c_n \end{pmatrix}.$$

P ditentukan oleh lima vektor diagonal yaitu

(i). n buah vektor $c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$

(ii). $(n-1)$ buah vektor $b = \{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}$

(iii). $(n-1)$ buah vektor $d = \{d_1, d_2, \dots, d_{n-1}\}$

(iv). $(n-2)$ buah vektor $a = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-2}\}$

(v). $(n-2)$ buah vektor $e = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-2}\}$

Secara umum, matriks pentadiagonal adalah matriks dengan $n + 2(n-1) + 2(n-2) = 5n - 6$ entri.

2.2 Similaritas

Definisi 2.2.1 [5] *Suatu matriks $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dikatakan similar dengan matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jika terdapat suatu matriks nonsingular $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sehingga*

$$B = S^{-1}AS\,.$$

Transformasi $A \to S^{-1}AS$ disebut transformasi similaritas oleh matriks S.

Teorema 2.2.2 [1] *Jika $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ maka*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)\,.$$

Bukti.

Kasus 1. Jika matriks A tidak dapat dibalik, maka $\det(A) = 0$ dan perkalian matriks AB juga tidak dapat dibalik. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\det(AB) &= 0\\ &= \det(A)\det(B).\end{aligned}$$

Kasus 2. Jika matriks A dapat dibalik, maka matriks A dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari matriks-matriks elementer, yaitu

$$A = E_1 E_2 \cdots E_r \ ,$$

sehingga diperoleh

$$AB = E_1 E_2 \cdots E_r \, B \, .$$

Maka

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_r)\det(B) \\ &= \det(E_1 E_2 \cdots E_r)\det(B) \\ &= \det(A)\det(B). \ \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 2.2.3 [5] *Diketahui* $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$*. Jika B similar dengan A, maka polinomial karakteristik dari B sama dengan polinomial karakteristik A.*

Bukti.

Polinomial karakteristik B dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(\lambda I - B), \quad \text{untuk suatu } \lambda \in \mathbb{R} \\ &= \det(\lambda S^{-1}S - S^{-1}AS) \\ &= \det(S^{-1}(\lambda I - A)S) \\ &= \det S^{-1} \det(\lambda I - A) \det S \\ &= (\det S^{-1})(\det S) \det(\lambda I - A) \\ &= \det(\lambda I - A) = p_A(\lambda) \, . \ \blacksquare \end{aligned}$$

Akibat 2.2.4 [5] *Jika* $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *dan A similar dengan B, maka A dan B memiliki nilai eigen yang sama, begitu juga dengan multiplisitasnya.*

Definisi 2.2.5 [5] *Jika suatu matriks* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *adalah similar dengan suatu matriks diagonal maka A dikatakan dapat didiagonalkan.*

Teorema 2.2.6 [5] *Jika* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *dan* $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *dengan* $m \leq n$, *maka* BA *memiliki nilai eigen yang sama dengan* AB, *terdapat* $n-m$ *nilai eigen* 0. *Jika* $m = n$ *dan sekurang-kurangnya satu dari A atau B adalah nonsingular, maka* AB *dan* BA *adalah similar.*

Bukti.

Perhatikan perkalian matriks blok berikut

$$\begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ B & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{pmatrix} \tag{2.2.1}$$

$$\begin{pmatrix} I & A \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B & BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{pmatrix}. \tag{2.2.2}$$

Persamaan (2.2.1) dan (2.2.2) adalah matriks berukuran $(m+n)\times(m+n)$. Karena matriks blok $\begin{pmatrix} I & A \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}$ adalah nonsingular (semua nilai eigennya adalah 1), maka

$$\begin{pmatrix} I & A \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ B & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B & BA \end{pmatrix}, \tag{2.2.3}$$

persamaan (2.2.3) menunjukkan bahwa matriks berikut

$$C_1 = \begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ B & \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ dan } C_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B & BA \end{pmatrix},$$

adalah similar. Nilai eigen C_1 terdiri atas n nilai eigen 0 dan m nilai eigen dari AB. Nilai eigen C_2 terdiri atas m nilai eigen 0 dan n nilai eigen dari BA. Karena nilai eigen C_1 dan C_2 sama, berdasarkan Akibat 2.2.4 C_1 dan C_2 juga memiliki multiplisitas yang sama, maka pernyataan pertama dari teorema terpenuhi. Terakhir dari pernyataan, jika $m = n$ dan A nonsingular, maka $AB = A(BA)A^{-1}$. Selanjutnya, jika $m = n$ dan B nonsingular, maka $BA = B(AB)B^{-1}$. ■

2.3 Struktur Jordan

Definisi 2.3.1 [5] *Suatu blok Jordan $J_k(\lambda)$ adalah matriks segitiga atas berukuran $k \times k$ dengan bentuk sebagai berikut*

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ \mathbf{0} & & & & \lambda \end{pmatrix}. \tag{2.3.1}$$

Suatu matriks Jordan $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ adalah jumlah langsung dari (2.3.1) *dengan bentuk sebagai berikut*

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \mathbf{0} \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.3.2 [6] *Untuk setiap $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dengan nilai eigen berbeda yaitu $\lambda \in \sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$ terdapat suatu matriks nonsingular $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sehingga*

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J(\lambda_s) \end{pmatrix}.$$

Setiap matriks yang similar dengan A memiliki bentuk Jordan yang sama.

2.4 Matriks Kompanion

Polinomial karakteristik dari matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ memenuhi persamaan $p(x) = \det(xI - A)$ disebut sebagai polinomial monik, yaitu polinomial dengan koefisien pangkat tertinggi adalah 1. Jika polinomial karakteristik memenuhi persamaan $\hat{p}(x) = \det(A - xI)$, maka koefisien pangkat tertinggi pada polinomial adalah $(-1)^n$.

Definisi 2.4.1 [6] *Untuk setiap polinomial monik* $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, *matriks kompanionnya adalah matriks berukuran* $n \times n$ *yang didefinisikan sebagai berikut*

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposisi 2.4.2 [4] *Polinomial karakteristik dari matriks A adalah*

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

Bukti.

Untuk $n = 2$, $p(x) = x^2 + a_1 x + a_2$ dengan matriks kompanion adalah

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

sehingga polinomial karakteristiknya adalah

$$\det(xI - A) = \det\begin{pmatrix} x + a_1 & a_2 \\ -1 & x \end{pmatrix}$$

$$= x^2 + a_1 x + a_2 = p(x).$$

Selanjutnya, untuk polinomial orde $n-1$, $p(x) = x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x + a_{n-1}$ dengan matriks kompanion $A \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$, asumsikan polinomial karakteristik A adalah

$$\det\left(xI - A_{(n-1)\times(n-1)}\right) = x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x + a_{n-1} = p(x)\,.$$

Dengan demikian, untuk $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, polinomial karakteristiknya adalah

$$\begin{aligned}
\det(xI - A_{n\times n}) &= x\ \det\left(xI - A_{(n-1)\times(n-1)}\right) + a_n \\
&= x\,(x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x + a_{n-1}) + a_n \\
&= x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \\
&= p(x)\,.\ \blacksquare
\end{aligned}$$

BAB III

PENENTUAN SUATU MATRIKS PENTADIAGONAL YANG SIMILAR DENGAN MATRIKS KOMPANION

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, beberapa modifikasi dari (1.1.2) adalah matriks kompanion dari $p(x)$ asalkan $\det(xI - A) = p(x)$. Pada bab ini akan dibahas teknik penentuan suatu matriks kompanion baru dalam bentuk pentadiagonal yang similar dengan matriks kompanion semula. Agar dapat dipahami, pada bab ini akan diberikan beberapa aplikasi kasus.

Lema 3.1 *Misalkan A adalah suatu matriks kompanion seperti pada* (1.1.2). Misalkan juga A_k *adalah suatu matriks dengan bentuk sebagai berikut*

$$A_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & & \mathbf{0} \\ & C_k & \\ \mathbf{0} & & I_{n-k-1} \end{pmatrix}, \; k = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{3.1}$$

dengan C_k *adalah suatu matriks berukuran* 2×2 *sedemikian sehingga*

$$C_k = \begin{pmatrix} -a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

dan A_n *adalah suatu matriks dengan bentuk sebagai berikut*

$$A_n = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1, -a_n), \tag{3.3}$$

maka

$$A = A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n .$$

Bukti.

Misalkan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ adalah matriks kompanion dari polinomial $p(x)$, akan ditunjukkan bahwa $A = A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$. Proses pembuktian menggunakan prinsip induksi matematika.

Untuk $n = 2$ berlaku

$$C_1 = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

maka matriks A_1 dapat ditulis dengan bentuk sebagai berikut

$$A_1 = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dan matriks A_2 dapat ditulis dengan bentuk sebagai berikut

$$A_2 = \operatorname{diag}(1,\ -a_2),$$

sehingga diperoleh

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Jadi, A adalah matriks kompanion berukuran 2×2. Selanjutnya, untuk $n = m$ misalkan

$$A = A_1 A_2 \dots A_{m-1} A_m,$$

$A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ berlaku, akan dibuktikan

$$A = A_1 A_2 \dots A_m A_{m+1}.$$

Untuk $n = m$ maka $k = 1, 2, \dots, m-1$. Untuk $k = 1$, matriks A_1 adalah

$$A_1 = \begin{pmatrix} C_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{m-2} \end{pmatrix},$$

dan

$$C_1 = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

maka matriks A_1 dapat ditulis dengan bentuk sebagai berikut

$$A_1 = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Untuk $k = 2$, matriks A_2 adalah

$$A_2 = \begin{pmatrix} I_1 & & \mathbf{0} \\ & C_2 & \\ \mathbf{0} & & I_{m-3} \end{pmatrix},$$

dan

$$C_2 = \begin{pmatrix} -a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

maka matriks A_2 dapat ditulis dengan bentuk sebagai berikut

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Demikian seterusnya hingga $k = m - 1$ sehingga matriks A_{m-1} dapat ditulis dalam bentuk berikut

$$A_{m-1} = \begin{pmatrix} I_{m-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_{m-1} \end{pmatrix},$$

dan

$$C_{m-1} = \begin{pmatrix} -a_{m-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

maka matriks A_{m-1} dapat ditulis dengan bentuk sebagai berikut

$$A_{m-1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{m-1} & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Untuk $n = m$ misalkan matriks A_m dapat ditulis dengan bentuk sebagai berikut

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_m \end{pmatrix},$$

sehingga diperoleh

$$A = A_1\, A_2 \,\ldots\, A_{m-1}\, A_m$$

$$= \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_m \end{pmatrix}$$

$$
=\begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{m-1} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_m \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{m-1} & -a_m \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = A.
$$

Jadi, A adalah matriks kompanion berukuran $m \times m$.

Selanjutnya, untuk $n = m + 1$ maka A adalah matriks berukuran $(m + 1) \times (m + 1)$. Karena $A = A_1 A_2 \dots A_{m-1} A_m$ berlaku, maka diperoleh perkalian matriks A_k untuk $k = 1, 2, \dots, m$ dengan bentuk sebagai berikut

$$
A_1 A_2 \dots A_{m-1} A_m = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{m-1} & -a_m & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},
$$

untuk $n = m + 1$, matriks A_{m+1} dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut

$$
A_{m+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{m+1} \end{pmatrix},
$$

sehingga

$$A_1\,A_2 \ldots A_m\,A_{m+1} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{m-1} & -a_m & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{m+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{m-1} & -a_m & -a_{m+1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A\,.$$

A adalah matriks kompanion berukuran $(m+1) \times (m+1)$. Karena pernyataan benar untuk $n = m + 1$, maka disimpulkan bahwa

$$A = A_1\,A_2 \,\ldots\, A_{n-1}\,A_n \ \blacksquare$$

Teorema 3.2 *Semua matriks yang diperoleh sebagai hasil kali dari matriks $A_{i_1} \ldots A_{i_n}$ untuk suatu permutasi $(i_1, \ldots, i_n)$ dari $\{1, \ldots, n\}$ memiliki spektrum yang sama dan multiplisitas aljabar yang sama sehingga semua matriks tersebut adalah similar.*

Bukti.

Misalkan A adalah suatu matriks kompanion berukuran $n \times n$ untuk suatu polinomial $p(x)$ dan A dapat difaktorkan kedalam n buah matriks. Setiap faktor dari A dapat ditulis kedalam perkalian matriks sebagai berikut

$$A_{i_1}A_{i_2} \ldots A_{i_n}\,, \tag{3.4}$$

untuk suatu permutasi $(i_1, \ldots, i_n)$ dari $\{1, \ldots, n\}$. Akan ditunjukkan bahwa

1. Matriks (3.4) mempunyai spektrum yang sama untuk setiap $i = 1, \dots, n$.
2. Nilai eigen – nilai eigen dari matriks (3.4) mempunyai multiplisitas aljabar yang sama untuk suatu permutasi $(i_1, \dots, i_n)$ dari $\{1, \dots, n\}$.

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan perkalian (3.4) dapat ditulis sebagai perkalian dua buah matriks, sebutlah M dan N, dengan $M = A_{i_1}A_{i_3}A_{i_5}$ dan $N = A_{i_2}A_{i_4}A_{i_6}A_{i_7} \dots A_{i_n}$. Akan dibuktikan bahwa NM similar dengan MN. Perhatikan bahwa

$$\begin{pmatrix} MN & \mathbf{0} \\ N & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & M \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{i_1}A_{i_3}A_{i_5}A_{i_2}A_{i_4}A_{i_6}A_{i_7}\cdots A_{i_n} & \mathbf{0} \\ A_{i_2}A_{i_4}A_{i_6}A_{i_7}\cdots A_{i_n} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A_{i_1}A_{i_3}A_{i_5} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{i_1}A_{i_3}A_{i_5}A_{i_2}A_{i_4}A_{i_6}A_{i_7}\cdots A_{i_n} & A_{i_1}A_{i_3}A_{i_5}A_{i_2}A_{i_4}A_{i_6}A_{i_7}\cdots A_{i_n}A_{i_1}A_{i_3}A_{i_5} \\ A_{i_2}A_{i_4}A_{i_6}A_{i_7}\cdots A_{i_n} & A_{i_2}A_{i_4}A_{i_6}A_{i_7}\cdots A_{i_n}A_{i_1}A_{i_3}A_{i_5} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

dan

$$\begin{pmatrix} I & M \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ N & NM \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A_{i_1}A_{i_3}A_{i_5} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_{i_2}A_{i_4}A_{i_6}A_{i_7}\cdots A_{i_n} & A_{i_2}A_{i_4}A_{i_6}A_{i_7}\cdots A_{i_n}A_{i_1}A_{i_3}A_{i_5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{i_1}A_{i_3}A_{i_5}A_{i_2}A_{i_4}A_{i_6}A_{i_7}\cdots A_{i_n} & A_{i_1}A_{i_3}A_{i_5}A_{i_2}A_{i_4}A_{i_6}A_{i_7}\cdots A_{i_n}A_{i_1}A_{i_3}A_{i_5} \\ A_{i_2}A_{i_4}A_{i_6}A_{i_7}\cdots A_{i_n} & A_{i_2}A_{i_4}A_{i_6}A_{i_7}\cdots A_{i_n}A_{i_1}A_{i_3}A_{i_5} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Karena matriks $\begin{pmatrix} I & A_{i_1}A_{i_3}A_{i_5} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}$ adalah nonsingular maka fakta (3.5) dan (3.6) membuktikan bahwa

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_{i_2}A_{i_4}A_{i_6}A_{i_7}\cdots A_{i_n} & A_{i_2}A_{i_4}A_{i_6}A_{i_7}\cdots A_{i_n}A_{i_1}A_{i_3}A_{i_5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & A_{i_1}A_{i_3}A_{i_5} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A_{i_1}A_{i_3}A_{i_5}A_{i_2}A_{i_4}A_{i_6}A_{i_7}\cdots A_{i_n} & \mathbf{0} \\ A_{i_2}A_{i_4}A_{i_6}A_{i_7}\cdots A_{i_n} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A_{i_1}A_{i_3}A_{i_5} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix},$$

atau dapat ditulis

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ N & NM \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & M \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} MN & \mathbf{0} \\ N & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & M \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Fakta (3.7) memperlihatkan bahwa matriks $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ N & NM \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} MN & \mathbf{0} \\ N & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ adalah similar. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 2.2.3, polinomial karakteristik $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ N & NM \end{pmatrix}$ sama dengan polinomial karakteristik $\begin{pmatrix} MN & \mathbf{0} \\ N & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, yaitu

$$\begin{aligned}
\det\left(\lambda\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ N & NM \end{pmatrix}\right) &= \det\left(\lambda\begin{pmatrix} I & M \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} I & M \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & M \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} MN & \mathbf{0} \\ N & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & M \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\left(\begin{pmatrix} I & M \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}^{-1}\left(\lambda\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} MN & \mathbf{0} \\ N & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} I & M \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} I & M \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}^{-1} \det\left(\lambda\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} MN & \mathbf{0} \\ N & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right) \det\begin{pmatrix} I & M \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} I & M \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}^{-1} \det\begin{pmatrix} I & M \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} \det\left(\lambda\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} MN & \mathbf{0} \\ N & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\left(\begin{pmatrix} I & M \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} I & M \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}\right) \det\left(\lambda\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} MN & \mathbf{0} \\ N & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\left(\lambda\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} MN & \mathbf{0} \\ N & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right),
\end{aligned}$$

untuk suatu $\lambda \in \mathbb{C}$. Dalam hal ini, λ merupakan nilai eigen dari $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ N & NM \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} MN & \mathbf{0} \\ N & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Akibatnya, nilai eigen $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ N & NM \end{pmatrix}$ akan sama dengan nilai eigen $\begin{pmatrix} MN & \mathbf{0} \\ N & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Karena λ adalah nilai eigen $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ N & NM \end{pmatrix}$, untuk λ memenuhi

$$\det\left(\lambda\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ N & NM \end{pmatrix}\right) = 0 ,$$

atau dapat ditulis

$$\det\begin{pmatrix} \lambda I & \mathbf{0} \\ -N & \lambda I - NM \end{pmatrix} = \det\left(\lambda I\left(\lambda I - NM\right)\right)$$

$$= \det\left(\lambda I\right)\ \det\left(\lambda I - NM\right) = 0 . \qquad (3.8)$$

Karena λ adalah nilai eigen $\begin{pmatrix} MN & \mathbf{0} \\ N & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, untuk λ memenuhi

$$\det\left(\lambda\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} MN & \mathbf{0} \\ N & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right) = 0 ,$$

atau dapat ditulis

$$\det\begin{pmatrix} \lambda I - MN & \mathbf{0} \\ N & \lambda I \end{pmatrix} = \det\left(\left(\lambda I - MN\right)\lambda I\right)$$

$$= \det\left(\lambda I - MN\right)\det\left(\lambda I\right) = 0 . \qquad (3.9)$$

Persamaan (3.8) dan (3.9) menunjukkan bahwa λ adalah nilai eigen dari MN dan juga nilai eigen dari NM. Karena nilai eigen MN dan NM sama, maka berdasarkan Definisi 2.4.2 bentuk matriks Jordannya adalah sama. Sehingga untuk matriks MN, terdapat matriks nonsingular P sedemikian sehingga

$$MN = P^{-1}JP ,$$

dan untuk matriks NM, terdapat matriks nonsingular Q sedemikian sehingga

$$NM = Q^{-1}JQ ,$$

Selanjutnya, karena MN dan NM memiliki bentuk matriks Jordan yang sama, maka MN similar dengan NM. Sehingga berdasarkan Akibat 2.3.3, maka MN dan NM memiliki nilai eigen yang sama dan juga multiplisitas aljabar yang sama. Akibatnya $\sigma(MN) = \sigma(NM)$. Hal ini berlaku untuk sebarang matriks dari permutasi $(i_1, \dots, i_n)$ untuk masing-masing matriks M dan N. Akibatnya, permutasi $(i_1, \dots, i_n)$ dapat dirotasi tanpa mengubah spektrum dan multiplisitas aljabarnya, yaitu permutasi $(i_1, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_n)$ dapat diubah menjadi $(i_{k+1}, \dots, i_n, i_1, \dots, i_k)$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa semua perkalian $A_{i_1} \dots A_{i_n}$ untuk suatu permutasi $(i_1, \dots, i_n)$ dari $\{1, \dots, n\}$ adalah similar. ∎

Teorema 3.3 *Semua perkalian matriks $A_{i_1} \dots A_{i_n}$ untuk sebarang permutasi $(i_1, \dots, i_n)$ adalah matriks kompanion dari $p(x)$ dan similar dengan matriks A. Khususnya, hal ini berlaku untuk matrik $\hat{A} = BC$, dengan $B = A_1 A_3 \dots A_k$ dengan k bilangan ganjil terbesar diantara $\{1, \dots, n\}$, dan $C = A_2 A_4 \dots A_k$ dengan k bilangan genap terbesar diantara $\{1, \dots, n\}$.*

Selanjutnya, matriks $B = C_1 \oplus C_3 \oplus \dots \oplus C_k$ dengan k bilangan ganjil terbesar diantara $\{1, \dots, n\}$, dan matriks $C = I_1 \oplus C_2 \oplus C_4 \oplus \dots \oplus C_k$ dengan k bilangan genap terbesar diantara $\{1, \dots, n\}$. Untuk n genap, diagonal terakhir dari matriks C adalah $(-a_n)$, untuk n ganjil, diagonal terakhir dari matriks B adalah $(-a_n)$. Matriks $\hat{A}$ adalah pentadiagonal dan memiliki entri-entri yang sama seperti matriks kompanion A.

Bukti.

Pernyataan pertama dan kedua dari Teorema 3.3 telah dibuktikan dalam Lema 3.1 dan Teorema 3.2. Telah diketahui sebelumnya, faktor-faktor matriks $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ adalah

$$A_1=\begin{pmatrix}-a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -a_3 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

$$,\dots, A_{n-1}=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, A_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n\end{pmatrix}$$

B adalah matriks dari perkalian $A_1\ A_3$ ..., untuk n genap matriks B adalah

$$B=A_1A_3..A_{n-1}.=\left(\begin{array}{cc|cc|c|cc}-a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & -a_3 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}C_1 & & & \\ & C_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{n-1}\end{pmatrix}=C_1\oplus C_3\oplus\cdots\oplus C_{n-1}, \tag{3.10}$$

dan matriks B untuk n ganjil adalah

$$
B = A_1 A_3 \ldots A_n = \left(\begin{array}{cc|cc|c|ccc}
-a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & -a_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-2} & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n
\end{array}\right)
$$

$$
= \begin{pmatrix}
C_1 & & & & \\
& C_3 & & & \\
& & \ddots & & \\
& & & C_{n-2} & \\
& & & & -a_n
\end{pmatrix}
$$

$$
= C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_{n-2} \oplus (-a_n) . \tag{3.11}
$$

C adalah matriks dari perkalian $A_2\ A_4$ ..., untuk n genap matriks C adalah

$$
C = A_2 A_4 \ldots A_n = \left(\begin{array}{c|cc|c|ccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & -a_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-2} & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n
\end{array}\right)
$$

$$
= \begin{pmatrix}
I_1 & & & & \\
& C_2 & & & \\
& & \ddots & & \\
& & & C_{n-2} & \\
& & & & -a_n
\end{pmatrix}
$$

$$
= I_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_{n-2} \oplus (-a_n) , \tag{3.12}
$$

dan matriks C untuk n ganjil adalah

$$C = A_2 A_4 \dots A_{n-1} = \left(\begin{array}{c|cc|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -a_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} I_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{n-1} \end{pmatrix} = I_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_{n-1} . \qquad (3.13)$$

Dari (3.10) dan (3.11), dapat dibuktikan bahwa matriks

$$B = C_1 \oplus C_3 \oplus C_5 \oplus \dots \oplus C_k ,$$

dengan k bilangan ganjil terbesar diantara $\{1, \dots, n\}$, dan dari (3.12) dan (3.13) diperoleh bahwa

$$C = I_1 \oplus C_2 \oplus C_4 \oplus \dots \oplus C_k ,$$

dengan k bilangan genap terbesar diantara $\{1, \dots, n\}$. Selain itu, juga dapat dibuktikan bahwa diagonal terakhir matriks C adalah $(-a_n)$ untuk n genap, dan diagonal terakhir untuk matriks B adalah $(-a_n)$ untuk n ganjil. Untuk n genap,

$\hat{A} = BC$

$$= \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix}
-a_1 & -a_2 & 1 & & & & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & & & & 0 & \\
0 & -a_3 & 0 & -a_4 & 1 & & & & \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & & & \\
 & & 0 & -a_5 & 0 & \ddots & 0 & & \\
 & & & 1 & 0 & \ddots & -a_{n-2} & 1 & \\
 & & & & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & & & & \ddots & -a_{n-1} & 0 & -a_n \\
 & & & & & & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}, \tag{3.14}
$$

adalah matriks kompanion dari $p(x)$ dan similar dengan matriks A. Untuk n ganjil,

$\hat{A} = BC$

$$
= \begin{pmatrix}
-a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -a_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-2} & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -a_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-3} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
-a_1 & -a_2 & 1 & & & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & \\
0 & -a_3 & 0 & -a_4 & 1 & & & \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & & \\
 & & 0 & -a_5 & 0 & \ddots & 0 & \\
 & & & 1 & 0 & \ddots & -a_{n-1} & 1 \\
 & & & & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
 & 0 & & & & & -a_n & 0
\end{pmatrix}, \tag{3.15}
$$

adalah matriks kompanion untuk polinomial $p(x)$ dan similar dengan matriks A. Matriks (3.14) dan (3.15) merupakan matriks pentadiagonal yang entri-entrinya serupa dengan entri-entri matriks kompanion A. ■

Berikut diberikan dua aplikasi kasus yang berkaitan dengan penentuan matriks pentadiagonal dari suatu matriks kompanion sebagaimana yang terdapat dalam Teorema 3.3. Aplikasi kasus pertama adalah polinomial orde 5 dan kasus kedua adalah polinomial orde 6.

Kasus 1. Diberikan suatu polinomial orde 5 berikut

$$p(x) = x^5 - 7x^4 + 19x^3 - 25x^2 + 16x - 4\,.$$

Matriks kompanion untuk polinomial di atas adalah

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -19 & 25 & -16 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Akan ditentukan suatu matriks pentadiagonal yang similar dengan matriks kompanion A. Pada permasalahan di atas, $p(x)$ adalah polinomial berderajat $n = 5$. Akibatnya, matriks A akan difaktorkan ke dalam 5 matriks berukuran 5×5. Untuk $k = 1, 2, 3, 4$ matriks A_k adalah sebagai berikut,

untuk $k = 1$, matriks A_1 adalah

$$A_1 = \begin{pmatrix} C_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_3 \end{pmatrix},$$

dengan

$$C_1 = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

sehingga matriks A_1 adalah

$$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Untuk $k = 2$, matriks A_2 adalah

$$A_1 = \begin{pmatrix} I_1 & & \mathbf{0} \\ & C_2 & \\ \mathbf{0} & & I_2 \end{pmatrix},$$

dengan

$$C_2 = \begin{pmatrix} -19 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

sehingga matriks A_2 adalah

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Untuk $k = 3$, matriks A_3 adalah

$$A_3 = \begin{pmatrix} I_2 & & \mathbf{0} \\ & C_3 & \\ \mathbf{0} & & I_1 \end{pmatrix},$$

dengan

$$C_3 = \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

sehingga matriks A_3 adalah

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Untuk $k = 4$, matriks A_4 adalah

$$A_4 = \begin{pmatrix} I_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_4 \end{pmatrix},$$

dengan

$$C_4 = \begin{pmatrix} -16 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

sehingga matriks A_4 adalah

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Untuk $n = 5$, matriks A_5 adalah

$$A_5 = \text{diag }(1,1,1,1,4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan Lema 3.1, diperoleh bahwa $A = A_1\, A_2\, A_3\, A_4\, A_5$. Selanjutnya, perkalian $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}A_{i_4}A_{i_5}$ untuk suatu permutasi $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$ dari $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ adalah similar. Untuk $n = 5$ terdapat $5! = 120$ susunan integer $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ yang berbeda untuk setiap perkalian $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}A_{i_4}A_{i_5}$. Misalkan, dipilih susuan integer $\{1,4,5,2,3\}$ untuk permutasi $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$. Maka diperoleh matriks D adalah

$$D = A_1\,A_4\,A_5\,A_2\,A_3 = \begin{pmatrix} 7 & -19 & 25 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dengan polinomial karakteristik adalah

$$\det(xI - D) = \det\left(x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -19 & 25 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} x-7 & 19 & -25 & -1 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & x & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$= (x-7)(x)\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 16 & x & -4 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} + (-19)(-1)\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 16 & x & -4 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$+ (-25)(-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -4 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} + (1)(-1)\begin{vmatrix} -1 & x & 0 \\ 0 & 16 & -4 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-7)(x)(x^3) + (-19)(-1)(x^3) + (-25)(-1)(-x^2) +$$

$$(1)(-1)(-16+4)$$

$$= x^5 - 7x^4 + 19x^3 - 25x^2 + 16x - 4 = p(x)\,.$$

Fakta di atas menunjukkan bahwa polinomial karakteristik matriks D sama dengan polinomial karakteristik matriks kompanion A. Akibatnya, nilai eigen A

yaitu $x \in \sigma(A) = \{2, 1\}$ juga merupakan nilai eigen matriks D, sehingga D memiliki bentuk matriks Jordan yang sama dengan A, yaitu

$$J = \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Jadi, berdasarkan Teorema 3.2, bagaimanapun susunan permutasi $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$, perkalian $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}A_{i_4}A_{i_5}$ akan memiliki polinomial karakteristik dan matriks Jordan yang sama, akibatnya kesemua perkalian tersebut adalah similar. Dengan demikian, akan terdapat suatu matriks $\hat{A} = BC$ yang similar dengan matriks kompanion A dimana B adalah perkalian matriks berikut

$$B = A_1A_3A_5 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

dan C adalah perkalian matriks berikut

$$C = A_2A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sehingga matriks $\hat{A}$ adalah

$$\hat{A} = BC = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -19 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & -16 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

yang merupakan merupakan suatu matriks pentadiagonal. Selanjutnya, akan ditunjukkan $\hat{A}$ similar dengan A.

$$\det(xI - \hat{A}) = \det\left(x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -19 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & -16 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} x-7 & 19 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & x & 16 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & x \end{pmatrix}$$

$$= (x-7)(x)\begin{vmatrix} x & 16 & -1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & -4 & x \end{vmatrix} + (-19)(-1)\begin{vmatrix} x & 16 & -1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & -4 & x \end{vmatrix}$$

$$+(-1)(-1)\begin{vmatrix} -25 & 16 & -1 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -4 & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-7)(x)(x^3) + (-19)(-1)(x^3) + (-1)(-1)(-25x^2 - 4 + 16x)$$

$$= x^5 - 7x^4 + 19x^3 - 25x^2 + 16x - 4 = p(x).$$

Diperoleh nilai eigen $\hat{A}$ yaitu $x \in \sigma(A) = \{2, 1\}$ yang sama dengan nilai eigen matriks A, akibatnya $\hat{A}$ memiliki bentuk matriks Jordan yang sama dengan A, yaitu

$$J = \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Sehingga diperoleh $\hat{A}$ adalah matriks kompanion baru dalam bentuk pentadiagonal yang memiliki entri-entri yang sama dan similar dengan matriks kompanion A.

Kasus 2. Diberikan suatu polinomial orde 6 berikut

$$p(x) = x^6 - 4x^5 - 2x^4 + 20x^3 - 11x^2 - 16x + 12\,.$$

Matriks kompanion untuk polinomial ini adalah

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -20 & 11 & 16 & -12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Akan ditentukan suatu matriks pentadiagonal yang similar dengan matriks kompanion A. Pada permasalahan di atas, $p(x)$ adalah polinomial berderajat $n = 6$. Akibatnya, matriks A akan difaktorkan ke dalam 6 matriks berukuran 6×6. Untuk $k = 1, 2, 3, 4, 5$ matriks A_k adalah sebagai berikut, untuk $k = 1$, matriks A_1 adalah

$$A_1 = \begin{pmatrix} C_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_4 \end{pmatrix},$$

dengan

$$C_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

sehingga matriks A_1 adalah

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Untuk $k = 2$, matriks A_2 adalah

$$A_1 = \begin{pmatrix} I_1 & & \mathbf{0} \\ & C_2 & \\ \mathbf{0} & & I_3 \end{pmatrix},$$

dengan

$$C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

sehingga matriks A_2 adalah

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Untuk $k = 3$, matriks A_3 adalah

$$A_3 = \begin{pmatrix} I_2 & & \mathbf{0} \\ & C_3 & \\ \mathbf{0} & & I_2 \end{pmatrix},$$

dengan

$$C_3 = \begin{pmatrix} -20 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

sehingga matriks A_3 adalah

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Untuk $k = 4$, matriks A_4 adalah

$$A_4 = \begin{pmatrix} I_3 & & \mathbf{0} \\ & C_4 & \\ \mathbf{0} & & I_1 \end{pmatrix},$$

dengan

$$C_4 = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

sehingga matriks A_4 adalah

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Untuk $k = 5$, matriks A_5 adalah

$$A_5 = \begin{pmatrix} I_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_5 \end{pmatrix},$$

dengan

$$C_5 = \begin{pmatrix} 16 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sehingga matriks A_5 adalah

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Untuk $n = 6$, matriks A_6 adalah

$$A_6 = \text{diag } \{1,1,1,1,1,-12\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan Lema 3.1, $A = A_1\, A_2\, A_3\, A_4\, A_5\, A_6$. Selanjutnya, perkalian $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}A_{i_4}A_{i_5}A_{i_6}$ untuk suatu permutasi $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6)$ dari $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ adalah similar. Untuk $n = 6$ terdapat $6! = 720$ susunan integer $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ yang berbeda untuk setiap perkalian $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}A_{i_4}A_{i_5}A_{i_6}$. Misalkan, dipilih susuan integer $\{1, 4, 5, 2, 3, 6\}$ untuk permutasi $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6)$. Dengan demikian, diperoleh matriks E adalah

$$E = A_1\, A_4\, A_5\, A_2\, A_3\, A_6 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -20 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 16 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dengan polinomial karakteristik adalah

$$\det(xI-E)=\det\left(x\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&2&-20&1&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&11&0&16&-12\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}\right)$$

$$=\det\begin{pmatrix}x-4&-2&20&-1&0&0\\-1&x&0&0&0&0\\0&-1&x&0&0&0\\0&0&-11&x&-16&12\\0&0&-1&0&x&0\\0&0&0&0&-1&x\end{pmatrix}$$

$$=(x-4)(x)(x)\begin{vmatrix}x&-16&12\\0&x&0\\0&-1&x\end{vmatrix}+(2)(1)(x)\begin{vmatrix}x&-16&12\\0&x&0\\0&-1&x\end{vmatrix}$$

$$+(20)(-1)(-1)\begin{vmatrix}x&-16&12\\0&x&0\\0&-1&x\end{vmatrix}+(1)(1)(1)\begin{vmatrix}-11&-16&12\\-1&x&0\\0&-1&x\end{vmatrix}$$

$$=x^6-4x^5-2x^4+20x^3-11x^2-16x+12=p(x).$$

Fakta di atas menunjukkan bahwa polinomial karakteristik matriks E sama dengan polinomial karakteristik matriks kompanion A. Akibatnya, nilai eigen A yaitu $x\in\sigma(A)=\{-1,-2,2,3\ 1\}$ juga merupakan nilai eigen matriks D, sehingga D memiliki bentuk matriks Jordan yang sama dengan A, yaitu

$$J=\begin{pmatrix}-1&0&0&0&0&0\\0&-2&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&3&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Jadi, berdasarkan Teorema 3.2, bagaimanapun susunan permutasi $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6)$, perkalian $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}A_{i_4}A_{i_5}A_{i_6}$ akan memiliki polinomial karakteristik dan matriks Jordan yang sama, akibatnya kesemua perkalian tersebut adalah similar. Dengan demikian, akan terdapat suatu matriks $\hat{A} = BC$ yang similar dengan matriks kompanion A dimana B adalah perkalian matriks berikut

$$B = A_1A_3A_5 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dan C adalah perkalian matriks berikut

$$C = A_2A_4A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix},$$

sehingga matriks $\hat{A}$ adalah

$$\hat{A} = BC = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 11 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

yang merupakan suatu matriks pentadiagonal. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\hat{A}$ similar dengan A.

$$
\det(xI - \hat{A}) = \det\left(x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 11 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)
$$

$$
= \det\begin{pmatrix} x-4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & x & -11 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & x & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & x \end{pmatrix}
$$

$$
= (x-4)(x)(x)\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -16 & x & 12 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} + (2)(1)(x)\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -16 & x & 12 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix}
$$

$$
+ (-1)(-1)(20)\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -16 & x & 12 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} + (11)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 12 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}
$$

$$
+ (-1)\begin{vmatrix} -1 & x & 0 \\ 0 & -16 & 12 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}
$$

$$
= x^6 - 4x^5 - 2x^4 + 20x^3 - 11x^2 - 16x + 12 = p(x).
$$

diperoleh nilai eigen $\hat{A}$ yaitu $x \in \sigma(A) = \{-1, -2, 2, 3\ 1\}$ sama dengan nilai eigen matriks A, sehingga $\hat{A}$ memiliki bentuk matriks Jordan yang sama dengan A, yaitu

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sehingga diperoleh $\hat{A}$ adalah matriks kompanion baru dalam bentuk pentadiagonal yang memiliki entri-entri yang sama dan similar dengan matriks kompanion A.

BAB IV

KESIMPULAN

Dari kajian yang telah dilakukan pada bab sebelumnya, maka diperoleh kesimpulan bahwa untuk mendapatkan suatu matriks pentadiagonal yang similar dengan suatu matriks kompanion A, perlu ditunjukkan bahwa

1. semua perkalian matriks faktor $A_{i_1} \dots A_{i_n}$ untuk sebarang permutasi $(i_1, \dots, i_n)$ dari $\{1, \dots, n\}$ adalah matriks kompanion dari $p(x)$ dan similar dengan matriks A.
2. Jika $B = A_1 A_3 \dots A_k$ dan $C = A_2 A_4 \dots A_k$, maka

$$B = C_1 \oplus C_3 \oplus \dots \oplus C_k ,$$

dengan k bilangan ganjil terbesar diantara $\{1, \dots, \mathrm{n}\}$, dan

$$C = I_1 \oplus C_2 \oplus C_4 \oplus \dots \oplus C_k ,$$

dengan k bilangan genap terbesar diantara $\{1, \dots, \mathrm{n}\}$.

Jika dua hal ini dapat dilakukan, maka terdapat suatu matriks $\hat{A} = BC$ adalah matriks pentadiagonal yang similar dan memiliki entri-entri yang sama dengan matriks kompanion A.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H. dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer*. Edisi delapan. Erlangga, Jakarta.

[2] Drini. 2003. *Pentadiagonal Matrix*. http://planetmath.org/encyclopedia/PentadiagonalMatrix.html, 18/04/2011.

[3] Fiedler, Miroslav. 2003. A Note on Companion Matrices. *Linear Algebra and Its Aplications*. **372**:325-331.

[4] Hirsch, Morris and Stephen Smale. 1974. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra.* Academic Press, New York.

[5] Horn, R. A. and R. C. Johnson. 1985. *Matrix Analysis*. Cambridge University, Cambridge.

[6] Meyer, Carl D. 2000. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.* SIAM, Philadelphia.

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis dilahirkan pada tanggal 5 Mei 1989 di Bukittinggi, Sumatera Barat sebagai anak kedua dari tiga bersaudara dari ayah bernama Zulkifli Hasan dengan ibu bernama Awisda. Penulis menamatkan pendidikan Sekolah Dasar pada tahun 2001 di SD N 05 Birugo Bukittinggi, SMP N 1 Bukittinggi pada tahun 2004 dan SMA N 3 Bukittinggi pada tahun 2007. Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang melalui jalur Seleksi Penerimaan Mahasiswa Baru (SPMB).

Selama menjadi mahasiswa di Jurusan Matematika FMIPA Unand, penulis pernah mengikuti kegiatan magang di UKM Pers Mahasiswa Genta Andalas, pernah menduduki jabatan sebagai Staff. Dept. Informasi BEM KM FMIPA Unand periode 2008/2009, menjadi anggota Paduan Suara FMIPA Unand periode 2009/2010, aktif dalam Klub Olimpiade Matematika FMIPA Unand periode 2008/2009, menjadi pengurus HIMATIKA FMIPA Unand bidang Pembinaan Aparat dan Anggota divisi Pembinaan Mahasiswa Baru periode 2009/2010 dan pernah menjadi koordinator asisten Pemrograman Komputer II di Laboratorium Statistika dan Komputasi FMIPA Unand. Selama menjadi anggota HIMATIKA, penulis aktif dalam beberapa kepanitiaan, diantaranya menduduki jabatan sebagai sekretaris Pembinaan Mahasiswa Baru angkatan 2009, panitia bid. Kesekretariatan Pekan Seni Bermatematika (PSB) VI, koordinator Bazar Pekan Seni Bermatematika (PSB) VII, koordinator tim Seminar Nasional Pekan Seni Bermatematika (PSB) VIII, panitia bid. Acara Himatika Goes to School III di Painan. Penulis pernah meraih prestasi sebagai juara I Lomba Cepat Tepat Komputer tingkat fakultas.