BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada tahun 1736, seorang matematikawan dan fisikawan pionir Swiss yang bernama Leonhard Euler mengkaji masalah jembatan Konigsberg dalam teori graf. Pertanyaan adalah "Apakah mungkin untuk menyeberangi masing-masing dari tujuh jembatan tepat satu kali dan kembali ke titik awal tanpa berenang menyeberangi sungai?". Solusi masalah jembatan Konigsberg diberikan oleh Leonhard Euler yang menyimpulkan bahwa jalan seperti itu tidak mungkin. Masalah jembatan Konigsberg dapat dipandang sebagai masalah teori graf dimana kota dipandang sebagai titik dan jembatan dipandang sebagai sisi. Dalam perkembangan ilmu graf terdapat beberapa bidang kajian seperti pewarnaan titik, pewarnaan sisi, bilangan *rainbow connection*, bilangan kromatik, dan bilangan ramsey.

Teori Ramsey merupakan pengembangan dari teori sarang burung merpati *Pigeonhole principle*. Teori Ramsey ini dikemukakan oleh Frank Plumton Ramsey pada tahun 1930. Semenjak dikenalkan, kajian teori Ramsey dalam graf berkembang sehingga menjadi salah satu bidang kajian dalam bidang kombinatorika yang mendapat perhatian. Ide pokok matematika dari teori Ramsey adalah tidak peduli seberapa besar dan rumitnya sebuah sistem S, dan berapapun nilai bilangan asli n, dapat dipilih super-sistem Q sedemikian sehingga Q memuat sistem S. Bagaimanapun Q diwarnai dengan n warna, Q akan selalu memuat monokromatik S. Oleh karena itu dapat dikatakan teori Ramsey mempelajari pewarnaan dalam matematika [21]. Teori bilangan Ramsey klasik diawali dari ide dasar, untuk bilangan asli m dan n, bilang an Ramsey $r(m, n)$ adalah bilangan asli terkecil r sedemikian sehingga setiap pewarnaan merah biru pada semua graf lengkap K_r akan selalu memuat graf lengkap K_m merah atau K_n biru.

Walaupun kajian teori bilangan Ramsey ini mendapat perhatian, namun masih menjadi masalah yang sulit hingga kini. Sampai saat ini masih sembilan bilangan Ramsey klasik yang diketahui. Dalam paper Radziszowski [20] dapat dilihat bilangan Ramsey klasik yang ditemukan adalah sebagai berikut $r(3, 3) = 6, r(3, 4) = 9, r(3, 5) = 14$, $r(4, 4) = 18$ ditemukan Greenwood (1995) [9], $r(3, 6) = 18$ ditemukan Kery (1964) [4], $r(3, 7) = 23$ ditemukan Kalbfleisch (1965) [16], $r(3, 8) = 28, r(3, 9) = 36$ ditemukan Grinstead (1982) [10], dan $r(4, 5) = 25$ ditemukan McKay (1995) [18]. Dan untuk bilangan Ramsey beberapa bilangan m dan n selain itu baru diketahui batas atas dan batas bawahnya. Oleh karena sulitnya mendapatkan bilangan Ramsey klasik untuk nilai m dan n lain, maka kajian bilangan Ramsey diperluas untuk sebarang graf yang tidak harus graf lengkap. Bilangan Ramsey untuk sebarang graf ini dinamakan bilangan Ramsey graf. Bilangan Ramsey graf yaitu dua graf F dan G, bilangan ramsey graf $r(F, G)$ adalah bilangan asli terkecil r sedemikian sehingga setiap pewarnaan merah biru pada semua sisi graf lengkap K_r akan memuat subgraf dengan sisi merah yang isomorfik dengan F atau memuat subgraf dengan sisi biru yang isomorfik dengan graf G.

Bentuk lain dari perluasan kajian bilangan Ramsey adalah bilangan Ramsey bipartit. Konsep umum dari bilangan Ramsey bipartit yaitu, untuk graf bipartit $G_1, G_2, \ldots, G_k$ bilangan Ramsey bipartit $b(G_1, G_2, \ldots, G_k)$ adalah bilangan asli terkecil b sedemikian sehingga untuk sebarang faktorisasi dari graf $K_{b,b}$ dengan k faktor $(F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_k)$, maka untuk suatu i, F_i memuat G_i sebagai subgraf [14]. Bilangan Ramsey bipartit kemudian diperluas menjadi bilangan Ramsey multipartit.

Perluasan bilangan Ramsey multipartit adalah bilangan Ramsey multipartit himpunan dan bilangan Ramsey multipartit ukuran yang dikaji *Burger (2004)* dalam tulisannya yang berjudul *Ramsey Numbers In Complete Balance Multipartite Graphs, Part I : Set Numbers* [2], dan *Ramsey Numbers In Complete Balance Multipartite Graphs, Part II : Size Number*s [3]. Dalam tulisan [2] menjelaskan tentang bilangan Ramsey multipartit ukuran $m_j(K_{n\times l}, K_{s\times t})$ adalah bilangan asli terkecil ζ sedemikian sehingga, jika semua sisi dari graf multipartit seimbang lengkap $K_{j\times\zeta}$ diberi 2-pewarnaan yaitu merah dan biru, maka graf multipartit seimbang lengkap $K_{j\times\zeta}$ akan memuat $K_{n\times l}$ merah atau $K_{s\times t}$ biru sebagai subgraf. Sedangkan dalam paper [3] menjelaskan bilangan Ramsey multipartit himpunan $M_j(K_{n\times l}, K_{s\times t})$ adalah bilangan asli terkecil ζ sedemikian sehingga, jika semua sisi dari graf multipartit seimbang lengkap $K_{\zeta\times j}$ diberi 2-pewarnaan yaitu merah dan biru, maka graf multipartit seimbang lengkap $K_{\zeta\times j}$ akan memuat $K_{n\times l}$ merah atau $K_{s\times t}$ biru sebagai subgraf.

Domain dalam penentuan bilangan Ramsey multipartit himpunan dan bilangan Ramsey multipartit ukuran adalah graf multipartit seimbang lengkap.

Konsep dari bilangan Ramsey multipartit himpunan yaitu misalkan $K_{\zeta \times j}$ adalah suatu graf multipartit seimbang lengkap yang terdiri dari ζ himpunan partit dan j banyaknya titik pada setiap himpunan partit. Misalkan j, n, l, s, t adalah bilangan asli dengan $n, s \geq 2$, bilangan Ramsey multipartit himpunan $M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ adalah bilangan asli terkecil ζ sedemikian sehingga sebarang pewarnaan dari semua sisi $K_{\zeta \times j}$ menggunakan dua warna merah dan biru, $K_{\zeta \times j}$ akan memuat $K_{n \times l}$ merah atau $K_{s \times t}$ biru sebagai subgraf. Sampai saat ini kajian tentang bilangan Ramsey multipartit himpunan belum banyak dikaji. Beberapa bilangan Ramsey multipartit himpunan untuk kombinasi dari dua graf multipartit seimbang lengkap yang telah diperoleh adalah sebagai berikut:

- $M_1(K_{2\times 2}, K_{3\times 3}) = 7$ ditemukan Chartrand [5],
- $M_1(K_{2\times 2}, K_{4\times 1}) = 10$ ditemukan Chv$\acute{a}$tal [6],
- $M_2(K_{2\times 2}, K_{3\times 1}) = 4$, $M_2(K_{2\times 2}, K_{4\times 1}) = 7$, $M_1(K_{2\times 3}, K_{2\times 3}) = 18$ ditemukan Harborth [12] [13] [11],
- $M_1(K_{2\times 2}, K_{6\times 1}) = 18$ ditemukan Exoo [8].

Kemudian, bilangan Ramsey multipartit himpunan diperumum untuk kombinasi graf yang tidak harus graf multipartit seimbang lengkap. Beberapa bilangan Ramsey multipartit himpunan kombinasi dari dua graf yang tidak harus graf multipartit seimbang lengkap, telah diperoleh Colton [17] diantaranya:

- $M_k(K_n, K_m) = R(K_n, K_m)$ untuk setiap bilangan asli k, n dan m,
- $M_k(P_3, P_3) = 3$ untuk $k \leq 2$ dan $M_k(P_3, P_3) = 2$ untuk $k \geq 3$,
- $M_1(P_2, 2K_2) = 4$ dan $M_k(P_3, 2K_2) = 2$ untuk $k \geq 2$,
- $M_1(2K_2, 2K_2) = 5, M_2(2K_2, 2K_2) = 3$ untuk $k \geq 3$ dan $M_k(2K_2, 2K_2) = 2$,
- $M_1(P_4, P_4) = 5, M_2(P_4, P_4) = 3$, dan $M_k(P_4, P_4) = 2$ untuk $k \geq 3$,
- $\left\lfloor \frac{2(n-1)}{k} \right\rfloor < M_k(K_3, P_n) \leq \left\lceil \frac{2(n-1)}{k} \right\rceil + 1$ untuk untuk $n \geq 2k$, dan
- $M_k(C_n, C_m)$ seperti pada Tabel 1 dibawah:

Pada Tabel 1 di atas dapat dilihat bahwa kolom k menyatakan banyak titik yang digunakan dalam graf multipartit seimbang lengkap, dan bilangan yang diwarnai hitam menyatakan bilangan asli terkecil untuk himpunan dari graf multipartit seimbang lengkap yang diperlukan sedemikian sehingga $M_k(C_n, C_m)$ memuat C_n atau C_m sebagai subgraf.

Kajian lain terhadap bilangan Ramsey multipartit himpunan dilakukan oleh Perondi (2018) untuk graf bintang dalam tulisannya *Set and size multipartite Ramsey numbers for stars* [19]. Konsep yang dikemukakan Perondi yaitu bilangan Ramsey multipartit himpunan untuk graf bintang $M_s(K_{1,n1}, \ldots, K_{1,nk})$ adalah bilangan asli terkecil c sedemikan sehingga untuk sebarang pewarnaan dari setiap sisi graf $K_{c\times s}$ memuat graf bintang monokromatik $K_{1,n1}$

Tabel 1. $M_k(C_n, C_m)$

k \ n,m	3,3	3,4	3,5	3,6	4,4	4,5	4,6	5,5	5,6	6,6
1	6	7	9	11	6	7	7	9	11	8
2	$\vdots$	4	5	6	4	4	4	5	6	5
3		3	$\vdots$	≥ 4	3	3	3		≥ 4	3
4		$\vdots$		?	3	$\vdots$	≥ 2		?	≥ 2
5					2		?			?
6					$\vdots$					

dalam i warna untuk suatu $1 \leq i \leq k$. $K_{c\times s}$ adalah graf multipartit seimbang lengkap dengan c partit dan s banyaknya titik pada setiap partit. Selanjutnya, bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk graf bintang $m_c(K_{1,n1}, \ldots, K_{1,nk})$ adalah bilangan asli terkecil s sedemikian sehingga untuk sebarang pewarnaan dari setiap sisi graf $K_{c\times s}$ memuat graf bintang monokromatik $K_{1,n1}$ dalam i warna untuk suatu $1 \leq i \leq k$.

Bilangan Ramsey multipartit himpunan untuk kombinasi graf lintasan dengan roda yaitu $M_j(P_n, W_s)$, dimana graf lintasan dinotasikan dengan P_n adalah graf terhubung yang memiliki n titik dan $n-1$ sisi dengan $n \geq 2$, dan graf roda (*Wheel*) yang dinotasikan dengan W_s adalah graf yang memiliki $s+1$ titik, dimana s titik membentuk *cycle* (C_s) dan 1 titik lain disebut titik pusat (*hub*). Bilangan Ramsey multipartit himpunan $M_j(P_n, W_s)$ menjadi salah satu topik kajian bilangan Ramsey multipartit himpunan yang bukan kombinasi dari graf multipartit seimbang lengkap yang menarik untuk dikaji karena belum ada penelitian yang mengkaji topik ini dan dalam pembuktiannya merujuk dari definisi graf roda, untuk membentuk suatu graf roda haruslah terdapat satu titik pusat (*hub*). Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk mengkaji permasalahan bilangan Ramsey multipartit himpunan untuk kombinasi graf lintasan dengan roda.

1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang masalah, rumusan masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah penentuan bilangan Ramsey multipartit himpunan untuk kombinasi graf lintasan dengan roda.

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini mengkaji tentang bilangan Ramsey multipartit himpunan untuk kombinasi graf lintasan dengan roda. Masalah dalam penelitian ini dibatasi pada $M_j(P_n, W_s)$ dengan $j = 2$, $n = 3$, $n = 4$, dan $s \geq 3$.

1.4 Tujuan Penelitian

Dari rumusan masalah di atas, tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah diperoleh nilai-nilai dari bilangan Ramsey multipartit himpunan untuk kombinasi graf lintasan dengan roda $M_j(P_n, W_s)$ dengan $j = 2$, $n = 3$, $n = 4$, dan $s \geq 3$.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat dan kontribusi dalam meningkatkan pemahaman dalam bidang Ramsey multipartit himpunan, serta dapat memberikan sumbangan terhadap pengembangan kajian matematika bidang kombinatorika, khususnya perkembangan tentang bilangan Ramsey multipartit himpunan.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam proposal penelitian ini disusun sebagai berikut. BAB I merupakan bagian pendahuluan yang berisikan gambaran ringkas dari latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, serta manfaat penelitian.

Pembahasan tentang definisi dan terminologi graf, jenis-jenis graf yang digunakan dalam tulisan ini, serta kajian dasar tentang bilangan Ramsey, bilangan Ramsey multipartit himpunan disajikan pada BAB II. Pada BAB III yang merupakan hasil dari penelitian ini yaitu penentuan Bilangan Ramsey Multipartit Himpunan untuk Kombinasi Graf Lintasan dengan roda. Kesimpulan dan saran terdapat pada BAB IV yang merupakan bab akhir pada tesis ini.