

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Solusi dari persamaan diferensial linier orde dua

$$a_2 D^2 y(x) + a_1 D y(x) + a_0 y(x) = 0 \quad (4.1.1)$$

dengan syarat batas *fractional*:

$$\mu_1 D_{a+}^{\alpha_1} y(x)|_{x=b} + \mu_2 D_{a+}^{\alpha_2} y(x)|_{x=b} = L_1 \quad (4.1.2)$$

$$\mu_3 D_{a+}^{\alpha_3} y(x)|_{x=b} + \mu_4 D_{a+}^{\alpha_4} y(x)|_{x=b} = L_2$$

dimana $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in [0, 2]$, $\alpha_1 \neq \alpha_3$ dan $\alpha_2 \neq \alpha_4$, serta $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, L_1, L_2 \in \mathbb{R}$, $D_{a+}^{\alpha_1}, D_{a+}^{\alpha_2}, D_{a+}^{\alpha_3}$, dan $D_{a+}^{\alpha_4}$ adalah turunan *fractional* Riemann-Liouville kiri orde α dinyatakan sebagai berikut:

1. Jika $a_1^2 - 4a_2a_0 > 0$, diperoleh akar-akar riil berbeda ($r_1 \neq r_2$). Solusi (4.1.1) adalah

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

dengan C_1 dan C_2 adalah konstanta yang akan ditentukan dari sistem persamaan linier berikut:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix},$$

dan

$$A_{11} = \mu_1 D_{a+}^{\alpha_1} e^{r_1 x} |_{x=b} + \mu_2 D_{a+}^{\alpha_2} e^{r_1 x} |_{x=b}$$

$$A_{12} = \mu_1 D_{a+}^{\alpha_1} e^{r_2 x} |_{x=b} + \mu_2 D_{a+}^{\alpha_2} e^{r_2 x} |_{x=b}$$

$$A_{21} = \mu_3 D_{a+}^{\alpha_3} e^{r_1 x} |_{x=b} + \mu_4 D_{a+}^{\alpha_4} e^{r_1 x} |_{x=b}$$

$$A_{22} = \mu_3 D_{a+}^{\alpha_3} e^{r_2 x} |_{x=b} + \mu_4 D_{a+}^{\alpha_4} e^{r_2 x} |_{x=b}$$

dimana:

$$D_{a+}^{\alpha_j} e^{r_k x} = e^{r_k a} (b-a)^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(r_k(b-a)), \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad k = 1, 2. \quad (4.1.3)$$

2. Jika $a_1^2 - 4a_2a_0 = 0$, diperoleh akar-akar riil kembar ($r_1 = r_2$). Solusi (4.1.1) adalah

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x},$$

dengan C_1 dan C_2 adalah konstanta yang akan ditentukan dari sistem persamaan linier berikut:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix},$$

dan

$$A_{11} = \mu_1 D_{a+}^{\alpha_1} e^{r_1 x} |_{x=b} + \mu_2 D_{a+}^{\alpha_2} e^{r_1 x} |_{x=b}$$

$$A_{12} = \mu_1 D_{a+}^{\alpha_1} x e^{r_1 x} |_{x=b} + \mu_2 D_{a+}^{\alpha_2} x e^{r_1 x} |_{x=b}$$

$$A_{21} = \mu_3 D_{a+}^{\alpha_3} e^{r_1 x} |_{x=b} + \mu_4 D_{a+}^{\alpha_4} e^{r_1 x} |_{x=b}$$

$$A_{22} = \mu_3 D_{a+}^{\alpha_3} x e^{r_1 x} |_{x=b} + \mu_4 D_{a+}^{\alpha_4} x e^{r_1 x} |_{x=b}$$

dimana:

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha_j} x e^{r_1 x} &= e^{(r_1)b}(b-a)^{-\alpha+1}\Gamma(\alpha+1) \\ &\times \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(r_1)^i}{\Gamma(\alpha-i+1)\Gamma(i+1)} \left[\frac{1}{\Gamma(2-\alpha+i)} \right. \\ &\left. \times (b-a)^i + \frac{a}{\Gamma(n-\alpha+1)} \right], \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (4.1.4) \end{aligned}$$

4.2 Saran

Dalam tugas akhir ini, penulis membahas bagaimana menentukan solusi dari persamaan diferensial linier orde dua unruk kasus akar riil dengan syarat batas memuat turunan *fractional* Riemann-Liouville kiri. Penulis menyarankan untuk membahas solusi dari persamaan diferensial linier orde dua akar riil dengan syarat batas memuat turunan *fractional* Riemann-Liouville kanan dan kombinasi antara turunan *fractional* Riemann-Liouville kanan serta kiri.

