HUBUNGAN ANTARA KETERCAPAIAN DAN KETERKONTROLAN SISTEM LINIER DISKRIT

SKRIPSI

ERISTIA ARFI
081043083

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2012

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini menyatakan bahwa :

Nama	:	Eristia Arfi
No. Buku Pokok	:	0810432083
Jurusan	:	Matematika
Bidang	:	Terapan
Judul Skripsi	:	**Hubungan antara Ketercapaian dan Keterkontrolan Sistem Linier Diskrit**

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal 26 Juni 2012 berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing / Penguji	Penguji
1.	1.
Dr. Muhafzan NIP. 19670602 199302 1 001	Dr. Dodi Devianto NIP. 19771227 200012 1 002
2.	2.
Efendi, M. Si NIP. 19780717 200212 1 002	Dr. Admi Nazra NIP. 19730330 199903 1 002
	3.
	Narwen, M.Si NIP. 19670410 199702 1 001

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand

Dr. Syafrizal Sy

NIP.19670807 199309 1 001

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur tak henti-hentinya penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas segala limpahan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul **"Hubungan antara Ketercapaian dan Keterkontrolan Sistem Linier Diskrit"** yang merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang. Salawat dan salam semoga selalu tercurah kepada Baginda Rasulullah SAW yang menebar ilmu dan iman dalam cahaya Islam yang beliau bawa.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, dorongan, kerjasama maupun bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Dr. Muhafzan selaku Pembimbing I yang dengan sabar mengarahkan penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini melalui bimbingan dan diskusi yang sangat bermanfaat. Serta ilmu, ide, saran, dan nasihat yang diberikan selama penulis menjalani perkuliahan.

2. Bapak Efendi, M.Si selaku Pembimbing II yang membantu penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini, serta ilmu yang didapat selama penulis menjalani perkuliahan.

3. Bapak Dr. Dodi Devianto, Bapak Dr. Admi Nazra dan Bapak Narwen, M.Si selaku penguji skripsi yang telah memberi masukan dan saran kepada

penulis dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.

4. Bapak Bukti Ginting, M.Si selaku dosen Pembimbing Akademik.
5. Bapak Dr. Syafrizal Sy selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang.
6. Bapak/Ibu dosen Jurusan Matematika FMIPA Unand yang telah membagi ilmunya kepada penulis dalam proses perkuliahan. Karyawan/i Jurusan Matematika FMIPA Unand yang telah membantu selama penulis melaksanakan studi di Unand.
7. Ayahanda M.Diar, B dan Ibunda Sarlendefi yang teristimewa, serta Abang dan Uniku tersayang yang telah memberikan dorongan semangat, do'a, dan motivasi tiada henti.
8. Semua pihak yang turut membantu hingga selesainya skripsi ini, terutama teman-teman angkatan 2008, senior-senior dan adik-adik angkatan 2009 dan 2010 di Jurusan Matematika FMIPA Unand.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini belum sempurna. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun demi kesempurnaan skripsi ini sehingga dapat bermanfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan.

Padang, Juni 2012

Eristia Arfi

ABSTRAK

Diberikan sistem linier diskrit bebas waktu berikut:

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k), \qquad \mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0,$$

dengan $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ dan $k \in \mathbb{Z}_+$. Sistem diskrit dikatakan tercapai jika untuk setiap keadaan akhir $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ terdapat kontrol $\mathbf{u}$ yang mentransfer keadaan awal $\mathbf{0}$ kepada keadaan akhir $\mathbf{x}_1$. Sistem diskrit dikatakan terkontrol jika untuk setiap keadaan awal $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ terdapat kontrol $\mathbf{u}$ yang mentransfer keadaan awal $\mathbf{x}_0$ kepada keadaan akhir $\mathbf{0}$.

Skripsi ini mengkaji hubungan antara ketercapaian dan keterkontolan sistem linier diskrit. Hasil akhir menunjukkan untuk sistem diskrit dengan matriks A merupakan matriks singular, maka berlaku hubungan jika sistem tercapai maka sistem terkontrol. Apabila matriks A dari sistem diskrit merupakan matriks nonsigular, maka berlaku hubungan sistem tercapai jika dan hanya jika sistem terkontrol.

Kata kunci: *Sistem linier diskrit, ketercapaian, keterkontrolan.*

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Diberikan suatu sistem linier diskrit berikut:

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k), \qquad \mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0, \tag{1.1.1}$$

dengan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ dan $k \in \mathbb{Z}_+$. Notasi $\mathbb{R}^n$ menyatakan himpunan vektor-vektor riil yang terdiri atas n komponen dan $\mathbb{R}^{n\times m}$ menyatakan himpunan matriks-matriks riil berukuran $n \times m$. Pada sistem (1.1.1), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ menyatakan vektor keadaan (*state*) dan $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ menyatakan vektor kontrol (*input*).

Dalam [3] dinyatakan bahwa solusi dari sistem (1.1.1) adalah

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k, k_0)\mathbf{x}(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k-1} \Phi(k, i+1)B\mathbf{u}(i), \tag{1.1.2}$$

dimana

$$\Phi(k, k_0) = A^{k-k_0}. \tag{1.1.3}$$

Salah satu isu utama dalam kontrol diskrit adalah masalah ketercapaian dan keterkontrolan. Suatu keadaan $\mathbf{x}_1$ untuk sistem (1.1.1) dikatakan tercapai jika terdapat suatu input $\mathbf{u}$ yang mentransfer keadaan $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ kepada keadaan $\mathbf{x}_1$ dalam waktu yang berhingga k. Sistem (1.1.1) dikatakan tercapai jika setiap keadaan dari sistem tersebut tercapai. Secara matematis, jika $\mathbf{x}_1$ merupakan sebarang keadaan tercapai dari sistem (1.1.1), maka

$$\mathbf{x}_1 = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-(i+1)} B\mathbf{u}(i), \tag{1.1.4}$$

untuk suatu input $\mathbf{u}$.

Selanjutnya, suatu keadaan $\mathbf{x}_0$ dikatakan terkontrol apabila terdapat suatu input $\mathbf{u}$ yang mentransfer keadaan $\mathbf{x}_0$ kepada keadaan $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ dalam suatu waktu hingga k. Sistem (1.1.1) dikatakan terkontrol jika setiap keadaan dari sistem tersebut adalah terkontrol. Secara matematis, jika $\mathbf{x}_0$ merupakan sebarang keadaan terkontrol dari sistem (1.1.1), maka terdapat suatu kontrol $\mathbf{u}$ sehingga

$$0 = A^k \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-(i+1)} B\mathbf{u}(i). \tag{1.1.5}$$

Untuk matriks A dan B yang berukuran relatif besar, penggunaan definisi - definisi diatas untuk menentukan keterkontrolan dan ketercapaiaan dari sistem diskrit (1.1.1) tidaklah sederhana. Dalam kasus itu, diperlukan kriteria uji untuk ketercapaiaan dan keterkontrolan sistem (1.1.1). Dalam [3], beberapa kriteria uji yang dimaksud sudah tersedia. Skripsi ini mengkaji hubungan antara ketercapaian dan keterkontrolan sistem diskrit linier.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan uraian dari latar belakang, maka yang menjadi permasalahan dalam skripsi ini adalah bagaimana hubungan antara ketercapaian dan keterkontrolan dari sistem (1.1.1)?

1.3 Pembatasan Masalah

Permasalahan dibatasi hanya pada sistem linier diskrit yang tidak bergantung terhadap waktu.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mempelajari hubungan antara ketercapaian dan keterkontrolan pada sistem (1.1.1).

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan skripsi ini yaitu, Bab I merupakan pendahuluan yang berisikan latar belakang masalah, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan dan sistematika penulisan. Bab II merupakan landasan teori yang akan digunakan dalam menyelesaikan permasalahan pada skripsi ini. Bab III merupakan pembahasan mengenai ketercapaian, keterkontrolan, dan hubungan keduanya dari sistem (1.1.1) beserta hasilnya. Bab IV merupakan kesimpulan dari pembahasan beserta saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam bab ini akan diuraikan beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan permasalahan yang telah dikemukakan pada Bab I.

2.1 Teori Matriks

Dalam [1] dinyatakan bahwa matriks adalah suatu jajaran persegi panjang dari bilangan-bilangan yang disusun menurut baris dan kolom. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dalam matriks.

Definisi 2.1.1. [1] *Untuk suatu matriks persegi A dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut dapat dibalik (invertible) dan B disebut sebagai invers dari A. Jika B tidak dapat didefinisikan, maka A dinyatakan sebagai matriks singular.*

Definisi 2.1.2. [1] *Jika A adalah matriks $m \times n$, maka transpos dari A dinyatakan dengan A^T, yang didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A.*

2.2 Vektor dan Ruang Vektor

Definisi 2.2.3. [1] *Suatu matriks berukuran* $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

vektor-vektor

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{r}_2 &= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}, \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ \mathbf{r}_m &= \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

yang dibentuk dari baris-baris matriks A disebut vektor-vektor baris dari A dan vektor-vektor

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \mathbf{c}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

yang dibentuk dari kolom-kolom matriks A disebut vektor-vektor kolom dari A.

Definisi 2.2.4. [1] *Jika A adalah suatu matriks berukuran $m \times n$, maka subruang $\mathbb{R}^n$ yang dibangun dari vektor-vektor baris dari matriks A disebut ruang baris dari A dan subruang $\mathbb{R}^m$ yang dibangun dari vektor-vektor kolom dari matriks A disebut ruang kolom dari A.*

Definisi 2.2.5. [6] *Misalkan* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ *adalah vektor-vektor dan* $r_1, r_2, \cdots, r_n$ *adalah skalar-skalar. Vektor*

$$\mathbf{w} = r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \cdots + r_n\mathbf{v}_n$$

dikatakan sebagai kombinasi linier dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$. *Himpunan semua kombinasi linier dari* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ *disebut span dari* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ *dan ditulis* $span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$.

Teorema 2.2.6. [3] *(Teorema Cayley-Hamilton) Jika* A *adalah matriks* $n \times n$ *dan* $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ *adalah polinomial karakteristik dari* A, *maka* $p(A) = 0$.

Ruang vektor V atas lapangan $\mathbb{R}$ ditulis $(V, \mathbb{R})$ adalah suatu himpunan V dengan elemen-elemennya disebut vektor-vektor dan terdapat $\mathbf{0} \in V$ (disebut vektor nol) dilengkapi dengan operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar yang memenuhi sifat berikut [6]:

1. Untuk semua $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ berlaku
   (a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$
   (b) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
   (c) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
   (d) $\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$
2. Untuk semua $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ berlaku
   (a) $\alpha\mathbf{u} \in V$
   (b) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

(c) $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$

(d) $(\alpha+\beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$

(e) $(\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$.

(f) $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Lema 2.2.7. [6] *Misalkan V adalah suatu ruang vektor. Himpunan $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$ dikatakan subruang pada V jika dan hanya jika*

1. *Jika $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$, maka $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in U$*

2. *Jika $k \in \mathbb{R}$ dan $\mathbf{u} \in U$, maka $k\mathbf{u} \in U$.*

2.3 Transformasi Linier

Misalkan V dan W adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$ yang sama, fungsi $\mathrm{T} : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ dikatakan transformasi linier dari V ke W yang memenuhi [6]:

1. Jika $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathrm{V}$, maka berlaku $\mathrm{T}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathrm{T}(\mathbf{v}_1) + \mathrm{T}(\mathbf{v}_2)$.

2. Jika $\mathbf{v}_1 \in \mathrm{V}$ dan $k \in \mathbb{R}$, maka berlaku $\mathrm{T}(k\mathbf{v}_1) = k\mathrm{T}(\mathbf{v}_1)$.

Teorema 2.3.8. [6] *Misal $\mathrm{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ adalah transformasi linier, maka terdapat tunggal matriks $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sehingga $\mathrm{G} = \mathrm{T}_B$.*

Matriks B berukuran $m \times n$ yang berkaitan dengan transformasi linier pada teorema (2.3.8) disebut matriks standar dari G. Jika $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ basis standar untuk $\mathbb{R}^n$, maka $B = (\mathrm{G}(\mathbf{e}_1)\ \ \mathrm{G}(\mathbf{e}_2)\ \ \cdots\ \ \mathrm{G}(\mathbf{e}_n))$.

Misalkan $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ adalah suatu transformasi linier. Dalam [4], *range* dari A didefinisikan sebagai

$$\mathcal{R}(A) \triangleq \{A\mathrm{x} : \mathrm{x} \in \mathbb{R}^m\}, \tag{2.3.1}$$

dan *null* dari A didefinisikan dengan

$$\mathcal{N}(A) \triangleq \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^m : A\mathrm{x} = 0\}. \tag{2.3.2}$$

Pada [6], dimensi dari $\mathcal{R}(A)$ disebut *rank* dari A, ditulis *rank* A dan dimensi dari $\mathcal{N}(A)$ disebut nullitas dari A, ditulis *null* A.

2.4 Sistem Linier Diskrit

Definisi 2.4.9. *Sistem adalah kombinasi beberapa komponen yang bekerja secara bersama-sama untuk mencapai suatu tujuan tertentu.*

Sistem linier adalah sistem yang memenuhi hukum superposisi, yaitu respon suatu sistem terhadap beberapa input yang berbeda merupakan kombinasi respon masing-masing input.

Sistem invarian waktu adalah sistem yang memiliki parameter-parameter konstan, tidak bergantung pada waktu. Sedangkan sistem varian waktu adalah sistem yamg memiliki satu atau lebih parameter yang berubah terhadap waktu. Sistem diskrit merupakan sistem yang memiliki semua variabel yang diskrit terhadap waktu. Sistem kontinu merupakan sistem 'yang memiliki semua variabel kontinu terhadap waktu.

Perhatikan kembali sistem linier diskrit (1.1.1). Secara umum, persamaan linier diskrit mudah untuk diselesaikan daripada persamaan diferensial karena bentuk persamaan ini bisa diselesaikan dengan menggunakan prosedur rekursif. Bila $\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0$, solusi dari sistem (1.1.1) bisa dihasilkan langsung dengan rekursif sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k_0+1) &= A\mathbf{x}(k_0) + B\mathbf{u}(k_0) \\
\mathbf{x}(k_0+2) &= A\mathbf{x}(k_0+1) + B\mathbf{u}(k_0+1) \\
&= A[A\mathbf{x}_0 + B\mathbf{u}(k_0)] + B\mathbf{u}(k_0+1) \\
&= A^2\mathbf{x}_0 + AB\mathbf{u}(k_0) + B\mathbf{u}(k_0+1) \\
\mathbf{x}(k_0+3) &= A\mathbf{x}(k_0+2) + B\mathbf{u}(k_0+2) \\
&= A[A^2\mathbf{x}_0 + AB\mathbf{u}(k_0) + B\mathbf{u}(k_0+1)] + B\mathbf{u}(k_0+2) \\
&= A^3\mathbf{x}_0 + A^2B\mathbf{u}(k_0) + AB\mathbf{u}(k_0+1) + B\mathbf{u}(k_0+2)
\end{aligned}$$

dengan pengulangan prosedur di atas dan untuk $k \geq k_0 + 1$ didapatkan solusi untuk sistem (1.1.1) sebagai berikut:

$$\mathbf{x}(k) = A^{k-k_0}\mathbf{x}(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-(i+1)}B\mathbf{u}(i), \qquad k = 1, 2, 3, ... \tag{2.4.1}$$

Asumsikan $B = 0$, maka solusi dari persamaan keadaan homogen

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) \tag{2.4.2}$$

dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k)\mathbf{x}(0), \tag{2.4.3}$$

dengan $\Phi(k)$ adalah matriks $n \times n$ yang merupakan solusi tunggal dari

$$\Phi(k+1) = A\Phi(k), \qquad \Phi(0) = I, \tag{2.4.4}$$

dan I adalah matriks identitas. Kebenaran hal ini dapat diperiksa sebagai berikut:

$$\mathbf{x}(0) = \Phi(0)\mathbf{x}(0) = I\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi(k+1)\mathbf{x}(0) = A\Phi(k)\mathbf{x}(0) = A\mathbf{x}(k).$$

Selanjutnya, $\Phi(k, k_0)$ diberikan sebagai berikut:

$$\Phi(k, k_0) = A^{k-k_0}. \tag{2.4.5}$$

Jadi, solusi untuk sistem (1.1.1) bisa ditulis dalam bentuk

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k, k_0)\mathbf{x}(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k-1} \Phi(k, i+1)B\mathbf{u}(i), \qquad k = 1, 2, 3, ..., \tag{2.4.6}$$

dimana

$$\Phi(k, k_0) = A^{k-k_0}. \tag{2.4.7}$$

BAB III

HUBUNGAN ANTARA KETERCAPAIAN DAN KETERKONTROLAN SISTEM LINIER DISKRIT

Dalam bab ini akan dibahas tentang ketercapaian, keterkontrolan, dan hubungan antara ketercapaian dan keterkontrolan dari sistem (1.1.1).

3.1 Ketercapaian Sistem Linier Diskrit

Diberikan sistem (1.1.1) yang merupakan sistem linier diskrit bebas waktu

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k), \qquad k \geq k_0,$$

dengan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Keadaan $\mathbf{x}(k)$ yang merupakan solusi dari (1.1.1) dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k, k_0)\mathbf{x}(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k-1} \Phi(k, i+1)B\mathbf{u}(i),$$

dimana

$$\Phi(k, k_0) = A^{k-k_0}.$$

Misalkan $\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0$, asumsikan terdapat input $\mathbf{u}$ yang membawa keadaan $\mathbf{x}_0$ kepada keadaan $\mathbf{x}(k_1) = \mathbf{x}_1$ pada waktu $k_1 > k_0$. Bila $k_0 = 0$, $k_1 = K$ dan $\Phi(k_1, k_0) = A^K$, maka persamaan (1.1.2) dapat ditulis kembali

$$\mathbf{x}_1 = A^K\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{K-1} A^{K-(i+1)}B\mathbf{u}(i), \qquad (3.1.1)$$

ketika $K > 0$, atau

$$\mathbf{x}_1 = A^K \mathbf{x}_0 + \mathcal{C}_K U_K \tag{3.1.2}$$

dimana

$$\mathcal{C}_K \triangleq [B, AB, ..., A^{K-1}B] \tag{3.1.3}$$

dan

$$U_K \triangleq [u(K-1), u(K-2), ..., u(0)]^T. \tag{3.1.4}$$

Selanjutnya akan dipaparkan definisi formal dari ketercapaian.

Definisi 3.1.1. [3] *Suatu keadaan* $\mathbf{x}_1$ *dikatakan* ***tercapai*** *jika terdapat input* $\mathbf{u}(k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, *yang mentransfer keadaan* $\mathbf{x}(k)$ *dalam sistem (1.1.1) dari keadaan* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ *kepada keadaan* $\mathbf{x}_1$ *dalam waktu berhingga* K, *yaitu* $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(K)$.

Sehingga bila $\mathbf{x}_1$ tercapai, maka

$$\mathbf{x}(K) = \mathbf{x}_1 = \sum_{i=0}^{K-1} A^{K-(i+1)} B\mathbf{u}(i).$$

Misalkan $\mathfrak{R}_r$ menyatakan himpunan keadaan tercapai dalam waktu K, secara simbolik dapat ditulis

$$\mathfrak{R}_r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \text{ tercapai dalam waktu } K\}.$$

$\mathfrak{R}_r$ merupakan suatu subruang dari ruang vektor keadaan $\mathbb{R}^n$. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut:

1. Himpunan $\mathfrak{R}_r \neq \emptyset$, karena $\mathbf{0} \in \mathfrak{R}_r$ untuk $\mathbf{u}(i) = 0$ dan $K = 0$.

2. Misalkan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathfrak{R}_r$, akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in \mathfrak{R}_r$.

$$\mathbf{x}_1 \in \mathfrak{R}_r \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \sum_{i=0}^{K-1} A^{K-(i+1)} B\mathbf{u}_1(i),$$

untuk suatu input $\mathbf{u}_1(i), i = 0, 1, ..., K-1$.

$$\mathbf{x}_2 \in \mathfrak{R}_r \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \sum_{i=0}^{K-1} A^{K-(i+1)} B\mathbf{u}_2(i),$$

untuk suatu input $\mathbf{u}_2(i), i = 0, 1, ..., K-1$.

Akibatnya

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \sum_{i=0}^{K-1} A^{K-(i+1)} B(\mathbf{u}_1(i) + \mathbf{u}_2(i)).$$

Fakta ini memperlihatkan bahwa input $\mathbf{u}_1(i) + \mathbf{u}_2(i),\ i = 0, 1, ..., K-1$ mentransfer keadaan $\mathbf{0}$ kepada keadaan $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, sehingga $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in \mathfrak{R}_r$.

3. Misalkan $\mathbf{x}_1 \in \mathfrak{R}_r$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, akan ditunjukkan bahwa $\alpha\mathbf{x}_1 \in \mathfrak{R}_r$.

$$\mathbf{x}_1 \in \mathfrak{R}_r \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \sum_{i=0}^{K-1} A^{K-(i+1)} B\mathbf{u}(i)$$
$$\alpha\mathbf{x}_1 = \sum_{i=0}^{K-1} A^{K-(i+1)} B(\alpha\mathbf{u}(i)).$$

Hal ini menunjukkan bahwa kontrol $\alpha\mathbf{u}(i),\ i = 0, 1, ..., K-1$ mentransfer keadaan $\mathbf{0}$ kepada keadaan $\alpha\mathbf{x}_1$ sehingga, $\alpha\mathbf{x}_1 \in \mathfrak{R}_r$.

Definisi 3.1.2. [3] *Sistem (1.1.1) dikatakan* ***tercapai*** *jika setiap keadaan* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *adalah tercapai.*

Dari Definisi 3.1.2, jelas bahwa $\mathfrak{R}_r = \mathbb{R}^n$.

Untuk menentukan input dari sistem waktu diskrit yang akan mencapai keadaan yang diinginkan, tidak harus didefinisikan suatu matriks seperti halnya pada sistem waktu kontinu, tapi dapat digunakan langsung matriks keterkontrolan $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}$, dimana matriks keterkontrolan

$$\mathcal{C}_n \triangleq [B, AB, ..., A^{n-1}B] = \mathcal{C}.$$

Teorema 3.1.3. [3] (i) *Terdapat input* $\mathbf{u}$ *yang mentransfer keadaan* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ *kepada keadaan* $\mathbf{x}_1$ *dalam waktu berhingga* K *jika dan hanya jika*

$$\mathbf{x}_1 \in \mathcal{R}(\mathcal{C}).$$

(ii) $\mathfrak{R}_r = \mathcal{R}(\mathcal{C})$.

(iii) *Input* $U_n \triangleq [u(n-1), u(n-2), ..., u(0)]^T$ *mentransfer keadaan* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ *kepada keadaan* $\mathbf{x}_1$ *dalam* n *langkah.*

Bukti.

(i) Input $\mathbf{u}$ mentransfer keadaan $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ kepada keadaan $\mathbf{x}_1$ jika dan hanya jika

$$\mathbf{x}_1 = \mathcal{C}_K U_K. \tag{3.1.5}$$

Hubungan (3.1.5) memperlihatkan bahwa U_K merupakan solusi untuk persamaan (3.1.5), yaitu $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{R}(\mathcal{C}_K)$. Karena $\mathcal{R}(\mathcal{C}_K) \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{C})$ jika $K < n$ dan $\mathcal{R}(\mathcal{C}_K) = \mathcal{R}(\mathcal{C})$ jika $K \geq n$, maka $\mathbf{x}_1 = \mathcal{C}_K U_K$ jika dan hanya jika keadaan $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{R}(\mathcal{C})$.

(ii) Untuk menunjukkan $\mathfrak{R}_r = \mathcal{R}(\mathcal{C})$, maka akan ditunjukkan $\mathfrak{R}_r \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{C})$ dan $\mathfrak{R}_r \supseteq \mathcal{R}(\mathcal{C})$.

Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa $\mathfrak{R}_r \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{C})$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \mathfrak{R}_r &\Rightarrow \mathbf{x} \text{ tercapai dan } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ &\Rightarrow \mathbf{x} = \mathcal{C}_K U_K \\ &\Rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathcal{C}_K) \\ &\Rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathcal{C}) \end{aligned}$$

Jadi, $\mathfrak{R}_r \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{C})$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\mathfrak{R}_r \supseteq \mathcal{R}(\mathcal{C})$.

$$\mathbf{y} \in \mathcal{R}(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathcal{C}_{\bar{n}} U_{\bar{n}} \tag{3.1.6}$$

Hubungan (3.1.6) memperlihatkan bahwa keadaan $\mathbf{y}$ merupakan suatu keadaan yang tercapai dalam n langkah dan oleh karena itu keadaan $\mathbf{y}$ juga merupakan elemen dari himpunan keadaan-keadaan tercapai $\mathfrak{R}_r$ ini berarti $\mathfrak{R}_r \supseteq \mathcal{R}(\mathcal{C})$. Karena $\mathfrak{R}_r \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{C})$ dan $\mathcal{R}(\mathcal{C}) \subseteq \mathfrak{R}_r$ maka dapat disimpulkan bahwa $\mathfrak{R}_r = \mathcal{R}(\mathcal{C})$.

(iii) Keadaan $\mathbf{x}_1$ tercapai jika terdapat $\mathbf{u}$ sedemikian sehingga keadaan $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ dapat dibawa kepada keadaan $\mathbf{x}_1$ dalam n langkah yaitu

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= A^n\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-(i+1)}B\mathbf{u}(i) \\
&= A^n.\mathbf{0} + [B, AB, ..., A^{n-1}B] \begin{pmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{pmatrix} \\
&= [B, AB, ..., A^{n-1}B] \begin{pmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{C}_n U_n
\end{aligned}$$

Jadi, keadaan $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{R}(\mathcal{C}_n)$ dimana U_n merupakan input yang mentransfer keadaan $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ kepada keadaan $\mathbf{x}_1$.$\square$

Akibat 3.1.4. [3] *Sistem (1.1.1) tercapai jika dan hanya jika*

$$rank\ \mathcal{C} = n.$$

Bukti.

($\Rightarrow$) Misalkan sistem (1.1.1) tercapai, akan ditunjukkan $rank\ \mathcal{C} = n$. Berdasarkan Teorema 3.1.3, bila sistem tercapai maka $\mathcal{R}(\mathcal{C}) = \mathfrak{R}_r$. Selain itu, dari definisi ketercapaian, $\mathfrak{R}_r = \mathbb{R}^n$. Sehingga, bila sistem (1.1.1) tercapai maka

$$\mathcal{R}(\mathcal{C}) = \mathfrak{R}_r = \mathbb{R}^n. \tag{3.1.7}$$

Hubungan (3.1.7) memperlihatkan bahwa dimensi dari $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ adalah n atau $rank\ \mathcal{C} = n$.

($\Leftarrow$) Misalkan $rank\ \mathcal{C} = n$, maka $\mathcal{R}(\mathcal{C}) = \mathbb{R}^n$. Akan ditunjukkan bahwa sistem (1.1.1) tercapai. Misalkan keadaan $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{R}(\mathcal{C})$, karena $\mathcal{R}(\mathcal{C}) = \mathbb{R}^n$ maka $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$. Berdasarkan Teorema 3.1.3, terdapat input U_n yang mentransfer keadaan $\mathbf{0}$ kepada keadaan $\mathbf{x}_1$. Oleh karena itu sistem (1.1.1) merupakan sistem yang tercapai.□

Contoh 3.1.1 Akan ditunjukkan bahwa sistem $A\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k)$ dengan $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ adalah tercapai.

Matriks $\mathcal{C}$ dari sistem tersebut adalah

$$\mathcal{C} = [B\ AB] = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Karena $rank\ \mathcal{C} = 2 = n$, maka sistem tercapai. Hal ini menunjukkan bahwa terdapat input yang membawa keadaan $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ kepada keadaan $\mathbf{x}_1$ dalam 2 langkah.

Input yang akan mentransfer keadaan $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ kepada keadaan $\mathbf{x}_1$ dapat ditentukan sebagai berikut:

misalkan $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dimana, $a, b \in \mathbb{R}$. Berdasarkan persamaan (3.1.2),

$$\mathbf{x}_1 - A^2\mathbf{x}_0 = C_2 U_2$$

yaitu

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b \\ \frac{1}{4}a \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Dari (3.1.8) diperoleh bahwa input $u(0) = \frac{1}{4}a$ membawa keadaan $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ kepada keadaan $\mathbf{x}(1)$ berikut:

$$\mathbf{x}(1) = A\mathbf{x}(0) + Bu(0)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} (\frac{1}{4}a)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya, input $u(1) = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b$ membawa keadaan $\mathbf{x}(1)$ kepada keadaan $\mathbf{x}(2)$ berikut:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(2) &= A\mathbf{x}(1) + Bu(1) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} (-\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b) \\
&= \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b - 2a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Contoh 3.1.2 Akan ditunjukkan bahwa sistem $A\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k)$ dengan $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ tidak tercapai.

Matriks C dari sistem tersebut adalah

$$C = [B \ AB] = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dan

$$rank\ C = rank \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 < 2 = n.$$

Berdasarkan Akibat 3.1.4 maka sistem tidak tercapai.

3.2 Keterkontrolan Sistem Linier Diskrit

Terlebih dahulu akan dipaparkan definisi formal dari keterkontrolan.

Definisi 3.2.5. [3] *Suatu keadaan* $\mathbf{x}_0$ *dikatakan terkontrol jika terdapat input* $\mathbf{u}(k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, *yang mentransfer keadaan* $\mathbf{x}(k)$ *dalam sistem (1.1.1) dari keadaan* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ *kepada keadaan* $\mathbf{0}$ *dalam waktu berhingga* K, *yaitu* $\mathbf{x}(K) = \mathbf{0}$.

Sehingga bila $\mathbf{x}_0$ terkontrol, maka terdapat input $\mathbf{u}$ sedemikian sehingga

$$\mathbf{0} = A^K\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{K-1} A^{K-(i+1)}B\mathbf{u}(i)$$

$$-A^K\mathbf{x}_0 = \sum_{i=0}^{K-1} A^{K-(i+1)}B\mathbf{u}(i)$$

Misalkan $\mathfrak{R}_c$ menyatakan himpunan keadaan terkontrol dalam waktu K, yang secara simbolik dapat ditulis.

$$\mathfrak{R}_c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \text{ terkontrol dalam waktu } K\}.$$

$\mathfrak{R}_c$ merupakan suatu subruang dari ruang vektor keadaan $\mathbb{R}^n$. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut:

1. Himpunan $\mathfrak{R}_c \neq \emptyset$, karena $\mathbf{0} \in \mathfrak{R}_c$ untuk $\mathbf{u}(i) = 0$ dan $K = 0$.

2. Misalkan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathfrak{R}_c$, akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in \mathfrak{R}_c$.

$$\mathbf{x}_1 \in \mathfrak{R}_c \Rightarrow -A^K\mathbf{x}_1 = \sum_{i=0}^{K-1} A^{K-(i+1)}B\mathbf{u}_1(i),$$

untuk suatu input $\mathbf{u}_1(i), i = 0, 1, ..., K-1$.

$$\mathbf{x}_2 \in \mathfrak{R}_c \Rightarrow -A^K\mathbf{x}_2 = \sum_{i=0}^{K-1} A^{K-(i+1)}B\mathbf{u}_2(i),$$

untuk suatu input $\mathbf{u}_2(i), i = 0, 1, ..., K-1$.

Akibatnya

$$-A^K(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)=\sum_{i=0}^{K-1}A^{K-(i+1)}B(\mathbf{u}_1(i)+\mathbf{u}_2(i)).$$

Fakta ini memperlihatkan bahwa input $\mathbf{u}_1(i)+\mathbf{u}_2(i)$, $i=0,1,...,K-1$ mentransfer keadaan $\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2$ kepada keadaan $\mathbf{0}$, sehingga $\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2\in\mathfrak{R}_c$.

3. Misalkan $\mathbf{x}_1\in\mathfrak{R}_c$ dan $\alpha\in\mathbb{R}$, akan ditunjukkan bahwa $\alpha\mathbf{x}_1\in\mathfrak{R}_c$.

$$\mathbf{x}_1\in\mathfrak{R}_c\Rightarrow -A^K\mathbf{x}_1=\sum_{i=0}^{K-1}A^{K-(i+1)}B\mathbf{u}(i)),-A^K(\alpha\mathbf{x}_1)=\sum_{i=0}^{K-1}A^{K-(i+1)}B(\alpha\mathbf{u}(i)).$$

Hal ini menunjukkan bahwa input $\alpha\mathbf{u}(i), i=0,1,...,K-1$ mentransfer keadaan $\alpha\mathbf{x}_1$ kepada keadaan $\mathbf{0}$ sehingga $\alpha\mathbf{x}_1\in\mathfrak{R}_c$.

Definisi 3.2.6. [3] *Sistem (1.1.1) dikatakan* ***terkontrol*** *jika setiap keadaan* $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ *adalah terkontrol.*

Dari Definisi 3.2.6, jelas bahwa $\mathfrak{R}_c=\mathbb{R}^n$.

Dari definisi keterkontrolan diperoleh bahwa keadaan $\mathbf{x}_0$ terkontrol jika $\mathbf{x}_0$ bisa ditransfer kepada keadaan $\mathbf{0}$ dalam waktu berhingga K jika dan hanya jika

$$-A^K\mathbf{x}_0=\mathcal{C}_KU_K, \tag{3.2.1}$$

akibatnya

$$A^K\mathbf{x}_0\in\mathcal{R}(\mathcal{C}_K). \tag{3.2.2}$$

Dalam kasus keterkontrolan (dengan asumsusi bahwa A matriks nonsingular), sistem (1.1.1) terkontrol jika dan hanya jika

$$rank\ (A^{-n}\mathcal{C})=rank\ \mathcal{C}=n.$$

Contoh 3.2.1 Akan ditunjukkan bahwa sistem $A\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k)$ dengan $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ terkontrol.

Matriks $\mathcal{C}$ dari sistem tersebut adalah

$$\mathcal{C} = [B\ AB] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Karena *rank* $\mathcal{C} = 2 = n$, maka sistem terkontrol. Hal ini menunjukkan bahwa terdapat input yang membawa keadaan $\mathbf{x}_0$ kepada keadaan $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ dalam 2 langkah. Input yang akan mentransfer keadaan $\mathbf{x}_0$ kepada keadaan $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut:

misalkan $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dimana, $a, b \in \mathbb{R}$. Berdasarkan persamaan (*3.1.2*),

$$\mathbf{x}_1 - A^2\mathbf{x}_0 = \mathcal{C}_2 U_2$$

yaitu

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix} \\
-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 36 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix} \qquad (3.2.3) \\
\begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -a \\ -36a - 25b \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
= \begin{pmatrix} \frac{11}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ 36a - 25b \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \frac{5}{2}a + \frac{5}{2}b \\ -\frac{7}{2}a - \frac{5}{2}b \end{pmatrix}.
$$

Dari (3.2.3) diperoleh bahwa input $u(0) = -\frac{7}{2}a - \frac{5}{2}b$ membawa keadaan $\mathbf{x}_0$ kepada keadaan $\mathbf{x}(1)$ berikut:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(1) &= A\mathbf{x}(0) + Bu(0) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (-\frac{7}{2}a - \frac{5}{2}b) \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}a - \frac{5}{2}b \\ \frac{5}{2}a + \frac{5}{2}b \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, input $u(1) = \frac{5}{2}a + \frac{5}{2}b$ membawa keadaan $\mathbf{x}(1)$ kepada keadaan $\mathbf{x}(2)$ berikut:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(2) &= A\mathbf{x}(1) + Bu(1) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}a - \frac{5}{2}b \\ \frac{5}{2}a + \frac{5}{2}b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (\frac{5}{2}a + \frac{5}{2}b) \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}a - \frac{5}{2}b \\ -\frac{5}{2}a - \frac{5}{2}b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{2}a + \frac{5}{2}b \\ \frac{5}{2}a + \frac{5}{2}b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Contoh 3.2.2 Akan ditunjukkan bahwa sistem $A\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k)$ dengan $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ tidak terkontrol.

Matriks $\mathcal{C}$ dari sistem tersebut adalah

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

diperoleh

$$rank\ [B\ AB] = rank \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 < 2 = n.$$

Sehingga, sistem tersebut tidak terkontrol.

3.3 Hubungan Antara Ketercapaian dan Keterkontrolan Sistem Linier Diskrit

Lema 3.3.7. [3] *Jika* $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathcal{C})$ *maka* $A\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathcal{C})$*; yaitu subruang tercapai* $\mathfrak{R}_r = \mathcal{R}(\mathcal{C})$ *adalah suatu subruang invarian pada* A.

Bukti.

Misalkan $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathcal{C})$, akan ditunjukkan bahwa $A\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathcal{C})$. Keadaan $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathcal{C})$, maka terdapat suatu vektor $\mathbf{y}$ sedemikian sehingga

$$\mathbf{x} = [B, AB, ..., A^{n-1}B]\mathbf{y}$$

$$\mathbf{x} = Bu_0 + ABu_1 + ... + A^{n-1}Bu_{n-1}$$

$$A\mathbf{x} = ABu_0 + A^2Bu_1 + ... + A^nBu_{n-1}.$$

Berdasarkan Teorema *Cayley-Hamilton*, A^n dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $A^{n-1}, ..., A, I$, akibatnya $A\mathbf{x} = \mathcal{C}\mathbf{z}$ untuk suatu vektor $\mathbf{z}$. Oleh karena itu $A\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathcal{C})$.$\square$

Teorema berikut memperlihatkan hubungan antara ketercapaian dan keterkontrolan sistem (1.1.1).

Teorema 3.3.8. [3] *Untuk sistem (1.1.1) dengan A singular,*

(i) *Jika keadaan* $\mathbf{x}$ *tercapai, maka keadaan* $\mathbf{x}$ *terkontrol.*

(ii) $\mathfrak{R}_r \subseteq \mathfrak{R}_c$

(iii) *Jika sistem tercapai, maka sistem tersebut juga terkontrol.*

Selanjutnya, jika A nonsingular, maka hubungan pada (i) dan (iii) menjadi pernyataan jika dan hanya jika, sehingga keterkontrolan secara tidak langsung juga menyatakan ketercapaian dan hubungan pada (ii) menjadi suatu kesamaan yaitu $\mathfrak{R}_r = \mathfrak{R}_c$.

Bukti.

(i) Misalkan keadaan $\mathbf{x}$ tercapai, maka

$$\mathbf{x} \textit{ tercapai } \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathcal{C}).$$

Berdasarkan Lema 3.3.7 berlaku

$$A\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathcal{C}).$$

Sehingga $A^n\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathcal{C})$, yang menunjukkan bahwa keadaan $\mathbf{x}$ juga terkontrol.

(ii) Misalkan $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}_r$ sebarang, akan ditunjukkan $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}_c$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} \in \mathfrak{R}_r &\Rightarrow \mathbf{x} \text{ tercapai dan } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\
&\Rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathcal{C}) \\
&\Rightarrow A\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathcal{C}) \\
&\Rightarrow A^n\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathcal{C}) \\
&\Rightarrow \mathbf{x} \in \mathfrak{R}_c.
\end{aligned}
$$

Jadi, $\mathfrak{R}_r \subseteq \mathfrak{R}_c$.

(iii) Suatu sistem dikatakan tercapai jika setiap keadaan dari sistem tersebut adalah tercapai. Dari (i) kita ketahui bahwa jika suatu keadaan tercapai maka keadaan tersebut juga terkontrol. Jadi, apabila sistem tercapai maka sistem tersebut juga terkontrol.

Misalkan A merupakan matriks nonsingular,

(iv) Akan ditunjukkan bahwa untuk suatu keadaan sebarang $\mathbf{x}$, keadaan $\mathbf{x}$ tercapai jika dan hanya jika keadaan $\mathbf{x}$ terkontrol.

Dari (i) telah ditunjukkan bahwa keadaan $\mathbf{x}$ tercapai maka keadaan $\mathbf{x}$ juga terkontrol. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa jika keadaan $\mathbf{x}$ terkontrol maka keadaan $\mathbf{x}$ juga tercapai. Misalkan keadaan $\mathbf{x}$ terkontrol, maka

$$\mathbf{x} \text{ terkontrol} \Rightarrow A^n\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathcal{C}).$$

Karena A^n matriks nonsingular, terdapat A^{-n} sedemikian sehingga

$$A^{-n}A^n\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathcal{C}),$$

yang dapat ditulis

$$\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathcal{C}). \tag{3.3.1}$$

Hubungan (3.3.1) memperlihatkan bahwa keadaan $\mathbf{x}$ juga merupakan keadaan yang tercapai.

(v) Untuk menunjukkan $\mathfrak{R}_r = \mathfrak{R}_c$, maka akan ditunjukkan $\mathfrak{R}_r \subseteq \mathfrak{R}_c$ dan $\mathfrak{R}_c \subseteq \mathfrak{R}_r$. Dari (ii) telah ditunjukkan bahwa $\mathfrak{R}_r \subseteq \mathfrak{R}_c$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\mathfrak{R}_c \subseteq \mathfrak{R}_r$. Misalkan $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}_c$ sebarang, maka

$$\mathbf{x} \in \mathfrak{R}_c \Rightarrow A^n\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathcal{C}).$$

Karena A^n matriks nonsingular, maka terdapat A^{-n} sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} &\Rightarrow A^{-n}A^n\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathcal{C}) \\ &\Rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathcal{C}) \\ &\Rightarrow \mathbf{x} \in \mathfrak{R}_r. \end{aligned}$$

Jadi, $\mathfrak{R}_r = \mathfrak{R}_c$.

(vi) Suatu sistem dikatakan tercapai jika setiap keadaan dari sistem tersebut adalah tercapai. Dari (v) diketahui bahwa untuk matriks A yang nonsingular, suatu keadaan tercapai jika dan hanya jika keadaan tersebut juga terkontrol. Jadi, sistem tercapai jika dan hanya jika sistem tersebut juga terkontrol. □

Contoh 3.3.1 Akan ditunjukkan bahwa sistem $\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k)$ dengan matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ tidak tercapai dan terkontrol.

Matriks $\mathcal{C}$ dari sistem tersebut adalah

$$\mathcal{C} = [BAB] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dan

$$rank\ \mathcal{C} = rank \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 < 2 = n,$$

oleh karena itu sistem tidak tercapai. Semua keadaan tercapai dari sistem tersebut berbentuk $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ oleh karenanya $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ adalah basis untuk $\mathcal{R}(\mathcal{C}) = \mathfrak{R}_r$.

Berdasarkan persamaan (3.2.2), semua keadaan terkontrol $\mathbf{x}_0$ memenuhi $A^2\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}(\mathcal{C})$ yaitu semua keadaan terkontrol yang berbentuk $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Hal ini menunjukkan bahwa ketika matriks A dari sistem nonsingular maka $\mathfrak{R}_r = \mathfrak{R}_c$, dengan perkataan lain untuk matriks A yang singular ketercapaiaan menyatakan keterkontrolan dan sebaliknya keterkontrolan juga menyatakan ketercapaiaan.

Contoh 3.3.2 Akan ditunjukkan bahwa sistem $\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k)$ dengan matriks $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ terkontrol namun tidak tercapai.

Matriks $\mathcal{C}$ dari sistem tersebut adalah

$$\mathcal{C} = [B\ AB] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dan

$$rank\ \mathcal{C} = rank \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 < 2 = n,$$

sehingga sistem ini tidak tercapai. Semua himpunan keadaan tercapai berbentuk $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ oleh karenanya $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ adalah basis untuk $\mathcal{R}(\mathcal{C}) = \mathfrak{R}_r$.

Untuk menentukan $\mathfrak{R}_c$, pandang persamaan (3.2.2) untuk $K = n$, karena matriks A merupakan matriks singular, $A^{-1}\mathcal{C}$ tidak bisa ditentukan. Oleh karena

$$\begin{aligned} A^2\mathbf{x}_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \mathbf{x}_0 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{R}(\mathcal{C}), \end{aligned}$$

sebarang keadaan $\mathbf{x}_0$ akan menjadi suatu keadaan terkontrol yang menunjukkan bahwa sistem terkontrol dan $\mathfrak{R}_c = \mathbb{R}^n$. Hal ini sesuai dengan Teorema (3.3.8) yang menyatakan bahwa keterkontrolan secara umum tidak menyatakan ketercapaian.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian yang telah dipaparkan pada Bab III, dapat disimpulkan bahwa:

1. Untuk matriks A pada sistem (1.1.1) yang merupakan matriks nonsingular, jika sistem tersebut tercapai, maka sistem terkontrol. Selain itu, jika sistem tersebut terkontrol, maka sistem juga tercapai.
2. Untuk matriks A pada sistem (1.1.1) yang merupakan matriks singular, jika sistem tersebut tercapai, maka sistem terkontrol.

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan untuk membahas tentang hubungan antara ketercapaian dan keterobservasian sistem linier diskrit tidak bergantung terhadap waktu, atau hubungan antara keterkontrolan dan keterkonstruksian sistem linier diskrit tidak bergantung terhadap waktu.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Howard and Chris Rorres. 2005. *Elementary Linear Algebra, Ninth Edition.* Jhon Wiley dan Sons Inc.

[2] Antsaklis, Panos J. dan Anthony N. Michel. 2006. *Linear Systems.* Birkhuser. Boston.

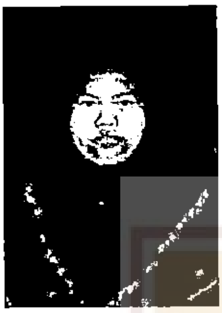
[3] Antsaklis, Panos J. dan Anthony N. Michel. 2007. *A Linear Systems Primer.* Birkhuser. Boston.

[4] Bernstein, Dennis S. 2009. *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas, Second Edition.* Princeton University Press. New Jersey.

[5] Heij, Christian. Ran, Andre dan Schagen, F. 2007. *Introduction to mathematical Systems Theory.*Birkhuser. Boston.

[6] Jacob, Bill. 1990. *Linear Algebra.* W.H Freeman and Company. New York.

RIWAYAT HIDUP PENULIS



Penulis dilahirkan sebagai anak ketiga dari tiga bersaudara dari ayah bernama M.Diar B, S.Pd dengan ibu bernama Sarlendefi S.Pd. Penulis menamatkan Sekolah Dasar pada tahun 2002 di SDN 008 Tampan Pekanbaru, SMPN 21 Pekanbaru pada tahun 2005 dan SMAN 8 Pekanbaru pada tahun 2008. Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur masuk Ujian Reguler Mandiri. Pada tahun 2009, penulis pindah dari program Reguler Mandiri ke Reguler pada jurusan yang sama.

Selama menjadi mahasiswa di Jurusan Matematika FMIPA Unand, penulis aktif dalam berbagai kegiatan dan kepengurusan HIMATIKA pada periode 2009-2011.