



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar Unand.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin Unand.

BILANGAN RAMSEY MULTIPARTIT-UKURAN UNTUK GRAF MULTIPARTIT SEIMBANG LENGKAP

TESIS



**HAIDA FITRI
08 212 22 009**

**PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
2011**

**BILANGAN RAMSEY MULTIPARTIT-UKURAN
UNTUK GRAF MULTIPARTIT SEIMBANG LENGKAP**

Oleh: Haida Fitri

(dibawah bimbingan: Dr. Syafrizal Sy dan Dr. Muhafzan)

RINGKASAN

Bilangan Ramsey klasik $R(m, n)$ adalah bilangan bulat terkecil p dengan sifat, jika semua sisi graf lengkap K_p diberi dua pewarnaan yaitu merah dan biru secara sebarang, maka graf K_p akan memuat subgraf K_m dengan warna merah atau subgraf K_n dengan warna biru. Dengan memperumum pengertian bilangan Ramsey klasik pada graf multipartit seimbang lengkap, Burger dan Vuuren dalam dua *paper*nya yang terpisah pada tahun 2004 memperkenalkan dua konsep bilangan Ramsey multipartit yaitu bilangan Ramsey multipartit-himpunan dan bilangan Ramsey multipartit-ukuran.

Pada kajian ini, perumusan masalah adalah bagaimana menentukan jumlah titik minimum dari setiap himpunan partit pada graf multipartit seimbang lengkap yang diberikan. Jumlah titik minimum ini dinamakan bilangan Ramsey multipartit-ukuran. Karena penentuan bilangan Ramsey multipartit-ukuran sangat sulit, maka dalam tesis ini permasalahan dibatasi pada studi sifat-sifat dan batas bawah bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk graf multipartit seimbang lengkap.

Adapun tujuan dari tesis ini meliputi kajian sifat-sifat dari bilangan Ramsey multipartit-ukuran, penentuan bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kelas

$(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1})$ dan membuktikan batas bawah dari bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kelas $(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ dan batas atas untuk kelas $(K_{2 \times l}, K_{2 \times l})$.

Pada tesis ini akan diperlihatkan sifat eksistensi parsial dari bilangan Ramsey multipartit-ukuran, dengan mengkaji eksistensi bilangan Ramsey klasik dan bilangan Ramsey bipartit diagonal seimbang lengkap. Sehingga diperoleh $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ ada untuk $n, s \geq 2$ dan $l, t \geq 1$ jika dan hanya jika $j \geq R(n, s)$.

Selanjutnya, dengan mengkaji pengertian bilangan Ramsey multipartit-himpunan dan bilangan Ramsey multipartit-ukuran, akan diperlihatkan kaitan antara kedua bilangan Ramsey multipartit tersebut. Pertama-tama diperlihatkan kaitan sebagai berikut, yaitu untuk j, k, l, n, s, t adalah bilangan-bilangan bulat dengan $j, k, l, t \geq 1$ dan $n, s \geq 2$ maka berlaku $m_k(K_{n \times l}, K_{s \times t}) > j$ jika dan hanya jika $M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) > k$, sedangkan kaitan berikutnya adalah $m_k(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \leq j$ jika dan hanya jika $M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \leq k$.

Pada tesis ini dikaji sifat-sifat bilangan Ramsey multipartit-ukuran lainnya yaitu sifat *growth* dan *gaps*. Pertama akan dikaji terlebih dahulu sifat *growth* dan *gaps* pada bilangan Ramsey multipartit-himpunan. Dengan cara yang sama dapat dibuktikan sifat-sifat tersebut untuk bilangan Ramsey multipartit-ukuran, yaitu sifat *growth*, $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \leq m_j(K_{\alpha \times \beta}, K_{\gamma \times \delta})$, $n \leq \alpha, l \leq \beta, s \leq \gamma, t \leq \delta$ dan $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \leq m_k(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ jika $k \leq j$, dan sifat *gaps*, untuk $n \geq 3, s \geq 2$ dan $j, l, t \geq 1$ maka $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \geq m_j(K_{(n-1) \times l}, K_{s \times t}) + \lceil t/l/s \rceil - 1$.

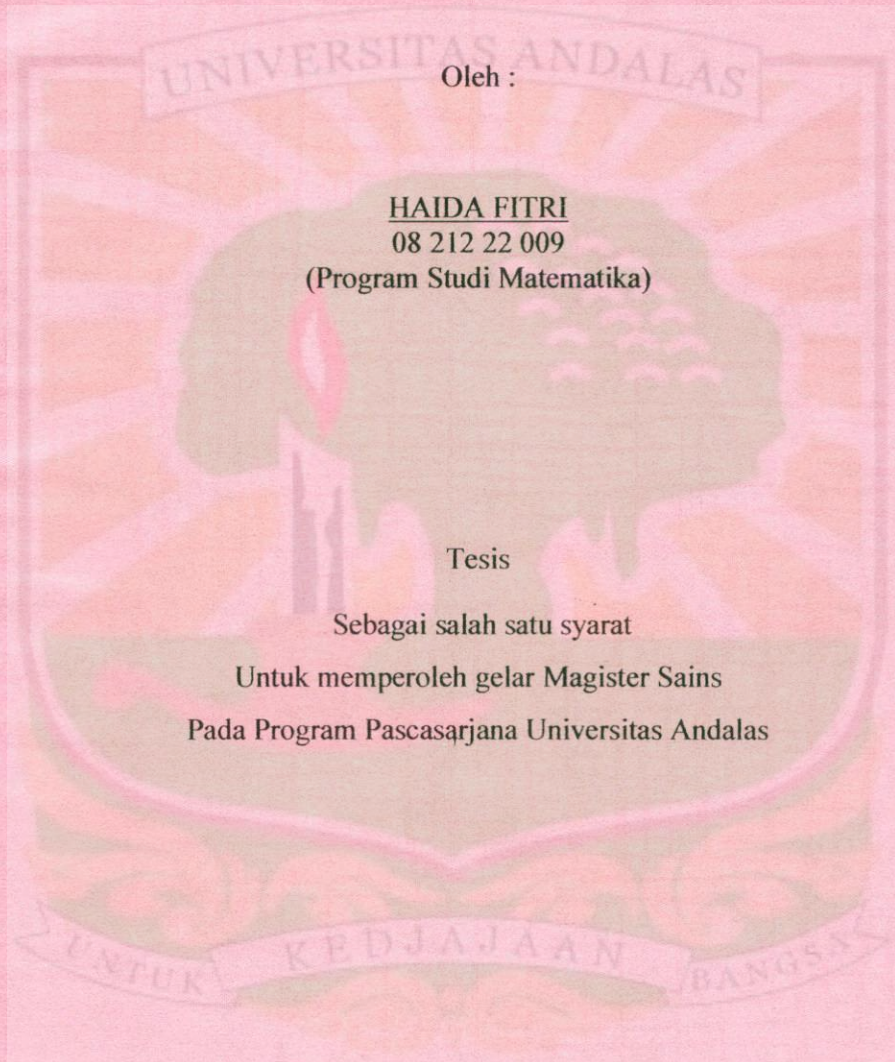
Selanjutnya, kajian sifat *limit asimtotik* untuk bilangan Ramsey multipartit-ukuran yaitu $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \rightarrow 1$ bila $j \rightarrow \infty$, untuk $n, s \geq 2$ dan $l, t \geq 1$, diperoleh dengan menggunakan sifat *growth* bilangan Ramsey multipartit-ukuran dan eksistensi dari bilangan Ramsey klasik.

Dalam tesis ini ditentukan bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kelas $(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1})$, dengan menggunakan sifat-sifat dari bilangan Ramsey multipartit-ukuran dan beberapa bilangan Ramsey multipartit-himpunan yang telah ditemukan. Diperoleh $m_j(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1})$ tidak ada untuk nilai $j = 1, 2$, sedangkan $m_3(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 3$, dan untuk $j = 4, 5, 6$ maka $m_j(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 2$ serta nilai $m_j(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 1$ untuk semua $j \geq 7$.

Kajian akhir adalah membuktikan batas bawah bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kelas $(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ dan batas atas bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kelas $(K_{2 \times l}, K_{2 \times l})$, hasilnya berturut-turut adalah $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \geq \min\{\lfloor nl/j \rfloor, \lfloor st/j \rfloor\}$, untuk $j, l, t \geq 1$ dan $n, s \geq 2$ dan untuk $j \geq 2$ dan $l \geq 1$ maka berlaku

$$m_j(K_{2 \times l}, K_{2 \times l}) \leq \max \left\{ 2l - 1, \left\lfloor \frac{2^{(l-1)} \binom{2l-1}{l} + 1}{j-1} \right\rfloor \right\}.$$

**BILANGAN RAMSEY MULTIPARTIT-UKURAN
UNTUK GRAF MULTIPARTIT SEIMBANG LENGKAP**



Oleh :

HAIDA FITRI
08 212 22 009
(Program Studi Matematika)

Tesis

Sebagai salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Magister Sains
Pada Program Pascasarjana Universitas Andalas

**PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
2011**

Bismillahirrahmanirrahim...

"Bacalah! Tuhanmulah Yang Maha Pemurah! Yang mengajar dengan kalam. Mengajar manusia apa yang tiada ia tahu."

(Q.S. Al A'laq: 3-5)

"Barang siapa yang keluar rumah untuk belajar satu bab dari ilmu pengetahuan, maka ia telah berjalan firabilillah sampai ia kembali kerumahnya.

(H.R. Tirmidzi)

Gelar dan tulisan ini ku persembahkan

Kepada

Mama DESTIWARNI dan Papa SUDIRMAN

Serta

Suami Tercinta

HUMASTONO

"Fabiyaalaa irabbikumaa tukadzibaan..."

Maka nikmat Tuhanmu yang manakah yang kamu dustakan? (Q.S. 55:13)

Rabb... bantu kami meniti cinta dan keridhaanMU.

My Appreciation for

Mama-papa, terima kasih atas pengorbanan, do'a untuk anakmu yang selalu engkau selipkan dalam deretan panjang munaajatmu, cinta yang selalu ada dalam kesederhanaanmu.. izinkan anakmu ini memberi sedikit kebanggaan dalam hatimu.

Suamiku... terima kasih atas fase cinta baru yang uda perkenalkan... cinta yang selalu mengagungkan asma Allah... cinta yang menjadi imam, cinta yang selalu ada dan berlimpah untuk istrimu ini... Terima kasih uda atas nasehat dan kesabaran yang uda ajarkan... Semoga kita mampu membina keluarga ini hingga kesurganya kelak...amiin.

For all my family, nidewi & dadedi makasih atas support dan perhatiannya, sikecil yaya yang menggemaskan dan selalu membuat rindu, lilid, intan dan ade semoga mampu menatapkan arah dari pencarian panjang.. Amak, kekuatan dalam ketegaran, kesabaran dalam senyuman yang membuat ipit mesti harus banyak belajar lagi. Nwo, adang, mak en, tek in... terima kasih atas keasing sayang dan perhatiannya.

Special Thanks to..

Pak Syafrizal dan keluarga terima kasih atas pintu yang selalu terbuka buat ipit & minil, waktu keluarga yang selalu kami ganggu. Pandangan dan motivasi yang bapak berikan. Pak Muhafdzan.. pit salut dengan cara pandang dan cara berpikir bapak. Buk Yozza, ibuk selalu membuat ipit kagum..

Teman seperjuanganku....

Nimit, adek sekaligus teman bimbinganku.. makasih ya nil atas kerjasama dan bantuannya.. senang bisa satu team work dengan nimit. Akhirnya gta bisa tuntaskan misi kita. Iwid, salut dengan komitmen iwid, Barakallah y atas double status yang disandang sekarang. Prima yang selalu optimis, semangat ma!!!

Sar, tetap semangat y Sar.. makasih atas semuanya, bantuannya dan waktu yang ada untuk ipit. 'I'll miz u. Wati, ayo buk...dikejar...Mei, adek manis uni...mei yang kuat y!, mei mesti buktikan Pak Syafrudin makasih pak atas tumpangannya.. semoga tesisnya lancar y pak. Pak Ginting, ipit salut dengan semangat belajar bapak...makasih telah menjadi bapak bagi kami. Memel & adek rifda makasih atas keceriaan, kebanyolan yang teman-teman berikan...

Kak lita yang perhatian, Ncep yang lucu dan baik hati, Ledi yang pintar, Rahma adek uni yang baik hati yang selalu siap membantu uni...makasih banyak y dek! Ni eoa, salut dengan dedikasi uni...salut dengan kerja keras uni.. dan teman2 lainnya...semoga perjuangan teman2 dimudahkan Allah..amiin.

Uni dan akhwatifillah terimakasih atas doa yang selalu ada...semangat dalam menuntut ilmu dunia-akhirat, keteladanan dalam setiap fase cerita yang akhwat berikan...Uni makasih atas perhatian, keteladanan dan nasehat yang selalu mengingatkan.. Lov u all...

Rabb.. hanya kepadaMu lah rasa syukur ini berpulang..

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Dengan ini saya menyatakan bahwa tesis yang saya tulis dengan judul:

“BILANGAN RAMSEY MULTIPARTIT-UKURAN

UNTUK GRAF MULTIPARTIT SEIMBANG LENGKAP”

adalah hasil kerja/karya saya sendiri dan bukan merupakan jiplakan dari hasil kerja/karya orang lain, kecuali kutipan yang sumbernya dicantumkan. Jika kemudian hari pernyataan ini tidak benar, maka status kelulusan dan gelar yang saya peroleh menjadi batal dengan sendirinya.

Padang, 4 Mei 2011

Haida Fitri



RIWAYAT HIDUP



Penulis dilahirkan pada tanggal 25 Juni 1984 di Bukittinggi, sebagai putri kedua dari pasangan Sudirman dan Destiwarni. Penulis memulai pendidikan di TK Aisyah-Muhammadiyah Batusangkar pada tahun 1989, pada tahun 1996 penulis menamatkan Sekolah Dasar di SDN 04 Kuburajo Batusangkar, menyelesaikan sekolah menengah pertama di SMPN 1 Batusangkar pada tahun 1999, dan sekolah menengah atas pada tahun 2002 di SMAN 1 Batusangkar. Penulis memperoleh gelar Sarjana Sains pada program studi Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas pada tahun 2006.

Sejak tahun 2006 hingga tahun 2010 penulis menjadi staf pengajar di SMP ADZKIA Padang dan pada tahun 2010 sampai dengan sekarang penulis menjadi dosen disalah satu sekolah tinggi swasta di kota Padang yaitu STKIP PGRI Sumbar. Pada awal tahun 2009 penulis memperoleh kesempatan meneruskan pendidikan pada Program Pascasarjana Universitas Andalas Padang.

Alhamdulillah pada 17 September 2010 penulis menggenapkan setengah dien sebagai istri dari Humastono.

UNTUK KEDJAJAAN BANGSA

KATA PENGANTAR

Syukur Alhamdulillah penulis ucapkan kepada Allah SWT, penguasa alam semesta beserta isinya, karena berkat rahmat dan karunia-Nya penulis berhasil merampungkan tesis yang berjudul **“Bilangan Ramsey Multipartit-Ukuran untuk Graf Multipartit Seimbang Lengkap”**. Tesis ini ditulis sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Pascasarjana Universitas Andalas Padang.

Rampungnya tesis ini berkat bimbingan Dr. Syafrizal Sy, M.Si dan Dr. Muhafzan, M.Si. Karena itu, dengan penuh rasa hormat, penulis ucapkan terima kasih.

Selain itu penulis juga mengucapkan terima kasih dan penghargaan yang tulus kepada:

1. Dr. Dodi Devianto, M.Sc, Monika Rianti Helmi, M.Si, Narwen, M.Si, Efendi, M.Si dan Hazmira Yozza, M.Si, selaku penguji atas saran, kritik dan motivasi bapak dan ibu sehingga penulisan tesis ini, jauh lebih baik dari sebelumnya.
2. Prof. Dr. Rahmat Syahni, M.S,M.Sc, Prof.Dr. I Made Arnawa,M.Si, Dr. Mayastri, M.Si, Yudiantri Asdi, M.Sc, dan Nova Noliza Bakar, M.Si, atas ilmu yang bapak-bapak dan ibu berikan selama penulis menuntut ilmu di Pascasarjana UNAND.
3. Oma, Uwo, Rudi serta karyawan Pascasarjana UNAND atas kemudahan-kemudahan yang diberikan.
4. Papa dan Mama atas segala pengorbanan, do'a dan perhatian yang selalu ada untuk anakmu ini. Kakak, adek-adek dan ponakan tersayang yang selalu

memberi rindu. Spesial untuk suami tercinta, Humastono sebagai motivator utama bagi penulis.

5. Ibu Dewi atas masakan dan menjadi ibu bagi kami. Maya, Fira dan Rijal atas kenakalan dan kelucuannya.
6. Serta rekan–rekan mahasiswa Matematika Program Pascasarjana Matematika khususnya angkatan 2008 atas semangat dan dukungan selama ini.

Penulis menyadari bahwa tesis ini masih memiliki banyak kekurangan, untuk itu sangat diharapkan kritikan dan saran demi penyempurnaan tesis ini.

Kajian ini hanya salah satu topik kajian dari bilangan Ramsey multipartit. Walaupun demikian, izinkan penulis berharap agar tulisan ini bermanfaat bagi Anda, khususnya yang berminat dan menekuni teori Ramsey.

Padang, 19 April 2011

Penulis.



DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR GAMBAR	xv
I. PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	5
1.3 Tujuan	5
1.4 Manfaat	5
II. TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Defenisi dan Terminologi Pada Graf	7
2.2 Survey Bilangan Ramsey	
2.2.1 Bilangan Ramsey Klasik	12
2.2.2 Bilangan Ramsey Graf	15
2.2.3 Bilangan Ramsey Multipartit	17
III. BILANGAN RAMSEY MULTIPARTIT-UKURAN UNTUK GRAF MULTIPARTIT SEIMBANG LENGKAP	24
IV. KESIMPULAN DAN SARAN	
4.1 Kesimpulan	37
4.2 Saran	38
DAFTAR PUSTAKA	39

DAFTAR TABEL

Nomor	Halaman
1. Bilangan Ramsey Klasik dan Batas Bawah atau Batas Atas Terbaik untuk a dan b	3
2. Bilangan Ramsey Multipartit-Ukuran Kelas $(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 2})$	31



DAFTAR GAMBAR

Nomor		Halaman
2.1	Derajat dari titik–titik dalam graf G	7
2.2	Graf G isomorfik dengan graf H	10
2.3	Graf Multipatit Seimbang Lengkap $K_{4 \times 2}$	11
2.4	Ekspansi Pewarnaan graf $K_{3 \times 3}$ diinduksi oleh pewarnaan yang beresuaian dari K_3	19



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG

Teori Ramsey pertama kali diperkenalkan oleh Frank Plumton Ramsey (1930), dalam makalahnya yang berjudul *A Problem of Formal Logic*, sebagai berikut.

Untuk setiap bilangan bulat positif r, n dan μ , terdapat bilangan bulat positif M_0 sedemikian sehingga untuk $m \geq M_0$ dan jika semua r -subhimpunan (subhimpunan dengan r elemen) dari suatu m -himpunan Γ_m dikelompokkan (menurut sebarang aturan) ke dalam kelas-kelas saling lepas C_i ($i = 1, 2, \dots, \mu$), maka Γ_m akan memuat subhimpunan Δ_n dengan semua r -subhimpunan dari Δ_n menjadi anggota C_i yang sama.

Untuk menentukan seberapa besar nilai M_0 yang sesuai bila diberikan bilangan bulat positif r, n dan μ , menjadi kajian yang menarik. Pada makalah tersebut Ramsey memperoleh $M_0 = n!!! \dots!$, dengan proses faktorial yang dilakukan sebanyak $\mu - 1$ kali untuk kasus $r = 2$. Namun, nilai M_0 yang diperoleh Ramsey masih dipandang cukup besar, pemikiran tersebut menjadi dasar dari bilangan Ramsey.

Selanjutnya, Erdős dan Szekeres pada tahun 1935 mengaplikasikan ke dalam teori graf, dengan mengambil $r = 2$ dan $\mu = 2$. Dalam bahasa graf, Γ_m menyatakan sebagai graf lengkap K_m dengan m titik, Δ_n menyatakan graf lengkap K_n dengan n titik dan setiap 2-subhimpunan menyatakan sisinya. Pengelompokan ke dalam dua kelas saling bebas ($\mu = 2$) dapat dipandang sebagai pewarnaan sisi dengan dua warna. Hal ini dikenal sebagai teorema Ramsey yang disajikan pada pernyataan berikut.

Untuk setiap nilai a dan b , terdapat bilangan bulat M_0 sedemikian sehingga, jika $m \geq M_0$ maka setiap dua pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf lengkap K_m akan memuat subgraf K_a dengan warna merah atau subgraf K_b dengan warna biru.

Bilangan terkecil M_0 disebut dengan **bilangan Ramsey klasik** untuk nilai a dan b , dinotasikan dengan $R(a, b) = M_0$.

Hingga saat ini, hanya sembilan bilangan Ramsey klasik yang telah ditentukan. Pada tahun 1955, Greenwood dkk. menentukan $R(3,3) = 6$, $R(3,4) = 9$, $R(3,5) = 14$, dan $R(4,4) = 18$. Kemudian, pada tahun 1964 Kery memperoleh $R(3,6) = 18$. Tahun 1965 Kalbfleisch menunjukkan $R(3,7) = 23$, dan Grinstead mendapatkan $R(3,8) = 28$ dan $R(3,9) = 36$ pada tahun 1982. Hasil terbaru untuk bilangan Ramsey klasik ini adalah $R(4,5) = 25$ ditemukan pada tahun 1995 oleh McKay dan Radziszowski. Untuk kombinasi bilangan bulat a dan b lainnya, studi penentuan bilangan Ramsey klasik menghasilkan perbaikan batas bawah atau batas atas, namun selisih batas bawah dan batas atas tersebut akan semakin besar untuk nilai a dan b yang semakin besar. Pada tahun 2009, Radziszowski memperlihatkan bilangan Ramsey klasik, batas atas atau batas bawah terbaik saat itu untuk beberapa nilai a dan b , seperti yang terlihat pada Tabel 1. Bilangan yang dicetak tebal pada tabel menyatakan bilangan Ramsey klasik dari $R(a, b)$, sedangkan bilangan yang lainnya menyatakan batas bawah dan batas atas dari setiap $R(a, b)$.

Pada perkembangan selanjutnya, studi bilangan Ramsey ini tidak hanya terbatas pada graf lengkap saja, tetapi juga telah diperumum untuk jenis graf lainnya seperti graf lingkaran C_n , graf roda W_n , kombinasi graf roda dengan graf lingkaran dan graf lainnya.

Tabel 1. Bilangan Ramsey Klasik dan Batas Bawah atau Batas Atas Terbaik untuk a dan b .

a b	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
3	6	9	14	18	23	28	36	40 43	46 51	52 59	59 69	66 78	73 88	
4		18	25	35 41	49 61	56 84	73 115	92 149	97 191	128 238	133 291	141 349	153 417	
5			43 49	58 87	80 143	101 216	125 316	143 442	159 633	185 848	209 1139	235 1461	265 1878	
6				102 165	113 298	130 495	169 780	179 1171	253 1804	262 2566	317 3705		401 6911	
7					205 540	216 1031	237 1713	289 2826	405 4553	416 6954	511 10581		15263 22116	
8						282 1870	317 3583		6090	10630	16944	817 27490		861 63620
9							565 6588	580 12677		22325	39025	64871	89203	
10								798 23556			81200			1265

Chvátal dan Harary pada tahun 1972 memberikan batas bawah dari **bilangan Ramsey graf** G dan graf H yaitu: $R(G, H) \geq (c(G) - 1)(\chi(H) - 1) + 1$ dengan $c(G)$ adalah banyaknya titik dari komponen maksimal dalam graf G dan $\chi(H)$ adalah bilangan kromatik dari graf H .

Studi perluasan bentuk lainnya adalah mengganti graf lengkap menjadi graf lengkap bipartit sebagai semesta dengan c warna. Hatting dan Henning pada tahun 1998 memberikan kajian tersebut, yaitu untuk graf bipartit G_1, G_2, \dots, G_c . **Bilangan Ramsey bipartit** $b(G_1, G_2, \dots, G_c)$ adalah bilangan bulat positif terkecil b sedemikian sehingga, jika semua sisi dari graf lengkap bipartit $K_{b,b}$ diberi c warna maka graf lengkap bipartit $K_{b,b}$ akan memuat subgraf monokromatik G_i untuk suatu warna ke- i . Jika $G_i \cong K_{n_i, n_i}$ untuk setiap i , maka

$$b(G_1, G_2, \dots, G_c) = b(K_{n_1, n_1}, K_{n_2, n_2}, \dots, K_{n_c, n_c}).$$

Khusus untuk $c = 2$, Hatting dan Henning menunjukkan batas atas bilangan Ramsey bipartit secara umum, yaitu $b(m, n) \leq \binom{m+n}{m} - 1$. Pada tahun 2001 kajian untuk kombinasi graf bipartit yang lain diberikan oleh Longani, yaitu :

$$b(K_{1,n}, K_{1,n}) = 4n - 2, \quad \text{untuk } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b(K_{2,2}, K_{2,2}) = 10, \quad b(K_{2,3}, K_{2,3}) = 18 \text{ dan } b(K_{3,3}, K_{3,3}) \geq 30.$$

Pada tahun 2004, Burger dan Vuuren memulai kajian tentang **bilangan Ramsey multipartit**, yaitu dengan meningkatkan persyaratan bipartit menjadi multipartit. Mereka memperkenalkan konsep bilangan Ramsey multipartit-himpunan dan bilangan Ramsey multipartit-ukuran dalam dua makalah terpisah. Pengertian bilangan **Ramsey multipartit-himpunan** disajikan pada pernyataan berikut ini.

Misalkan j, l, n, s dan t bilangan bulat positif dengan $n, s \geq 2$. Bilangan Ramsey multipartit-himpunan $M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ adalah bilangan bulat positif terkecil ξ sedemikian sehingga, jika semua sisi dari graf $K_{\xi \times j}$ diberi warna merah dan biru sebarang, maka graf $K_{\xi \times j}$ akan memuat subgraf $K_{n \times l}$ dengan warna merah atau $K_{s \times t}$ dengan warna biru.

Kemudian, pengertian **bilangan Ramsey multipartit-ukuran** diberikan pada pernyataan berikut.

Misalkan j, l, n, s dan t bilangan bulat positif dengan $n, s \geq 2$. Maka bilangan Ramsey multipartit-ukuran $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ adalah bilangan bulat positif terkecil ζ sehingga, jika semua sisi dari graf $K_{j \times \zeta}$ diberi warna merah dan biru secara sebarang, maka graf $K_{j \times \zeta}$ akan memuat subgraf $K_{n \times l}$ dengan warna merah atau subgraf $K_{s \times t}$ dengan warna biru.

Hingga saat ini, masih sedikit hasil-hasil yang ditemukan untuk bilangan Ramsey multipartit-ukuran. Oleh karena itu, masalah ini menjadi topik yang sangat menarik untuk dikaji.

1.2 PERUMUSAN MASALAH

Dalam dekade terakhir, bilangan Ramsey berkembang pada graf multipartit, Burger dan Vuuren di tahun 2004 dengan makalahnya yang berjudul *Ramsey Numbers in Complete Balanced Multipartite Graphs. Part I: Set Numbers*, memberikan kajian perluasan bilangan Ramsey graf tentang masalah penentuan jumlah minimum himpunan partit dari graf multipartit, sehingga graf domainnya mengandung subgraf multipartit monokromatik dengan jumlah titik untuk setiap himpunan partit yang telah ditentukan.

Pada kajian ini, perumusan masalah adalah bagaimana menentukan jumlah titik minimum dari setiap partit pada graf multipartit seimbang lengkap yang diberikan. Jumlah titik minimum ini dinamakan bilangan Ramsey multipartit-ukuran.

Karena penentuan bilangan Ramsey multipartit-ukuran sangat sulit, maka dalam tesis ini permasalahan dibatasi pada studi sifat-sifat dan batas bawah bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk graf multipartit seimbang lengkap.

1.3 TUJUAN

Adapun tujuan dari tesis ini meliputi kajian sifat-sifat dari bilangan Ramsey multipartit-ukuran, penentuan bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kelas $(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1})$ dan membuktikan batas bawah dari bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kelas $(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ dan batas atas untuk kelas $(K_{2 \times l}, K_{2 \times l})$.

1.4 MANFAAT

Kajian ini merupakan salah satu bentuk kajian dari bidang matematika kombinatorik, khususnya dalam teori graf. Jadi, dari penelitian ini diharapkan

dapat memperluas wawasan penulis dan pembaca khususnya tentang bilangan Ramsey multipartit-ukuran.



BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

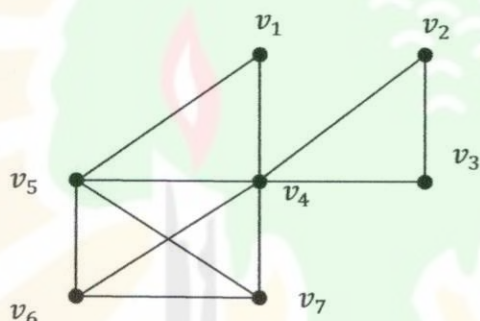
Pada bab ini akan diberikan pengertian tentang definisi dan terminologi dalam teori graf, definisi teori Ramsey, serta teorema dan lemma pendukung yang digunakan untuk memahami kajian utama dalam tesis ini.

2.1 DEFINISI DAN TERMINOLOGI PADA GRAF

Sebuah **graf** G adalah suatu pasangan terurut $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dengan elemen–elemen dari $V(G)$ adalah titik di G , sedangkan $E(G)$ terdiri dari pasangan tak terurut dari elemen–elemen dari $V(G)$ yang mana $E(G)$ disebut juga himpunan sisi dari G . Selanjutnya, berturut–turut $V(G)$ dan $E(G)$ ditulis dengan V dan E saja. **Order** dari suatu graf G dinyatakan sebagai banyaknya titik di G , yang dinotasikan dengan $|G| = |V|$ dan banyaknya sisi di graf G , dinotasikan dengan $|E|$ yang disebut juga dengan *size* dari graf G .

Jika sisi $e = (u, v)$ dengan $u, v \in V$, maka titik u dikatakan **bertetangga** dengan titik v dan demikian sebaliknya. Dalam hal ini, sisi e dikatakan **terkait** dengan titik u dan v . Sisi e disebut **loop** jika $e = (v, v)$ untuk $v \in V$. Jika lebih dari satu sisi terkait dengan sepasang titik yang sama, maka sisi–sisi tersebut disebut **sisi ganda**. Graf G disebut **graf sederhana** apabila E tidak memuat **loop** maupun sisi ganda. Suatu graf G yang bukan graf sederhana disebut **pseudograph**. Suatu graf F disebut **komplemen** dari G apabila $V(F) = V(G)$ dan $(u, v) \in E(F)$ jika dan hanya jika $(u, v) \notin E(G)$. Komplemen dari graf G dinotasikan dengan \bar{G} . Selanjutnya, graf yang didefinisikan pada tesis ini adalah graf sederhana.

Misalkan v adalah sebuah titik di graf G , **lingkungan** dari v dinotasikan dengan $N(v)$, yaitu $N(v) = \{u \in V | (u, v) \in E\}$. **Derajat** dari titik v ditulis $d(v) = |N(v)|$. Jika $d(v) = 0$, maka v dikatakan **titik terisolasi**. **Derajat minimum** dari G , ditulis $\delta(G) = \min\{d(v) | \forall v \in V\}$, dan **derajat maksimum** dari G , ditulis $\Delta(G) = \max\{d(v) | \forall v \in V\}$. Dari Gambar 2.1, dapat dilihat bahwa derajat setiap titik di G adalah $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = 2$, $d(v_4) = 6$, $d(v_5) = 4$, $d(v_6) = 3$ dan $d(v_7) = 3$, sehingga diperoleh titik-titik dengan derajat terkecil adalah v_1, v_2 dan v_3 , sedangkan titik yang memiliki derajat terbesar adalah v_4 . Jadi, $\delta(G) = 2$ dan $\Delta(G) = 6$.



Gambar 2.1 Derajat dari titik–titik dalam graf G .

Dua titik di graf G dikatakan **saling bebas** jika dua titik tersebut tidak bertetangga. Suatu himpunan I , dengan $I \subset V$ dikatakan **himpunan bebas** jika setiap dua titik di I bebas dalam graf G . Begitu juga halnya, dua sisi dalam graf G dikatakan bebas jika dua sisi tersebut tidak mempunyai titik ujung bersama. Himpunan J dengan $J \subset E$, dikatakan **himpunan sisi bebas** apabila untuk setiap sisi di J bebas dalam graf G .

Graf $H(V', E')$ dikatakan **subgraf** dari $G(V, E)$ jika $V' \subseteq V$ dan $E' \subseteq E$. Selanjutnya, F dikatakan **subgraf maksimal** dari graf G bila setiap subgraf H dari graf G berlaku $F \subseteq H \subseteq G$ maka $F = H$.

Misalkan S adalah sebuah himpunan tak kosong dan $S \subseteq V$, suatu subgraf dari G dinyatakan sebagai **subgraf yang diinduksi** oleh S adalah subgraf maksimal dari G dengan himpunan titik S yang dinotasikan sebagai $G[S]$.

Jalan (walk) di G adalah barisan hingga $W = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$ yaitu selang-seling titik dan sisi sedemikian sehingga, titik-titik ujung dari sisi e_i adalah v_{i-1} dan v_i untuk $1 \leq i \leq k$. Jalan W dari u ke v ditulis jalan- (u, v) . Jika semua sisi di W berbeda maka W disebut **trail**. Jika semua titik di W berbeda maka W disebut **lintasan (path)**.

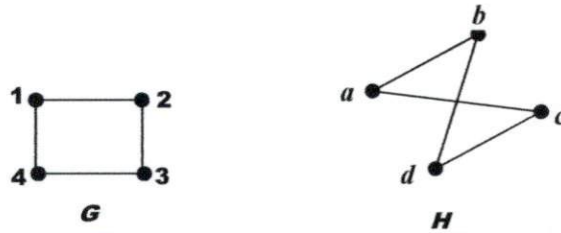
Suatu titik u dikatakan **terhubung** dengan titik v dalam graf G , apabila G memuat suatu lintasan dengan titik u dan v sebagai titik ujungnya. Suatu graf G dikatakan **graf terhubung** jika untuk setiap dua titiknya terhubung. Setiap subgraf terhubung maksimal dari graf tak terhubung G disebut **komponen** dari G .

Bilangan kromatik dari G adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga, jika titik-titik di G diwarnai dengan k warna, maka tidak ada titik yang bertetangga mempunyai warna yang sama. Bilangan kromatik dari G dinotasikan dengan $\chi(G)$.

Dua graf G dan H disebut **isomorfik** jika terdapat pemetaan satu-satu dan pada yaitu $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ sedemikian sehingga, untuk setiap $(x, y) \in E(G)$ dengan $x, y \in V(G)$ jika dan hanya jika $(\phi(x), \phi(y)) \in E(H)$. Pada Gambar 2.2, graf G isomorfik dengan graf H karena terdapat pemetaan satu-satu dan pada yaitu ϕ dengan pengaitan $\phi(1) = a$, $\phi(2) = b$, $\phi(3) = d$ dan $\phi(4) = c$.

Dekomposisi dari graf G adalah himpunan yang beranggotakan subgraf-subgraf tak kosong $\{H_1, H_2, \dots, H_k\}$ sedemikian sehingga $V(H_i) = V(H_j)$ dan

$E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$ untuk setiap $i \neq j$ dan $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Dekomposisi dari graf G dinotasikan dengan $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_k$.



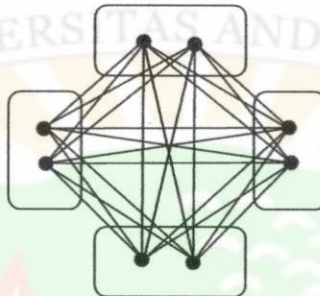
Gambar 2.2 : Graf G isomorfik dengan graf H .

Diberikan dua graf G_1 dan G_2 . **Graf gabungan** $G = G_1 \cup G_2$ adalah suatu graf dengan himpunan titiknya $V = V(G_1) + V(G_2)$ dan himpunan sisinya $E = E(G_1) + E(G_2)$. Selanjutnya, didefinisikan $nG = \bigcup_{i=1}^n G_i$.

Graf lengkap K_n adalah graf dengan n titik yang setiap dua titiknya saling bertetangga. **Graf bipartit** G adalah graf yang himpunan semua titiknya dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan partit X dan Y , sedemikian sehingga, untuk setiap sisi (u, v) di E dengan u dan v terletak di dua subhimpunan partit yang berbeda. Partisi (X, Y) ini disebut bipartisi dari graf G . **Graf bipartit lengkap** adalah graf bipartit dengan bipartisi (X, Y) yang setiap titik di X dihubungkan oleh sebuah sisi ke setiap titik di Y . Graf bipartit lengkap dengan $|X| = m$ dan $|Y| = n$ ditulis juga sebagai $K_{m,n}$. **Graf bipartit seimbang lengkap** adalah graf bipartit lengkap dengan banyak titik untuk kedua subhimpunan partitnya sama.

Graf k -partit G adalah graf yang himpunan semua titiknya dapat dipartisi menjadi k subhimpunan partit, sehingga untuk setiap sisi (u, v) di E dengan titik u dan v terletak di dua subhimpunan partit yang berbeda. Graf k -partit disebut juga sebagai **graf multipartit**. Misalkan G graf multipartit dengan setiap dua titik yang terletak pada subhimpunan partit yang berbeda dihubungkan oleh sebuah sisi, maka G dikatakan **graf multipartit lengkap**. Sedangkan, **graf multipartit**

seimbang lengkap adalah graf multipartit lengkap dengan banyaknya titik untuk setiap subhimpunan partitnya sama. Notasi untuk Graf multipartit seimbang lengkap dengan jumlah subhimpunan partitnya n dan kardinalitas setiap subhimpunan partitnya l adalah $K_{n \times l}$. Berikut ini adalah contoh graf multipartit seimbang lengkap $K_{4 \times 2}$.



Gambar 2.3 Graf Multipartit Seimbang Lengkap $K_{4 \times 2}$.

Graf monokromatik G adalah graf yang semua sisinya mempunyai warna yang sama. Misalkan G suatu graf yang diberi sebarang pewarnaan dan H subgraf dari G , H dikatakan **subgraf monokromatik** jika semua sisi pada graf H mempunyai warna yang sama. Jika H merupakan suatu graf multipartit, maka H disebut juga sebagai **subgraf multipartit monokromatik**.

2.2 SURVEY BILANGAN RAMSEY

Subbab ini akan membahas tentang konsep dan beberapa hasil penelitian pada bilangan Ramsey klasik, bilangan Ramsey graf dan bilangan Ramsey multipartit. Bilangan Ramsey klasik akan dibahas pada bagian Subbab 2.2.1, sedangkan konsep tentang bilangan Ramsey graf disajikan pada Subbab 2.2.2, dan pada bagian Subbab 2.2.3 akan membahas tentang bilangan Ramsey multipartit.

2.2.1 Bilangan Ramsey Klasik $R(a, b)$

Berikut ini definisi bilangan Ramsey klasik yang diperkenalkan oleh F.P Ramsey pada tahun 1930, yang kemudian dikembangkan oleh Erdős dan Szekeres pada tahun 1935.

Definisi 2.2.1 (Erdős dan Szekeres, 1935) Untuk sebarang bilangan bulat positif a dan b , bilangan Ramsey $R(a, b)$ didefinisikan sebagai suatu bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga setiap pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf lengkap K_n , akan memuat subgraf dengan semua sisi berwarna merah yang isomorfik dengan graf lengkap K_a atau memuat subgraf dengan semua sisi berwarna biru yang isomorfik dengan graf lengkap K_b .

Pengertian bilangan Ramsey pada Definisi 2.2.1 dapat diartikan sebagai berikut yaitu, untuk setiap dua pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf lengkap K_n akan memberikan dua subgraf berbeda warna dengan masing-masing n titik, misalkan subgraf F dengan sisi berwarna merah dan subgraf H untuk sisi yang berwarna biru. Jadi, graf lengkap K_n akan terdekomposisi oleh dua subgraf F dan \bar{F} yakni, $K_n = F \oplus \bar{F}$. Semua sisi pada subgraf F berwarna biru, dan bila dipandang sisi-sisi pada subgraf \bar{F} dengan warna merah, maka $H = \bar{F}$. Akibatnya, definisi bilangan Ramsey klasik dapat juga ditulis sebagai berikut.

Definisi 2.2.2 (Erdős dan Szekeres, 1935) Untuk sebarang bilangan bulat positif a dan b , bilangan Ramsey $R(a, b)$ didefinisikan sebagai suatu bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga setiap graf F dengan n titik akan memenuhi kondisi berikut: F memuat subgraf lengkap K_a atau komplemen dari F memuat subgraf lengkap K_b .

Karena untuk setiap graf F memenuhi $\overline{\overline{F}} = F$, maka dari Definisi 2.2.2, bilangan Ramsey klasik bersifat simetris, yaitu

$$R(a, b) = R(b, a).$$

Selanjutnya, Erdős dan Szekeres pada tahun 1935, juga telah menunjukkan eksistensi dari bilangan Ramsey klasik, yaitu dengan menentukan batas atasnya yang disajikan pada teorema berikut ini.

Teorema 2.2.3 (Erdős dan Szekeres, 1935) Untuk setiap bilangan bulat positif a dan b , bilangan Ramsey $R(a, b)$ senantiasa ada, dan memenuhi

$$R(a, b) \leq \binom{a+b-2}{a-1} \dots\dots\dots(2.1)$$

Bukti. Untuk sebarang a, b bilangan bulat positif dan $R(a, b)$ senantiasa ada.

Akan ditunjukkan $R(a, b) \leq \binom{a+b-2}{a-1}$ dengan menggunakan proses induksi matematika atas $k = a + b$. Diketahui $R(1, b) = 1$ dan $R(2, b) = b$, sehingga

untuk nilai $a = 1$ dan b sebarang, diperoleh $R(1, b) = 1 \leq \binom{1+b-2}{0} = 1$, atau

untuk nilai $a = 2$ dan b sebarang juga berlaku $R(2, b) = b \leq \binom{b}{1} = b$. Akibatnya

$R(a, b) \leq \binom{a+b-2}{a-1}$ terpenuhi untuk $a = 1$ atau $a = 2$ dengan b sebarang.

Begitu juga sebaliknya, ketaksamaan (2.1) juga akan terpenuhi untuk $b = 1$ atau $b = 2$ dengan nilai a sebarang. Selanjutnya, asumsikan ketaksamaan (2.1)

berlaku untuk nilai $a' \geq 3, b' \geq 3$, dan $a' + b' < k$, yaitu bilangan Ramsey

$R(a', b')$ senantiasa ada dan memenuhi ketaksamaan $R(a', b') \leq \binom{a'+b'-2}{a'-1}$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa ketaksamaan (2.1) berlaku untuk $k = a + b$.

Menurut asumsi sebelumnya, $R(a-1, b)$ dan $R(a, b-1)$ ada, dan memenuhi

ketaksamaan $R(a-1, b) \leq \binom{a+b-3}{a-2}$ dan $R(a, b-1) \leq \binom{a+b-3}{a-1}$. Perhatikan perhitungan berikut.

$$\begin{aligned} \binom{a+b-3}{a-2} + \binom{a+b-3}{a-1} &= \frac{(a+b-3)!}{(a-2)!(b-1)!} + \frac{(a+b-3)!}{(a-1)!(b-2)!} \\ &= \frac{(a-1)(a+b-3)! + (b-1)(a+b-3)!}{(a-1)!(b-1)!} \\ &= \frac{(a+b-2)(a+b-3)!}{(a-1)!(b-1)!} \\ &= \frac{(a+b-2)!}{(a-1)!(b-1)!} \end{aligned}$$

Akibatnya diperoleh $\binom{a+b-3}{a-2} + \binom{a+b-3}{a-1} = \binom{a+b-2}{a-1}$ atau dapat juga ditulis $R(a-1, b) + R(a, b-1) \leq \binom{a+b-2}{a-1}$ (2.2)

Misalkan graf F adalah suatu graf yang berorder $R(a-1, b) + R(a, b-1)$, akan ditunjukkan bahwa F memuat subgraf K_a atau \bar{F} memuat subgraf K_b . Ambil sebarang titik v di $V(F)$, kemudian perhatikan dua kasus berikut ini,

Kasus 1. $|N_F(v)| \geq R(a-1, b)$.

Misalkan $S = N_F(v)$, akibatnya subgraf $F[S]$ memuat subgraf K_{a-1} atau $\overline{F[S]}$ memuat subgraf K_b . Jika $\overline{F[S]}$ memuat subgraf K_b maka \bar{F} juga memuat subgraf K_b . Jika subgraf $F[S]$ memuat subgraf K_{a-1} maka F memuat subgraf K_a , karena titik v bertetangga dengan semua titik di S . Dengan demikian, F memuat subgraf K_a atau \bar{F} memuat subgraf K_b .

Kasus 2. $|N_F(v)| < R(a-1, b)$.

Akibat dari $|N_F(v)| < R(a-1, b)$ maka $|N_{\bar{F}}(v)| \geq R(a, b-1)$. Misalkan $T = N_{\bar{F}}(v)$, sehingga subgraf $F[T]$ memuat subgraf K_a atau $\overline{F[T]}$ memuat subgraf

K_{b-1} . Seperti halnya dengan Kasus 1, jika $\overline{F[T]}$ memuat subgraf K_{b-1} maka \overline{F} memuat K_b karena titik v bertetangga dengan semua titik di T pada graf \overline{F} . Akibatnya dapat disimpulkan F memuat subgraf K_a atau \overline{F} memuat subgraf K_b .

Dari Kasus 1 dan Kasus 2, dapat disimpulkan bahwa untuk F merupakan sebarang graf dengan order $R(a - 1, b) + R(a, b - 1)$ dan $K_a \subseteq F$ atau $K_b \subseteq \overline{F}$, maka sesuai dengan Definisi 2.2.2 dapat juga ditulis

$$R(a, b) \leq R(a - 1, b) + R(a, b - 1) \dots\dots\dots (2.3)$$

Dari (2.2) dan (2.3), disimpulkan bahwa ketaksamaan (2.1) adalah benar .■

Kemudian Erdős dan Szekeres (1935) juga memberikan batas bawah bilangan Ramsey klasik $R(a, b)$ sebagaimana teorema berikut.

Teorema 2.2.4 (Erdős dan Szekeres, 1935) Untuk bilangan bulat positif $a \geq 2$ dan $b \geq 2$ berlaku $R(a, b) \geq 1 + (a - 1)(b - 1)$.

Bukti. Untuk a dan b bilangan bulat positif sebarang, dengan $a \geq 2$ dan $b \geq 2$. Akan ditunjukkan F dengan $(a - 1)(b - 1)$ titik tidak akan memuat subgraf K_a dan \overline{F} juga tidak memuat subgraf K_b . Pandang $F = (b - 1)K_{a-1}$, yakni gabungan $(b - 1)$ graf lengkap K_{a-1} . Jelas graf F tidak akan memuat subgraf K_a , dan komplementnya yaitu $\overline{F} = K_{(b-1) \times (a-1)}$ juga tidak memuat subgraf K_b . Jadi, sesuai dengan Definisi 2.2.2 dapat disimpulkan $R(a, b) > (a - 1)(b - 1)$ atau ditulis juga $R(a, b) \geq (a - 1)(b - 1) + 1$. ■

2.2.2 Bilangan Ramsey Graf

Pada perkembangannya, penentuan bilangan Ramsey ini tidak hanya terbatas pada graf lengkap, tetapi dapat diperumum untuk graf lainnya. Adapun

definisi bilangan Ramsey secara umum untuk sebarang dua graf adalah sebagai berikut.

Definisi 2.2.5 (Graham dkk., 1990) Diberikan dua graf G dan H . Bilangan Ramsey $R(G, H)$ adalah bilangan bulat terkecil n sedemikian sehingga, setiap pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf lengkap K_n akan memuat subgraf dengan semua sisi berwarna merah yang isomorfik dengan graf G atau memuat subgraf dengan semua sisi berwarna biru yang isomorfik dengan graf H .

Definisi 2.2.5 dapat juga diartikan untuk setiap pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf lengkap K_n akan terdekomposisi oleh dua subgraf berbeda warna dengan masing-masing n titik, yakni $K_n = F \oplus \bar{F}$ dengan graf F sisinya warna merah dan \bar{F} sisinya warna biru. Dengan demikian, Definisi 2.2.5 dapat juga ditulis sebagai berikut.

Definisi 2.2.6 Diberikan dua graf G dan H . Suatu bilangan Ramsey $R(G, H)$ didefinisikan sebagai suatu bilangan bulat terkecil n sedemikian sehingga untuk setiap graf F dengan n titik akan memenuhi kondisi sebagai berikut: jika F memuat subgraf G atau komplemen dari F memuat graf H .

Dengan memperhatikan banyaknya titik dari komponen terbesar $c(G)$ dalam graf G dan menggunakan bilangan kromatik $\chi(H)$ pada graf H , Chvátal dan Harary (1972) memberikan perluasan batas bawah Teorema 2.2.3 yang berlaku untuk sebarang graf G dan H yang tak harus lengkap dan disajikan pada teorema berikut.

Teorema 2.2.7 (Chvátal dan Harary, 1972) Untuk setiap graf G dan H berlaku

$$R(G, H) \geq (c(G) - 1)(\chi(H) - 1) + 1 \dots\dots\dots(2.4)$$

Bukti. Untuk graf G dan H sebarang. Perhatikan graf $F = (\chi(H) - 1)K_{(c(G)-1)}$, yaitu gabungan $(\chi(H) - 1)$ buah graf $K_{(c(G)-1)}$. Jelas bahwa F tidak memuat G sebagai subgraf karena setiap komponen dari F berorder $c(G) - 1$. Selanjutnya, karena $\bar{F} = K_{(\chi(H)-1) \times (c(G)-1)}$ maka $\chi(\bar{F}) = \chi(H) - 1 < \chi(H)$, akibatnya \bar{F} tidak memuat H . Sehingga sesuai dengan Definisi 2.2.6 dapat dibuktikan, $R(G, H) \geq (c(G) - 1)(\chi(H) - 1) + 1$. ■

Batas bawah ini memberikan informasi dasar dalam mencari nilai eksak bilangan Ramsey graf tersebut. Tidak sedikit bilangan Ramsey graf dari kombinasi dua graf G dan H yang diberikan tepat sama dengan batas bawah yang diberikan oleh Chvátal dan Harary tersebut, misalnya bilangan Ramsey graf dari kombinasi graf pohon dan graf lengkap (Chvátal, 1977), yaitu $R(T_m, K_n) = (m - 1)(n - 1) + 1$.

2.2.3 Bilangan Ramsey Multipartit.

Bentuk perkembangan kajian bilangan Ramsey lainnya adalah bilangan Ramsey multipartit. Namun, sebelum membahas tentang kajian bilangan Ramsey multipartit, akan diberikan definisi dan teorema dari bilangan Ramsey bipartit yang mendukung kajian bilangan Ramsey multipartit-ukuran.

Definisi 2.2.8. Misalkan m dan n adalah dua bilangan bulat positif, bilangan Ramsey bipartit $b(m, n)$ didefinisikan sebagai bilangan bulat terkecil t sedemikian sehingga, jika semua sisi dari graf bipartit lengkap $K_{t,t}$ diberi dua pewarnaan yaitu merah-biru akan memuat subgraf monokromatik $K_{m,m}$ dengan warna merah atau $K_{n,n}$ dengan warna biru.

Hatting dan Henning pada tahun 1998 memberikan batas atas dari bilangan Ramsey bipartit $b(m, n)$ sebagai berikut.

Teorema 2.2.9. *Untuk setiap dua bilangan bulat positif m dan n , berlaku*

$$b(m, n) \leq \binom{m+n}{m} - 1.$$

Pada tahun 2004, dalam dua *paper*nya yang berbeda Burger dan Vuuren mengkaji dua bentuk bilangan Ramsey multipartit, yaitu bilangan Ramsey multipartit-himpunan dan bilangan Ramsey multipartit-ukuran.

Pada bagian ini akan membahas tentang prinsip dasar dari bilangan Ramsey multipartit-himpunan, dimana ide dari kajian bilangan Ramsey ini adalah dengan memberikan jumlah titik yang tetap dari setiap himpunan partit dalam graf domainnya, kemudian mencari jumlah minimum himpunan partit sehingga graf domain tersebut akan memuat subgraf multipartit monokromatik.

Adapun definisi dari bilangan Ramsey multipartit-himpunan dinyatakan sebagai berikut.

Definisi 2.2.10 (Burger dan Vuuren, 2004) *Misalkan j, l, n, s dan t bilangan-bilangan bulat positif dengan $n, s \geq 2$. Bilangan Ramsey multipartit-himpunan $M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ adalah bilangan bulat terkecil ξ sedemikian sehingga, jika semua sisi dari graf $K_{\xi \times j}$ diberi warna merah dan biru sebarang, maka graf $K_{\xi \times j}$ akan memuat subgraf $K_{n \times l}$ dengan warna merah atau subgraf $K_{s \times t}$ dengan warna biru.*

Definisi bilangan Ramsey multipartit-himpunan merupakan generalisasi dari bilangan Ramsey klasik, jika $R(\sigma, \lambda) = \tau$ maka $M_1(K_{\sigma \times 1}, K_{\lambda \times 1}) = \tau$.

Selanjutnya, definisi dari diagonal bilangan Ramsey multipartit-himpunan dinyatakan pada pernyataan berikut. Misalkan n, l, k dan j adalah bilangan bulat positif, **diagonal bilangan Ramsey multipartit-himpunan** $M_j(n, l)$ adalah bilangan bulat terkecil s sehingga untuk setiap sebarang dua pewarnaan pada semua sisi dari graf $K_{s \times j}$ akan memuat sebuah monokromatik $K_{n \times l}$ sebagai subgrafnya. Definisi dari *off-diagonal* bilangan Ramsey multipartit-himpunan adalah untuk j, l, n, s dan t bilangan-bilangan bulat positif dengan $n, s \geq 2$. **Off-diagonal bilangan Ramsey multipartit-himpunan** $M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ adalah bilangan bulat terkecil ξ sedemikian sehingga, jika semua sisi dari graf $K_{\xi \times j}$ diberi dua pewarnaan merah dan biru sebarang, maka graf $K_{\xi \times j}$ akan memuat subgraf $K_{n \times l}$ berwarna merah atau subgraf $K_{s \times t}$ berwarna biru, dengan syarat $K_{n \times l} \neq K_{s \times t}$.

Off-diagonal bilangan Ramsey multipartit-himpunan memiliki sifat simetris yang disajikan dalam proposisi berikut.

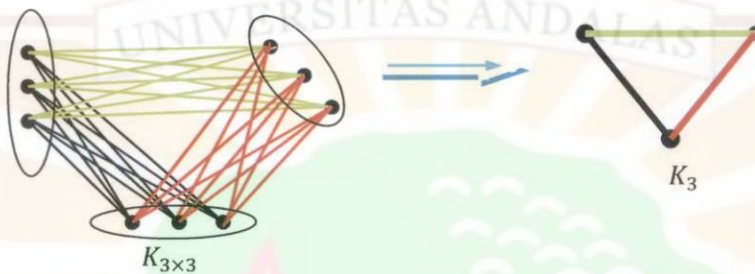
Proposisi 2.2.11 (Burger dan Vuuren, 2004) Untuk setiap bilangan bulat positif j, l, n, s, t bilangan Ramsey multipartit-himpunan $M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ senantiasa ada dan memenuhi $M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) = M_j(K_{s \times t}, K_{n \times l})$.

Untuk memperlihatkan sifat-sifat dari bilangan Ramsey multipartit-himpunan, diperkenalkan terlebih dahulu tentang ekspansi pewarnaan dengan definisi sebagai berikut.

Definisi 2.2.12 (Burger dan Vuuren, 2004) Suatu pewarnaan sisi-sisi dari $K_{k \times j}$ dikatakan *ekspansi pewarnaan*, jika untuk setiap pasangan himpunan-himpunan partit dari $K_{k \times j}$, sisi-sisi antara semua titik dalam himpunan-himpunan partit ini mempunyai warna yang sama. Oleh karena itu, setiap ekspansi pewarnaan dari

$K_{k \times j}$ berkorespondensi ketepat satu warna sisi dari K_k (dengan mengkontraksi setiap himpunan partit dari $K_{k \times j}$ ke satu titik) dan dikatakan ekspansi pewarnaan $K_{k \times j}$ diinduksi oleh pewarnaan yang bersesuaian dari K_k .

Pada Gambar 2.4 diperlihatkan suatu ekspansi pewarnaan dari graf $K_{3 \times 3}$ diinduksi oleh pewarnaan yang bersesuaian dari K_3 .



Gambar 2.4 : Ekspansi pewarnaan $K_{3 \times 3}$ diinduksi oleh pewarnaan yang bersesuaian dari K_3 .

Pada Teorema 2.2.13, Proposisi 2.2.14 dan Teorema 2.2.15 berikut diperlihatkan sifat-sifat dari bilangan Ramsey multipartit-himpunan secara berturut-turut yaitu, sifat *Boundedness*, sifat *growth* dan sifat *gaps*.

Teorema 2.2.13 (Burger dan Vuuren, 2004) Untuk $j, l, t \geq 1$ dan $n, s \geq 2$ sebarang, bilangan Ramsey multipartit-himpunan $M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ senantiasa ada dan memenuhi

$$\max\{R(n, s), \min\{\lfloor l/j \rfloor n, \lfloor t/j \rfloor s\}\} \leq M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \leq \binom{nl + st - 2}{nl - 1}.$$

Proposisi 2.2.14 (Burger dan Vuuren, 2004) Misalkan $n, s, \alpha, \gamma \geq 2$ dengan j, k, l, t, β dan δ adalah bilangan-bilangan bulat positif, maka berlaku sifat berikut, yaitu

$$(1) M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \leq M_j(K_{\alpha \times \beta}, K_{\gamma \times \delta}) \text{ jika } n \leq \alpha, l \leq \beta, s \leq \gamma \text{ dan } t \leq \delta.$$

Dikatakan pertidaksamaan kuat jika memenuhi paling sedikit satu dari $n < \alpha$ atau $s < \gamma$.

$$(2) M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \leq M_k(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \text{ jika } k \leq j.$$

Teorema 2.2.15 (Burger dan Vuuren, 2004) Untuk semua bilangan bulat positif

$n \geq 3, s \geq 2$ dan $j, l, t \geq 1$, sehingga berlaku ketaksamaan berikut:

$$M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \geq M_j(K_{(n-1) \times l}, K_{s \times t}) + s \lfloor t/j \rfloor - 1.$$

Bilangan Ramsey multipartit yang juga menjadi bahan kajian Burger dan Vuuren pada papernya tahun 2004 adalah bilangan Ramsey multipartit-ukuran. Pada Subbab ini akan dibahas tentang konsep dasar dari bilangan Ramsey multipartit-ukuran. Bilangan Ramsey multipartit-ukuran didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.16 (Burger dan Vuuren, 2004) Misalkan j, l, n, s dan t bilangan-bilangan bulat positif dengan $n, s \geq 2$. Maka bilangan Ramsey multipartit-ukuran $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ adalah bilangan bulat terkecil ζ sehingga, jika semua sisi dari graf $K_{j \times \zeta}$ diberi warna merah dan biru secara sebarang, maka graf $K_{j \times \zeta}$ akan memuat subgraf $K_{n \times l}$ dengan warna merah atau subgraf $K_{s \times t}$ dengan warna biru.

Bilangan Ramsey multipartit-ukuran dapat juga dipandang sebagai perumuman dari bilangan Ramsey klasik yaitu, jika $R(\sigma, \lambda) = \tau$ maka sesuai dengan Definisi 2.2.1 berarti untuk setiap dua pewarnaan merah-biru sebarang pada semua sisi graf $K_\tau = K_{\tau \times 1}$ akan memuat $K_\sigma = K_{\sigma \times 1}$ dengan warna merah atau

$K_\lambda = K_{\lambda \times 1}$ dengan warna biru sebagai subgrafnya, atau berdasarkan Definisi 2.2.16 dapat juga dinyatakan sebagai $m_t(K_{\sigma \times 1}, K_{\lambda \times 1}) = 1$.

Berikut ini definisi dari diagonal bilangan Ramsey multipartit-ukuran. Misalkan n, l, k dan j adalah bilangan bulat positif, **diagonal bilangan Ramsey multipartit-ukuran** $m_k(n, l)$ adalah bilangan bulat terkecil t sehingga untuk sebarang dua pewarnaan pada semua sisi $K_{k \times t}$ akan memuat sebuah subgraf monokromatik $K_{n \times l}$. Untuk definisi dari *off-diagonal* bilangan Ramsey multipartit-ukuran adalah sebagai berikut. Misalkan j, l, n, s dan t bilangan-bilangan bulat positif dengan $n, s \geq 2$, maka *off-diagonal bilangan Ramsey multipartit-ukuran* $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ adalah bilangan bulat terkecil ζ sehingga, jika semua sisi dari graf $K_{j \times \zeta}$ diberi warna merah dan biru secara sebarang, maka graf $K_{j \times \zeta}$ akan memuat subgraf $K_{n \times l}$ dengan warna merah atau subgraf $K_{s \times t}$ dengan warna biru, dengan $K_{n \times l} \neq K_{s \times t}$.

Seperti halnya dengan *Off-diagonal* bilangan Ramsey multipartit-himpunan yang memiliki sifat simetris, maka *Off-diagonal* bilangan Ramsey multipartit-ukuran juga memiliki sifat simetris yang disajikan pada proposisi berikut.

Proposisi 2.2.17 (Burger dan Vuuren, 2004) *Jika bilangan Ramsey multipartit-ukuran $m_k(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ ada, maka $m_k(K_{s \times t}, K_{n \times l}) = m_k(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ untuk setiap j, l, n, s dan t bilangan bulat dengan $n, s \geq 2$.*

Bukti. Untuk setiap j, l, n, s dan t bilangan bulat dengan $n, s \geq 2$ dan misal $m_k(K_{n \times l}, K_{s \times t}) = r$. Berdasarkan Definisi 2.2.16 $m_k(K_{n \times l}, K_{s \times t}) = r$ berarti setiap untuk sebarang dua pewarnaan merah-biru pada semua sisi $K_{k \times r}$ akan memuat $K_{n \times l}$ berwarna merah atau memuat $K_{s \times t}$ berwarna biru sebagai subgraf,

hal ini dapat juga ditulis untuk sebarang dua pewarnaan merah-biru pada semua sisi $K_{k \times r}$ akan memuat $K_{n \times l}$ dengan warna biru atau memuat $K_{s \times t}$ dengan warna merah sebagai subgraf, dengan kata lain $m_k(K_{s \times t}, K_{n \times l}) = r$. Jadi terbukti bilangan Ramsey multipartit-ukuran juga bersifat simetris yaitu,

$$m_k(K_{n \times l}, K_{s \times t}) = m_k(K_{s \times t}, K_{n \times l}). \blacksquare$$



BAB III

BILANGAN RAMSEY MULTIPARTIT-UKURAN

UNTUK GRAF MULTIPARTIT SEIMBANG LENGKAP

Pada Bab III akan dijelaskan kajian utama dari tesis ini, yaitu sifat-sifat dan batas bawah dari bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk graf multipartit seimbang lengkap serta penentuan bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kelas $(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1})$, dimana ide dari kajian ini adalah dengan memberikan jumlah himpunan partit yang tetap dalam graf domainnya, kemudian mencari jumlah minimum titik dari himpunan-himpunan partit tersebut sehingga graf domain tersebut akan memuat subgraf multipartit monokromatik. Pada tesis ini, kajian lebih difokuskan pada hasil-hasil yang telah diperoleh Burger dan Vuuren pada tahun 2004.

Berikut ini akan diperlihatkan eksistensi dari bilangan Ramsey multipartit-ukuran.

Teorema 3.1 *Bilangan Ramsey multipartit-ukuran $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ ada untuk sebarang $n, s \geq 2$ dan $l, t \geq 1$ jika dan hanya jika $j \geq R(n, s)$.*

Bukti. Pertama-tama akan ditunjukkan $j \geq R(n, s)$ jika $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ ada untuk sebarang $n, s \geq 2$ dan $l, t \geq 1$. Dalam hal ini, digunakan kontraposisi dengan mengasumsikan $j < R(n, s)$, akan diperlihatkan $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ tidak ada untuk $n, s \geq 2$ dan $l, t \geq 1$. Perhatikan bahwa $1 \leq j < R(n, s)$ untuk $n, s \geq 2$, sesuai dengan Definisi 2.2.1 berarti terdapat suatu dua pewarnaan merah dan biru dari semua sisi graf K_j yang tidak memuat K_n dengan warna merah maupun K_s dengan warna biru sebagai subgraf. Karena $K_n \subseteq K_{n \times l}$ dan $K_s \subseteq K_{s \times t}$ untuk sebarang

$l, t \geq 1$, dari Definisi 2.2.12 yaitu dengan ekspansi pewarnaan $K_{j \times k}$ diinduksi oleh pewarnaan yang bersesuaian dari K_j . Akibatnya $K_{j \times k}$ juga tidak memuat $K_{n \times l}$ dengan warna merah dan $K_{s \times t}$ dengan warna biru sebagai subgraf untuk sebarang $k \geq 1$. Berarti nilai $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ tidak ada, jadi terbukti $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ ada untuk sebarang $n, s \geq 2$ dan $l, t \geq 1$ maka $j \geq R(n, s)$.

Selanjutnya, akan dibuktikan $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ ada untuk sebarang $n, s \geq 2$ dan $l, t \geq 1$ jika $j \geq R(n, s)$. Diketahui bahwa bilangan Ramsey bipartit diagonal seimbang lengkap $m_2(K_{2 \times l}, K_{2 \times l})$ ada yang dijamin oleh Teorema 2.2.9 yaitu, $m_2(K_{2 \times l}, K_{2 \times l}) \leq \binom{2l}{l} - 1$ untuk setiap $l \geq 1$. Oleh karena itu, selalu dapat ditentukan sebarang subgraf bipartit monokromatik untuk setiap dua pewarnaan dari semua sisi sebuah graf bipartit F . Misalkan G sebuah graf multipartit seimbang lengkap yang terdiri atas $R(n, s)$ partit. Warnai sisi-sisi G menurut algoritma berikut.

1. Setiap partit di G , diberi indeks H_0 .
2. Pilih sebarang dua partit, dengan sisi-sisi yang menghubungkannya belum diwarnai. Jika sisi-sisi yang tidak terkait ke salah satu himpunan partit yang dipilih belum diwarnai, maka warnai semua sisi tersebut secara sebarang dengan menggunakan warna merah dan biru. Berarti ada sebuah graf bipartit monokromatik termuat dalam subpewarnaan ini dan indeks dari masing-masing himpunan partit yang memuat subgraf monokromatik tersebut adalah H_1 . Untuk yang lainnya, jika sisi-sisi yang terkait dengan salah satu atau kedua partit yang dipilih dan telah diwarnai sebelumnya, maka pilih subhimpunan-subhimpunan titik-titik dari masing-masing partit yang memiliki indeks

tertinggi, masing-masing diberi indeks H_k dan H_m dengan $m \leq k$. Untuk sebarang dua pewarnaan merah-biru dari sisi-sisi diantara titik-titik partit yang memiliki indeks H_k dan titik-titik pada partit H_m akan memuat sebuah subgraf bipartit monokromatik seimbang lengkap, kemudian indeks himpunan-himpunan partit yang memuat subgraf monokromatik tersebut yaitu H_{k+1} .

3. Ulangi langkah ke-2 sampai terdapat warna sisi-sisi antara subhimpunan-subhimpunan dari setiap pasangan partit di G .

Dari hasil-hasil dalam algoritma di atas dan berdasarkan Teorema 2.2.12 yaitu dengan ekspansi pewarnaan dari $K_{R(n,s) \times |H_\alpha|}$ sebagai subgraf G , diinduksi oleh beberapa sisi dua pewarnaan dari $K_{R(n,s)}$ dengan H_α adalah indeks maksimal yang diperoleh dari algoritma di atas. Jadi, akan diperoleh sebuah subgraf $K_{n \times |H_\alpha|}$ dengan warna merah atau subgraf $K_{s \times |H_\alpha|}$ dengan warna biru. Selanjutnya warnai semua sisi sisa dari graf G dengan sebarang warna merah-biru. Kemudian dipilih himpunan partit semula yang cukup besar dari graf G , yaitu $|H_\alpha| \geq \max\{l, t\}$. Oleh karena itu, G akan memuat $K_{n \times l}$ berwarna merah dan $K_{s \times t}$ berwarna biru sebagai subgraf. Jadi terbukti $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ ada untuk $n, s \geq 2$ dan $l, t \geq 1$ jika $j \geq R(n, s)$. ■

Dari Teorema 3.1 di atas terlihat bahwa bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk graf multipartit seimbang lengkap tidak selalu ada, maka teorema ini disebut juga sifat eksistensi parsial dari bilangan Ramsey multipartit-ukuran.

Selanjutnya, batasan bilangan Ramsey multipartit-ukuran dapat dibangun dengan menggunakan batas-batas bilangan Ramsey multipartit-himpunan, pada teorema berikut juga diperlihatkan hubungan bilangan Ramsey multipartit-himpunan dengan bilangan Ramsey multipartit-ukuran.

Teorema 3.2 *Jika $j, k, l, t \geq 1$ dan $n, s \geq 2$, maka berlaku*

$$(1) \quad m_k(K_{n \times l}, K_{s \times t}) > j \text{ jika dan hanya jika } M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) > k.$$

$$(2) \quad m_k(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \leq j \text{ jika dan hanya jika } M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \leq k.$$

Bukti. (1) Berdasarkan Definisi 2.2.10 ketidaksamaan $M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) > k$ untuk $j, k, l, t \geq 1$ dan $n, s \geq 2$ terpenuhi jika dan hanya jika terdapat suatu dua pewarnaan merah-biru pada semua sisi $K_{k \times j}$ tidak memuat $K_{n \times l}$ dengan warna merah dan $K_{s \times t}$ dengan warna biru sebagai subgraf, akibat dari Definisi 2.2.16 dapat juga ditulis $m_k(K_{n \times l}, K_{s \times t}) > j$.

(2) $m_k(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \leq j$ jika dan hanya jika $M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \leq k$, untuk setiap $l, t \geq 1$ dan $n, s \geq 2$ jelas terbukti karena merupakan kontraposisi dari pernyataan pada bagian (1). ■

Berikut ini, sifat *growth* dari bilangan Ramsey multipartit-ukuran yang disajikan dalam Proposisi 3.3.

Proposisi 3.3 *Misal $n, s, \alpha, \gamma \geq 2$, j, k, l, t, β dan δ adalah bilangan-bilangan bulat positif, maka*

$$(1) \quad m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \leq m_j(K_{\alpha \times \beta}, K_{\gamma \times \delta}) \text{ jika } n \leq \alpha, l \leq \beta, s \leq \gamma \text{ dan } t \leq \delta \text{ (bila bilangan Ramsey multipartit-ukuran keduanya ada).}$$

$$(2) \quad m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \leq m_k(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \text{ jika } k \leq j \text{ (bila bilangan Ramsey multipartit-ukuran keduanya ada).}$$

Bukti. (1) Untuk setiap $n, s, \alpha, \gamma \geq 2$ dan j, k, l, t, β dan δ adalah bilangan-bilangan bulat positif. Akan dibuktikan $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \leq m_j(K_{\alpha \times \beta}, K_{\gamma \times \delta})$. Misalkan $m_j(K_{\alpha \times \beta}, K_{\gamma \times \delta}) = w$ dengan $n \leq \alpha, l \leq \beta, s \leq \gamma$ dan $t \leq \delta$, sesuai dengan Definisi 2.2.16 berarti untuk sebarang dua pewarnaan merah-biru pada

semua sisi $K_{j \times w}$ memuat $K_{\alpha \times \beta}$ dengan warna merah atau $K_{\gamma \times \delta}$ dengan warna biru sebagai subgraf, karena $n \leq \alpha$ dan $l \leq \beta$ sehingga $K_{n \times l} \subseteq K_{\alpha \times \beta}$, begitu juga untuk $s \leq \gamma$ dan $t \leq \delta$ maka diperoleh $K_{s \times t} \subseteq K_{\gamma \times \delta}$. Akibatnya terdapat sebarang dua pewarnaan merah-biru pada semua sisi $K_{w \times j}$ memuat $K_{n \times l}$ dengan warna merah atau $K_{s \times t}$ dengan warna biru sebagai subgraf, atau dapat disimpulkan $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \leq w$. Jadi dapat dibuktikan $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \leq m_j(K_{\alpha \times \beta}, K_{\gamma \times \delta})$.

(2) Untuk setiap $n, s \geq 2$ dan j, k, l, t adalah bilangan-bilangan bulat positif. Akan dibuktikan jika $k \leq j$ maka berlaku $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \leq m_k(K_{n \times l}, K_{s \times t})$. Misalkan $m_k(K_{n \times l}, K_{s \times t}) = p$ berdasarkan Definisi 2.2.16 berarti untuk sebarang dua pewarnaan merah-biru pada semua sisi $K_{k \times p}$ memuat subgraf $K_{n \times l}$ dengan warna merah atau subgraf $K_{s \times t}$ dengan warna biru. Karena $k \leq j$, akibatnya diperoleh $K_{w \times k} \subseteq K_{j \times p}$. Sehingga haruslah $K_{k \times p}$ juga memuat subgraf $K_{n \times l}$ dengan warna merah atau subgraf $K_{s \times t}$ dengan warna biru untuk sebarang dua pewarnaan merah-biru pada semua sisinya, atau sesuai dengan Definisi 2.2.16 dapat juga ditulis $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \leq p = m_k(K_{n \times l}, K_{s \times t})$. ■

Pada sifat *growth* terlihat bahwa $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \leq m_j(K_{\alpha \times \beta}, K_{\gamma \times \delta})$, jika $K_{n \times l} \subseteq K_{\alpha \times \beta}$ dan $K_{s \times t} \subseteq K_{\gamma \times \delta}$. Selain itu, untuk dua bilangan Ramsey multipartit-ukuran dengan dua subgraf yang dikandungnya sama apabila jumlah himpunan partitnya semakin besar, mengakibatkan bilangan Ramsey multipartit-ukurannya akan semakin kecil.

Seperti halnya bilangan Ramsey multipartit-himpunan yang memiliki sifat *gaps* antara dua bilangan Ramsey multipartit-himpunan, maka pada bilangan

Ramsey multipartit-ukuran juga memiliki sifat yang sama, yang disajikan pada Teorema 3.4 berikut.

Teorema 3.4 Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3, s \geq 2$ dan $j, l, t \geq 1$, sehingga berlaku $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \geq m_j(K_{(n-1) \times l}, K_{s \times t}) + \lceil t/l/s \rceil - 1$.

Bukti. Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3, s \geq 2$ dan $j, l, t \geq 1$. Misalkan $m_j(K_{(n-1) \times l}, K_{s \times t}) = v$ dan $\lceil t/l/s \rceil - 1 = w$. Dari $m_j(K_{(n-1) \times l}, K_{s \times t}) = v$ akibatnya pada graf dengan j himpunan partit dan $(v - 1)$ titik terdapat suatu dua pewarnaan merah-biru dari semua sisi $K_{j \times (v-1)}$ yang tidak memuat subgraf $K_{(n-1) \times l}$ dengan warna merah ataupun subgraf $K_{s \times t}$ dengan warna biru, bentuk pewarnaan ini diberi nama G . Selanjutnya, dibentuk pewarnaan sisi yang diberi nama H , yaitu suatu bentuk dua pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf $K_{j \times w}$ diberi warna biru, kemudian setiap titik di $K_{j \times w} = F$ dihubungkan ke semua titik pada bentuk pewarnaan G dengan warna merah. Andaikan pada bentuk pewarnaan H memuat $K_{n \times l}$ dengan warna merah sebagai subgraf, karena F hanya memuat paling banyak satu himpunan partit dari $K_{n \times l}$ (sebab F tidak mempunyai sisi merah) akibatnya paling sedikit $(n - 1)$ himpunan partit $K_{n \times l}$ harus di G . Tetapi hal ini kontradiksi dengan definisi pewarnaan G , sehingga dapat disimpulkan haruslah H tidak memuat $K_{n \times l}$ dengan warna merah sebagai subgraf.

Dibutuhkan paling sedikit $\lceil t/l/s \rceil$ himpunan partit dari himpunan-himpunan yang berukuran j sehingga graf multipartit memuat subgraf $K_{s \times t}$ berwarna biru. Karena H memiliki himpunan partit berwarna biru di F hanya sebanyak $w = \lceil t/l/s \rceil - 1$ himpunan partit dan terhubung merah dengan titik-titik di G , sedangkan di G juga tidak memuat subgraf $K_{s \times t}$ berwarna biru,

akibatnya H tidak memuat $K_{s \times t}$ dengan warna biru sebagai subgraf. Jadi H adalah suatu dua pewarnaan merah-biru pada semua sisi dari graf $K_{(v+w-1) \times j}$ yang tidak memuat $K_{n \times l}$ dengan warna merah ataupun $K_{s \times t}$ dengan warna biru sebagai subgraf. ■

Pada teorema berikut, terlihat bahwa nilai bilangan Ramsey multipartit-ukuran akan mendekati 1 untuk nilai j yang semakin besar, sifat ini dikatakan sebagai sifat limit asimtotik untuk bilangan Ramsey multipartit-ukuran.

Teorema 3.5 *Jika $n, s \geq 2$ dan $l, t \geq 1$, maka*

$$m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \rightarrow 1 \text{ bila } j \rightarrow \infty.$$

Bukti. Untuk $n, s \geq 2, l, j, t \geq 1$ dan dari Proposisi 3.3 bagian (2), dapat disimpulkan barisan $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ semakim kecil untuk j yang bertambah besar. Selanjutnya, akan ditunjukkan ada bilangan bulat k sehingga $m_k(K_{n \times l}, K_{s \times t}) = 1$. Dari eksistensi bilangan Ramsey klasik, jelas terdapat suatu bilangan bulat k sehingga $R(nl, st) = k$. Jadi untuk setiap dua pewarnaan merah-biru pada semua sisi $K_k = K_{k \times 1}$ memuat K_{nl} dengan warna merah atau K_{st} dengan warna biru sebagai subgraf. Karena $K_{n \times l} \subseteq K_{nl}$ dan $K_{s \times t} \subseteq K_{st}$, akibatnya $K_{k \times 1}$ juga memuat $K_{n \times l}$ dengan warna merah atau $K_{s \times t}$ dengan warna biru sebagai subgraf, sehingga dari Definisi 2.2.16 dapat juga disimpulkan $m_k(K_{n \times l}, K_{s \times t}) = 1$. Karena barisan $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ tidak naik untuk j yang semakin besar dan ada $j = k$ sehingga $m_k(K_{n \times l}, K_{s \times t}) = 1$ maka terbukti $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \rightarrow 1$ untuk $j \rightarrow \infty$. ■

Akibat dari Teorema 3.5, maka dapat diperoleh sifat limit asimtotik untuk bilangan Ramsey multipartit-himpunan, sifat ini disajikan pada Akibat 3.6 berikut.

Akibat 3.6 Jika $n, s \geq 2$ dan $l, t \geq 1$, maka

$$M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \rightarrow R(n, s) \text{ bila } j \rightarrow \infty.$$

Bukti. Dari eksistensi bilangan Ramsey klasik untuk $n, s \geq 2$ terdapat k suatu bilangan bulat terkecil sehingga $k = R(n, s)$. Menurut Teorema 3.1, maka $m_k(K_{n \times l}, K_{s \times t}) = j$ ada untuk suatu j bilangan bulat dengan $k = R(n, s)$, sesuai dengan Definisi 2.2.10 diperoleh untuk sebarang dua pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf $K_{k \times j}$ akan memuat subgraf $K_{n \times l}$ dengan warna merah atau subgraf $K_{s \times t}$ dengan warna biru, atau ditulis juga sebagai $M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) = k = R(n, s)$. Berdasarkan Proposisi 2.2.14 $M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ tidak pernah naik untuk j yang semakin bertambah besar. Akibatnya, terbukti $M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \rightarrow R(n, s)$ untuk $j \rightarrow \infty$. ■

Beberapa bilangan Ramsey multipartit-ukuran yang telah diperoleh diantaranya, $m_2(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 3}) = 9$ dan $m_2(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 4}) = 14$ ditemukan oleh Hatting dan Hanning (1998), $m_2(K_{2 \times 3}, K_{2 \times 3}) = 17$ diperoleh Beineke dan Schwenk (1975), $m_2(K_{2 \times 4}, K_{2 \times 4}) = 48$ ditunjukkan oleh Irving (1978) dan nilai-nilai bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kelas $(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 2})$ yang disajikan pada Tabel 2.

Dari Tabel 2 dapat diketahui bahwa, bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kelas $(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 2})$ dengan $j = 1$ tidak ada, hal ini sesuai dengan Teorema 3.1. Selanjutnya, untuk $j \geq 2$ bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kelas $(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 2})$ yang diperoleh oleh Day dkk. pada tahun 2001, adalah: $m_2(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 2}) = 5$, $m_3(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 2}) = 3$, dan $m_j(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 2}) = 2$ dengan nilai $j = 4, 5$ serta $m_j(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 2}) = 1$ untuk $j \geq 6$.

Tabel 2. Bilangan Ramsey Multipartit-Ukuran Kelas $(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 2})$.

j	$m_j(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 2})$
1	∞^a
2	5^b
3	3^b
4	2^b
5	2^b
≥ 6	1^b

^a Dari Teorema 3.1^b Oleh Day dkk (2001).

Pada Proposisi 3.7 berikut akan ditunjukkan bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kelas $(K_{2 \times 1}, K_{s \times t})$ dan $(K_{n \times 1}, K_{s \times 1})$.

Proposisi 3.7.

- (1) $m_j(K_{2 \times 1}, K_{s \times t}) = \lceil t/\lfloor j/s \rfloor \rceil$ untuk setiap $t \geq 1$ dan $j \geq s \geq 2$.
- (2) $m_j(K_{n \times 1}, K_{s \times 1}) = 1$ untuk setiap $n, s \geq 2$ dan $j \geq R(n, s)$.

Bukti. (1) Untuk sebarang $t \geq 1$ dan $j \geq s \geq 2$, akan ditunjukkan $m_j(K_{2 \times 1}, K_{s \times t}) = \lceil t/\lfloor j/s \rfloor \rceil$. Pertama-tama akan dicari c bilangan bulat terkecil sehingga $K_{s \times t} \subseteq K_{j \times c}$. Agar $K_{s \times t}$ menjadi subgraf dari $K_{j \times c}$, maka untuk sebarang dua titik dalam himpunan partit yang sama dari $K_{j \times c}$ tidak boleh dalam himpunan partit yang berbeda pada subgraf $K_{s \times t}$. Oleh karena itu, haruslah dikelompokkan himpunan-himpunan partit penuh dari $K_{j \times c}$ menjadi s buah himpunan-himpunan partit yang baru. Sehingga akan diperoleh $\lfloor j/s \rfloor$ himpunan partit dari $K_{j \times c}$ dalam setiap kelompoknya. Untuk menjamin terdapat t titik dari setiap kelompok, maka

haruslah terdapat paling sedikit $c = \lceil t/\lfloor j/s \rfloor \rceil$ titik untuk setiap himpunan partit pada graf $K_{j \times c}$. Jadi terdapat $c = \lceil t/\lfloor j/s \rfloor \rceil$ sehingga $K_{s \times t} \subseteq K_{j \times c}$.

(2) Misal $n, s \geq 2$ dan $R(n, s) = w$, berarti untuk sebarang dua pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf $K_w = K_{w \times 1}$ memuat $K_n = K_{n \times 1}$ dengan warna merah atau $K_s = K_{s \times 1}$ dengan warna biru sebagai subgraf. Berdasarkan Definisi 2.2.16 hal ini dapat juga ditulis $m_w(K_{n \times 1}, K_{s \times 1}) \leq 1$. Berdasarkan Proposisi 3.3 bagian (2) untuk $j \geq w = R(n, s)$ diperoleh $m_j(K_{n \times 1}, K_{s \times 1}) \leq m_w(K_{n \times 1}, K_{s \times 1}) \leq 1$. Sehingga sesuai dengan Definisi 2.2.16, disimpulkan $m_j(K_{n \times 1}, K_{s \times 1}) = 1$ untuk setiap $j \geq R(n, s)$. ■

Selanjutnya, pada Proposisi 3.8 disajikan beberapa bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kelas $(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1})$.

Proposisi 3.8.

- (1) $m_1(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = m_2(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = \infty$.
- (2) $m_3(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 3$ dan $m_4(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 2$.
- (3) $m_5(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = m_6(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 2$.
- (4) $m_j(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 1$ untuk semua $j \geq 7$.

Bukti. (1) Sesuai dengan Teorema 3.1 yaitu $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ ada untuk setiap $n, s \geq 2$ dan $l, t \geq 1$ jika dan hanya jika $j \geq R(n, s)$. Karena $R(2, 3) = 3$ berarti $R(2, 3) > 2$ maka nilai $m_1(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1})$ dan $m_2(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1})$ tidak ada, atau dapat juga ditulis $m_1(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = m_2(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = \infty$.

(2) Berdasarkan nilai $M_2(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 4 > 3$ dan sesuai dengan Teorema 3.2 bagian (1) maka diperoleh $m_3(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) > 2$. Dari $M_3(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 3$ atau ditulis juga sebagai $M_3(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq 3$, dan sesuai dengan Teorema 3.2

bagian (2) dapat disimpulkan $2 < m_3(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq 3$. Akibatnya, dapat dibuktikan $m_3(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 3$. Selanjutnya, dengan cara yang sama akan ditunjukkan $m_4(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 2$. Dari $M_1(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 7 > 4$ dan akibat dari Teorema 3.2 bagian (1) maka diperoleh $m_4(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) > 1$. Diketahui $M_2(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 4$ yang berarti $M_2(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq 4$, sehingga berdasarkan Teorema 3.2 bagian (2) diperoleh $1 < m_4(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq 2$. Jadi dapat dibuktikan $m_4(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 2$.

(3) Dari $M_1(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 7 > 6$, Teorema 3.2 bagian (1) dan Proposisi 3.3 bagian (2) serta Proposisi 3.8 bagian (2) diperoleh $1 < m_6(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1})$ dan $m_6(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq m_5(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1})$ serta $m_5(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq m_4(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 2$. Sehingga dapat dibuktikan bahwa $m_5(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = m_6(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 2$.

(4) Dari $M_1(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 7$ atau ditulis juga sebagai $M_1(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq j$ untuk setiap $j \geq 7$ dan sesuai dengan Teorema 3.2 bagian (2), diperoleh $m_j(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq 1$ untuk setiap $j \geq 7$. Jadi terbukti $m_j(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 1$ untuk setiap $j \geq 7$. ■

Karena penentuan bilangan Ramsey multipartit-ukuran melalui sifat-sifatnya sangat tergantung terhadap bilangan Ramsey multipartit-himpunan untuk kelas yang sama, maka berikut ini adalah penentuan bilangan Ramsey multipartit-ukuran dengan pendekatan melalui batas bawahnya.

Proposisi 3.9 Jika $j, l, t \geq 1$ dan $n, s \geq 2$, maka berlaku

$$m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \geq \min\{\lfloor nl/j \rfloor, \lfloor st/j \rfloor\}.$$

Bukti. Untuk $j, l, t \geq 1$ dan $n, s \geq 2$ sebarang. Graf $K_{n \times l}$ dan $K_{s \times t}$ berturut-turut mempunyai nl dan st titik. Jadi harus ada setidaknya $\min\{\lfloor nl/j \rfloor, \lfloor st/j \rfloor\}$ titik per himpunan partit dalam sebuah graf multipartit seimbang lengkap yang terdiri dari

j himpunan partit untuk memuat $K_{n \times l}$ atau $K_{s \times t}$ sebagai subgraf. Jadi, $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \geq \min\{\lfloor nl/j \rfloor, \lfloor st/j \rfloor\}$. ■

Berikut ini akan disajikan batas atas untuk bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kelas $(K_{2 \times l}, K_{2 \times l})$. Sebelumnya akan diberikan definisi dari l -connection. Misalkan G suatu graf multipartit, jika $S, T \subseteq V$ dan $x \in S$ maka x dikatakan l -connection apabila x bertetangga dengan l titik di T . Selanjutnya, untuk x yang bertetangga ke titik-titik di T sebanyak l dengan warna yang sama maka x dikatakan l -connection monokromatik.

Teorema 3.10. Jika $j \geq 2$ dan $l \geq 1$, maka berlaku

$$m_j(K_{2 \times l}, K_{2 \times l}) \leq \max \left\{ 2l - 1, \left\lfloor \frac{2^{2(l-1)} \binom{2l-1}{l} + 1}{j-1} \right\rfloor \right\}.$$

Bukti. Misal $c = \max \left\{ 2l - 1, \left\lfloor \frac{2^{2(l-1)} \binom{2l-1}{l} + 1}{j-1} \right\rfloor \right\}$ dan (S', T') adalah sebuah bentuk bipartisi dari himpunan-himpunan partit $K_{j \times c}$, dengan $|S'| = j - 1$. Dari

$$c = \max \left\{ 2l - 1, \left\lfloor \frac{2^{2(l-1)} \binom{2l-1}{l} + 1}{j-1} \right\rfloor \right\} \text{ diperoleh } c \geq \left\lfloor \frac{2^{2(l-1)} \binom{2l-1}{l} + 1}{j-1} \right\rfloor \text{ dan } c \geq 2l - 1.$$

Perhatikan bahwa $c \geq \left\lfloor \frac{2^{2(l-1)} \binom{2l-1}{l} + 1}{j-1} \right\rfloor \geq \frac{2^{2(l-1)} \binom{2l-1}{l} + 1}{j-1}$, sehingga

$$cj \geq 2(l-1) \binom{2l-1}{l} + 1 + c \geq \left\{ 2(l-1) \binom{2l-1}{l} + 1 \right\} + \{2l - 1\}. \text{ Untuk } T'$$

yang terdiri paling sedikit dari $2l - 1$ titik, maka haruslah S' memiliki paling sedikit $2(l-1) \binom{2l-1}{l} + 1$ titik. Misalkan U' adalah setiap himpunan bagian

dari S' dengan $2(l-1) \binom{2l-1}{l} + 1$ titik, dan W' adalah setiap himpunan bagian

dari T' yang memiliki $2l - 1$ titik. Karena setiap dua titik $u \in U'$ dan $w \in W'$ berasal dari himpunan-himpunan partit yang berbeda dari graf $K_{j \times c}$, akibatnya

$(u, w) \in E(K_{j \times c})$. Perhatikan sisi-sisi antara titik-titik di U' dan W' , maka derajat setiap titik di U' adalah $2l - 1$ (terdapat $2l - 1$ sisi yang terkait dengan setiap titik di U') dan jika sisi-sisi yang terkait tersebut diberi warna merah atau biru maka terdapat paling sedikit l -connection monokromatik pada setiap titik di U' . Akibatnya terdapat $2(l - 1) \binom{2l - 1}{l} + 1$ buah l -connection monokromatik di $K_{j \times c}$ dan $\binom{2l - 1}{l}$ himpunan dengan l titik di W' . Dengan menggunakan prinsip *pigeonhole*, untuk $2(l - 1) \binom{2l - 1}{l} + 1$ buah l -connection monokromatik diberi tanda untuk $\binom{2l - 1}{l}$ buah himpunan bagian berukuran l di W' , maka terdapat sekurang-kurangnya satu himpunan bagian dengan $2(l - 1) + 1$ l -connection monokromatik yang diberi tanda. Oleh karena itu minimal terdapat l buah l -connection monokromatik dengan warna yang sama. Akibatnya terdapat $K_{2 \times l}$ dengan warna merah atau biru sebagai subgraf dari $K_{j \times c}$. Jadi terbukti

$$m_j(K_{2 \times l}, K_{2 \times l}) \leq c = \max \left\{ 2l - 1, \left\lceil \frac{2(l-1) \binom{2l-1}{l} + 1}{j-1} \right\rceil \right\}. \blacksquare$$

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Dari tesis ini dapat disimpulkan bahwa, sifat-sifat dari bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk graf multipartit seimbang lengkap yaitu sifat *eksistensi* parsial, kaitan antara bilangan Ramsey multipartit-himpunan dan bilangan Ramsey multipartit-ukuran, sifat *growth*, sifat *gaps* dan sifat limit asimtotik. Selain itu, dengan menggunakan sifat-sifat tersebut ditunjukkan bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kelas $(K_{2 \times 1}, K_{s \times t})$ yaitu, $m_j(K_{2 \times 1}, K_{s \times t}) = \lfloor t/\lfloor j/s \rfloor \rfloor$ untuk $t \geq 1$ dan $j \geq s \geq 2$, kelas $(K_{n \times 1}, K_{s \times 1})$ yaitu, $m_j(K_{n \times 1}, K_{s \times 1}) = 1$ untuk $n, s \geq 2$ dan $j \geq R(n, s)$. Sedangkan, bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kelas $(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1})$, yaitu $m_j(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = \infty$ dengan $j = 1, 2$, untuk nilai j lainnya adalah $m_3(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 3$, $m_j(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 2$ untuk $j = 4, 5, 6$, dan $m_j(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 1$ untuk semua $j \geq 7$. Sedangkan batas bawah bilangan Ramsey multipartit-ukuran adalah $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) \geq \min\{\lfloor nl/j \rfloor, \lfloor st/j \rfloor\}$, untuk $j, l, t \geq 1$ dan $n, s \geq 2$, dan batas atas untuk bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk $(K_{2 \times l}, K_{2 \times l})$, untuk $j \geq 2$ dan $l \geq 1$ berlaku

$$m_j(K_{2 \times l}, K_{2 \times l}) \leq \max \left\{ 2l - 1, \left\lfloor \frac{2(l-1) \binom{2l-1}{l} + 1}{j-1} \right\rfloor \right\}.$$

1.2 Saran

Karena keterbatasan penulis, maka masih banyak beberapa masalah yang belum terjawab. Oleh karena itu penulis menyarankan :

1. Penentuan batas atas bilangan Ramsey multipartit-ukuran $m_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$.
2. Penentuan bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kelas lainnya.



DAFTAR PUSTAKA

- Beineke, L.W dan A.J. Schwenk (1975), On a bipartite form of the Ramsey problem, *Congr. Number.*, Vol.15. pp: 17-22.
- Burger, A.P, P.J.P. Grobler, E.H. Stipp, dan J.H. van Vuuren (2003), Diagonal Ramsey numbers in multipartite graphs, *Utilitas Math.*, Vol.66, pp: 137-163.
- Burger, A.P, dan J.H. Van Vuuren (2004), Ramsey Numbers in complete balanced multipartite graphs. Part I : Set numbers, *Discrete Math.*, Vol 283, pp: 37-43.
- Burger, A.P, dan J.H. Van Vuuren (2004), Ramsey numbers in complete balanced multipartite graphs. Part II : Size numbers, *Discrete Math.*, Vol. 283, pp: 45-49.
- Chartrand, G dan S. Schuster (1971), On the existence of specified cycles in complementary graphs, *Bull. AMS*, Vol. 77, pp: 995–998.
- Chvátal, V dan F. Harary (1972), *Generalised Ramsey theory for graphs, II: small diagonal numbers*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 32, pp: 389–394.
- Chvátal, V dan F. Harary (1972), Generalised Ramsey theory for graphs, III: small off-diagonal numbers, *Pacific J. Math.*, Vol. 41, pp: 335–345.
- Chvátal, V. (1977), Tree-complete graph Ramsey numbers, *Journal of Graph Theory*, Vol. 1, pp: 93.
- Day, D, W. Goddard, M.A. Henning dan H.C. Swart (2001), Multipartite Ramsey numbers, *Ars Combinatoria*. Vol. 58, pp: 23–31.
- Erdős, P dan G. Szekeres (1935), A Combinatorial problem in geometry, *Composito Math*, Vol. 2, pp: 463–470.
- Greenwood, R.E dan A.M. Gleason (1955), Combinatorial relations and chromatic graphs, *Canadian Journal of Mathematics*, Vol. 7, pp: 1–7.
- Grinstead, C dan S.Roberts (1982), On The Rumsey numbers $R(3,8)$ and $R(3,9)$, *J. Combin. Theory*, Vol. 33B, pp: 27 – 51.
- Harborth, H dan I. Mengersen (1996), Some Ramsey numbers for complete bipartite graphs, *Austral. J. Combin.*, Vol. 13, pp: 119–128.

- Harborth, H dan I. Mengersen (2001), Ramsey numbers in octahedron graphs, *Discrete Math.*, Vol. 231, pp: 241–246.
- Hatting, J.H dan M.A. Henning (1998), Bipartite Ramsey theory, *Utilitas Math.*, Vol. 53, pp: 217 – 230.
- Irving, R.W. (1978), A bipartite Ramsey problem and the Zarankiewics numbers, *Glasgow Math.*, Vol. 19, pp: 13-26.
- Kalbfleisch, J.G. (1965), Construction and special edge-chromatic graphs, *Canada Math.Bull.*, Vol.8, pp: 575-584.
- Kery, G. (1964), On a Theorem of Ramsey (in Hungary), *Matematikai Lapok*, Vol.15, pp: 204 – 224.
- Longani, V. (2002), Some bipartite Ramsey numbers, *Southeast Asian Bull. Math.*, Vol. 26 pp: 583 – 592.
- McKay, D. and S.P. Radziszowski (1995), $R(4,5) = 25$, *J. Graph Theory*, Vol.19: 3, pp: 309 – 322.
- Radziszowski, S.P. (2009), Small Ramsey numbers, *Electron. J. Combin.*, DSI.12.
- Ramsey, F.P.(1930), *On a problem of formal logic*, Proceedings of the London Mathematical Society, Vol.30, pp: 264-286.
- Stipp, E.H. (2000), *Bounds for Ramsey numbers in multipartite graphs*, Tesis Magister, University of Stellenbosch, Stellenbosch, South Africa.
- Surahmat (2003), *Bilangan Ramsey untuk graf roda*, Disertasi Doktor, ITB Bandung.
- Syafrizal Sy (2009), *Bilangan Ramsey multipartit untuk graf lintasan*, Disertasi Doktor, ITB Bandung.