BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Solusi persamaan diferensial

$$D^2y(x) + k^2y(x) = 0, \tag{4.1.1}$$

dengan syarat batas berupa kombinasi dua dari persamaan berikut:

$$\mu_1 D_{a+}^{\alpha_1} y(x)\Big|_{x=b} + \mu_2 D_{b-}^{\beta_1} y(x)\Big|_{x=a} = L_1 \tag{4.1.2}$$

$$\mu_3 D_{a+}^{\alpha_1} y(x)\Big|_{x=b} + \mu_4 D_{a+}^{\alpha_2} y(x)\Big|_{x=b} = L_2 \tag{4.1.3}$$

$$\mu_5 D_{b-}^{\beta_1} y(x)\Big|_{x=a} + \mu_6 D_{b-}^{\beta_2} y(x)\Big|_{x=a} = L_3 \tag{4.1.4}$$

dimana $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in [0, 2], \alpha_1 \neq \alpha_2, \beta_1 \neq \beta_2, \mu_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., 6,$ dan $L_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, 3,$ dengan $D_{a^+}^{\alpha_m}, D_{b^-}^{\beta_n}$, adalah turunan *fractional* Riemann-Liouville dinyatakan sebagai berikut:

1. Jika syarat batas berupa persamaan 4.1.2 dan 4.1.3, maka solusinya adalah

$$y(x) = C_1 cos(kx) + C_2 sin(kx),$$

dimana C_1 dan C_2 adalah solusi dari sistem persamaan linier berikut

$$\begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} \\ A_{21} & B_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}, \tag{4.1.5}$$

dimana

$$A_{11} = \mu_1 D^{\alpha_1}_{a+} cos(kx)\Big|_{x=b} + \mu_2 D^{\beta_1}_{b-} cos(kx)\Big|_{x=a}$$

$$B_{11} = \mu_1 D^{\alpha_1}_{a+} sin(kx)\Big|_{x=b} + \mu_2 D^{\beta_1}_{b-} sin(kx)\Big|_{x=a}$$

$$A_{21} = \mu_3 D^{\alpha_1}_{a+} cos(kx)\Big|_{x=b} + \mu_4 D^{\alpha_2}_{a+} cos(kx)\Big|_{x=b}$$

$$B_{21} = \mu_3 D^{\alpha_1}_{a+} sin(kx)\Big|_{x=b} + \mu_4 D^{\alpha_2}_{a+} sin(kx)\Big|_{x=b}.$$

Jika matrik $\begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} \\ A_{21} & B_{21} \end{bmatrix}$ nonsingular, maka solusi dari (4.1.5) adalah tunggal dan diberikan oleh:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} \\ A_{21} & B_{21} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}.$$

2. Jika syarat batas berupa persamaan 4.1.3 dan 4.1.4, maka solusinya adalah

$$y(x) = C_3 cos(kx) + C_4 sin(kx),$$

dimana C_3 dan C_4 adalah solusi dari sistem persamaan linier berikut

$$\begin{bmatrix} A_{12} & B_{12} \\ A_{22} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}, \tag{4.1.6}$$

dimana

$$A_{12} = \mu_3 D^{\alpha_1}_{a+} cos(kx)\Big|_{x=b} + \mu_4 D^{\alpha_2}_{a+} cos(kx)\Big|_{x=b}$$

$$B_{12} = \mu_3 D^{\alpha_1}_{a+} sin(kx)\Big|_{x=b} + \mu_4 D^{\alpha_2}_{a+} sin(kx)\Big|_{x=b}$$

$$A_{22} = \mu_5 D^{\beta_1}_{b-} cos(kx)\Big|_{x=a} + \mu_6 D^{\beta_2}_{b-} cos(kx)\Big|_{x=a}$$

$$B_{22} = \mu_5 D^{\beta_1}_{b-} sin(kx)\Big|_{x=a} + \mu_6 D^{\beta_2}_{b-} sin(kx)\Big|_{x=a}.$$

Jika matrik $\begin{bmatrix} A_{12} & B_{12} \\ A_{22} & B_{22} \end{bmatrix}$ nonsingular, maka solusi dari (4.1.6) adalah tunggal dan diberikan oleh:

$$\begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12} & B_{12} \\ A_{22} & B_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}.$$

3. Jika syarat batas berupa persamaan 4.1.2 dan 4.1.4, maka solusinya adalah

$$y(x) = C_5 cos(kx) + C_6 sin(kx),$$

dimana C_5 dan C_6 adalah solusi dari persamaan linier berikut

$$\begin{bmatrix} A_{13} & B_{13} \\ A_{23} & B_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_3 \end{bmatrix},$$

dimana

$$A_{13} = \mu_1 D_{a+}^{\alpha_1} cos(kx)\Big|_{x=b} + \mu_2 D_{b-}^{\beta_1} cos(kx)\Big|_{x=a}$$

$$B_{13} = \mu_1 D_{a+}^{\alpha_1} sin(kx)\Big|_{x=b} + \mu_2 D_{b-}^{\beta_1} sin(kx)\Big|_{x=a}$$

$$A_{23} = \mu_5 D_{b-}^{\beta_1} cos(kx)\Big|_{x=a} + \mu_6 D_{b-}^{\beta_2} cos(kx)\Big|_{x=a}$$

$$B_{23} = \mu_5 D_{b-}^{\beta_1} sin(kx)\Big|_{x=a} + \mu_6 D_{b-}^{\beta_2} sin(kx)\Big|_{x=a}.$$

Jika matrik $\begin{bmatrix} A_{13} & B_{13} \\ A_{23} & B_{23} \end{bmatrix}$ nonsingular, maka solusi dari (4.1.5) adalah tunggal dan diberikan oleh:

$$\begin{bmatrix} C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{13} & B_{13} \\ A_{23} & B_{23} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_3 \end{bmatrix}.$$

Dengan,

$$D_{a+}^{\alpha} sin(kx)\Big|_{x=b} = k(b-a)^{1-\alpha}\, cos(ka)\, E_{2,2-\alpha}(-k^2(b-a)^2) + (b-a)^{-\alpha}$$

$$sin(ka)\, E_{2,1-\alpha}(-k^2(b-a)^2).$$

$$D_{a+}^{\alpha} cos(kx)\Big|_{x=b} = (b-a)^{-\alpha}\, cos(ka)\, E_{2,1-\alpha}(-k^2(b-a)^2) - k(b-a)^{1-\alpha}$$

$$sin(ka)\, E_{2,2-\alpha}(-k^2(b-a)^2).$$

$$D_{b-}^{\beta} sin(kx)\Big|_{x=a} = -k(b-a)^{1-\beta}\, cos(kb)\, E_{2,2-\beta}(-k^2(b-a)^2) + (b-a)^{-\beta}$$

$$sin(kb)\, E_{2,1-\beta}(-k^2(b-a)^2).$$

$$D_{b-}^{\beta} cos(kx)\Big|_{x=a} = (b-a)^{-\beta}\, cos(kb)\, E_{2,1-\beta}(-k^2(b-a)^2) + k(b-a)^{1-\beta}$$

$$sin(kb)\, E_{2,2-\beta}(-k^2(b-a)^2).$$

4.2 Saran

Dalam tugas akhir ini penulis membahas solusi dari persamaan diferensial orde dua dengan syarat batas berupa turunan *fractional* tipe Riemann-Liouville untuk kasus akar kompleks $\pm iq$. Penulis menyarankan untuk penulis selanjutnya dapat membahas solusi dari persamaan diferensial orde dua dengan syarat batas berupa turunan *fractional* tipe Riemann-Liouville untuk kasus akar kompleks $p \pm iq$.