BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan dari satu (atau beberapa) variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas [9].

Suatu persamaan diferensial biasa linier orde dua adalah suatu persamaan yang berbentuk sebagai berikut [3]:

$$p(x)D^2y(x) + q(x)Dy(x) + r(x)y(x) = g(x) \tag{1.1.1}$$

dimana $D = \dfrac{d}{dx}$ dan $p(x), q(x), r(x)$ adalah fungsi-fungsi dari x dengan $p(x) \neq 0$. Jika $g(x) = 0$, maka (1.1.1) disebut persamaan diferensial biasa linier homogen. Kajian tentang solusi persamaan diferensial (1.1.1) merupakan topik klasik dalam matematika. Eksistensi solusi dari persamaan (1.1.1) telah dijamin, lihat Teorema 3.2.1 dalam[3]. Dalam skripsi ini dikaji bagaimana bentuk solusi dari (1.1.1) pada suatu interval (a,b), $a,b \in \mathbb{R}$ dengan syarat batas memuat turunan *fractional* Riemann-Liouville. Dimana $p(x), q(x), r(x)$ adalah konstanta dengan $p(x) \neq 0$. Kajian ini merupakan elaborasi dari informasi dalam artikel [4].

1.2 Rumusan Masalah

Dalam skripsi ini akan dikaji persamaan diferensial linier orde dua homogen dengan koefisien konstan:

$$D^2 y(x) + k^2 y(x) = 0, \qquad x \in [a,b], k > 0 \tag{1.2.1}$$

dengan syarat batas berupa kombinasi dua dari syarat batas berikut ini :

$$\mu_1 D_{a^+}^{\alpha_1} y(x)\big|_{x=b} + \mu_2 D_{b-}^{\beta_1} y(x)\big|_{x=a} = L_1 \tag{1.2.2}$$

$$\mu_3 D_{a^+}^{\alpha_1} y(x)\big|_{x=b} + \mu_4 D_{a+}^{\alpha_2} y(x)\big|_{x=b} = L_2 \tag{1.2.3}$$

$$\mu_5 D_{b-}^{\beta_1} y(x)\big|_{x=a} + \mu_6 D_{b-}^{\beta_2} y(x)\big|_{x=a} = L_3, \tag{1.2.4}$$

dimana $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in [0,2], \alpha_1 \neq \alpha_2, \beta_1 \neq \beta_2, \mu_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,...,6$, dan $L_j \in \mathbb{R}, j = 1,2,3$, dengan $D_{a^+}^{\alpha_m}, D_{b^-}^{\beta_n}$ adalah turunan *fractional* Riemann-Liouville.

1.3 Batasan Masalah

Dalam tugas akhir ini, permasalahan hanya difokuskan pada persamaan diferensial linier orde dua homogen koefisien konstan dengan akar persamaan karakteristik bilangan kompleks dengan syarat batas memuat turunan *fractional* Riemann-Liouville $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in [0,2], \alpha_1 \neq \alpha_2, \beta_1 \neq \beta_2$.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan ini adalah mengetahui solusi dari persamaan diferensial linier orde dua homogen dengan syarat batas memuat turunan *fractional* Riemann-Liouville.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan ini terdiri dari empat bab yaitu : BAB I Pendahuluan yang memuat latar belakang, rumusan masalah,batasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan. BAB II Landasan teori yang berisi materi-materi dasar dalam penunjang berupa definisi, teorema, dan contoh yang akan digunakan pada pembahasan. BAB III Pembahasan yang berisikan solusi dari persamaan 1.2.1. BAB IV Kesimpulan dari hasil pembahasan.

BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam bab ini akan dibahas beberapa teori yang terkait dengan permasalahan yang akan dibahas pada bab selanjutnya, yaitu fungsi Gamma, fungsi Mittag-Leffler, fungsi Beta, deret Taylor, persamaan diferensial orde dua, dan turunan Riemann-Liouville.

2.1 Fungsi-Fungsi Khusus

2.1.1 Fungsi Gamma

Definisi 2.1.1. [8] *Fungsi Gamma yang dinotasikan dengan* $\Gamma(n)$ *didefinisikan sebagai berikut:*

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx, \; n > 0.$$

Berikut beberapa sifat yang dimiliki oleh fungsi Gamma, yaitu :

1. $\Gamma(1) = 1$

2. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

3. $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$

4. $\Gamma(n+1) = n!$

5. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$

2.1.2 Fungsi Beta

Definisi 2.1.2. [6] *Fungsi Beta didefinisikan sebagai berikut :*

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \ , \ x \in \mathbb{R} \ dan \ p,q \in \mathbb{R}, p > 0, q > 0.$$

Hubungan antara fungsi gamma dan fungsi beta dinyatakan oleh persamaan berikut

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \tag{2.1.1}$$

dimana $p > 0$ dan $q > 0$.

Bukti :

Berdasarkan Definisi 2.1.1 perhatikan bahwa

$$\Gamma(p) = \int_{u=0}^{\infty} u^{p-1}e^{-u}du$$

$$\Gamma(q) = \int_{v=0}^{\infty} v^{q-1}e^{-v}dv.$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_{u=0}^{\infty} u^{p-1}e^{-u}du\right)\left(\int_{v=0}^{\infty} v^{q-1}e^{-v}dv\right)\\ &= \int_{v=0}^{\infty}\int_{u=0}^{\infty} u^{p-1}v^{q-1}e^{-u-v}dudv.\end{aligned}$$

Misal $u = zt$ dan $v = z(1-t)$. Sehingga $u + v = z$ dan $0 < u < \infty, 0 < v < \infty$ mengakibatkan $0 < z < \infty$ dan $0 < t < 1$.

$$\left|J\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{du}{dt} & \dfrac{du}{dz} \\ \dfrac{dv}{dt} & \dfrac{dv}{dz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & t \\ -z & 1-t \end{vmatrix} = z.$$

Akibatnya,

$$dudv = zdtdz.$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_{z=0}^{\infty}\int_{t=0}^{1}(zt)^{p-1}(z(1-t))^{q-1}e^{-u-v}zdtdz\\ &= \int_{z=0}^{\infty} z^{p+q-1}e^{-z}dz\int_{t=0}^{1}t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt\\ &= \Gamma(p+q)B(p,q).\end{aligned}$$

Dengan demikian $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$. ■

2.1.3 Fungsi Mittag-Leffler

Definisi 2.1.3. [1] *Fungsi Mittag-Leffer dua parameter didefinisikan sebagai berikut:*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad \alpha>0, \beta>0, z\in\mathbb{C} \tag{2.1.2}$$

Fungsi Mittag-Leffler adalah deret konvergen yang dapat dibuktikan dengan menggunakan Teorema 2.1.1 dan formula Stirling berikut ini

Teorema 2.1.1. [2] *Misalkan (a_n) adalah suatu barisan di $\mathbb{C}$*

a. Misalkan terdapat $r\in\mathbb{R}$ dengan $r<1$ dan $K\in\mathbb{N}$, sedemikan sehingga

$$|a_n|^{1/n} \leqslant r \qquad \textit{untuk } n \geqslant K,$$

maka Σa_n konvergen mutlak.

b. Jika $K\in\mathbb{N}$, sedemikian sehingga

$$|a_n|^{1/n} \geqslant 1 \qquad \textit{untuk } n \geqslant K,$$

maka Σa_n divergen.

Bukti.

(a) Misalkan terdapat $r<1$ dan $K\in\mathbb{N}$, sedemikan sehingga $n\geqslant K$. Pandang

$$|a_n|^{1/n} \leqslant r < 1 \quad \Rightarrow \quad |a_n| \leqslant r^n < 1.$$

Sehingga

$$\Sigma|a_n| \leqslant \Sigma r^n.$$

Deret Σr^n merupakan deret geometri yang konvergen untuk $0 \leqslant r < 1$,maka dengan menggunakan uji banding $\Sigma|a_n|$ juga konvergen, atau dengan kata lain, Σa_n konvergen mutlak.

(b) Jika $K \in \mathbb{N}$, sedemikan sehingga $n \geqslant K$

$$|a_n|^{1/n} \geqslant 1 \quad \Rightarrow \quad |a_n| \geqslant 1^n = 1$$

Karena $|a_n| \geqslant 1$ untuk semua $n \geqslant K$, berarti bahwa $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$ tidak mungkin sama dengan nol. Maka menurut uji coba suku-n , deret $\Sigma|a_n|$ divergen, dengan kata lain Σa_n divergen. ■

Untuk deret (2.1.2), misalkan $|a_k| = \left|\dfrac{z^k}{\Gamma(k\alpha+\beta)}\right|$, maka $|a_k|^{1/k} = \left|\dfrac{z^k}{\Gamma(k\alpha+\beta)}\right|^{1/k}$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} &= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+\beta)}\right|^{1/k} \\
&= \lim_{k\to\infty} |z^k|^{1/k} \left|\frac{1}{\Gamma(k\alpha+\beta)}\right|^{1/k} \\
&= \lim_{k\to\infty} |z| \left|\frac{1}{\Gamma(k\alpha+\beta)}\right|^{1/k} \\
&= |z| \lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{\Gamma(k\alpha+\beta)}\right|^{1/k}.
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan formula Stirling, yaitu[5]:

$$\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}, \quad \text{untuk} \quad x \to \infty,$$

maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\Gamma(k\alpha+\beta)}\right|^{1/k} &= \left|\frac{k\alpha+\beta}{\Gamma(k\alpha+\beta+1)}\right|^{1/k} \\
&= \left|\frac{k\alpha+\beta}{\left(\dfrac{k\alpha+\beta}{e}\right)^{k\alpha+\beta}\sqrt{2\pi(k\alpha+\beta)}}\right|^{1/k} \\
&= \left|\left(\frac{e}{k\alpha+\beta}\right)^{k\alpha+\beta}(2\pi)^{-1/2}(k\alpha+\beta)^{1/2}\right|^{1/k} \\
&= \left|\left(\frac{e}{k\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta/k}(2\pi)^{-1/2k}(k\alpha+\beta)^{1/2k}\right|.
\end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}|a_k| &= |z|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{\Gamma(k\alpha+\beta)}\right|^{1/k} \\
&= |z|\lim_{k\to\infty}\left|\left(\frac{e}{k\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta/k}(2\pi)^{-1/2k}(k\alpha+\beta)^{1/2k}\right| \\
&= |z|.0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Karena $|a_k| = 0 < 1$,maka $\sum a_k$ konvergen mutlak.

2.2 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan bentuk dari fungsi matematika sebagai jumlah tak hingga dari suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut pada suatu titik.

Teorema 2.2.1. [7] *Misalkan f adalah fungsi yang turunan ke-(n+1)-nya ada untuk setiap x pada selang terbuka I yang mengandung a,maka untuk setiap x di dalam I berlaku*

$$f(x) = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x) \quad (2.2.1)$$

dengan sisa $R_n(x)$ dinyatakan oleh

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

dengan ξ *adalah titik antara* x *dan* a.

Bukti:

Misalkan terdapat t terletak antara x dan a. Didefinisikan fungsi F di I sebagai berikut:

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f^{(2)(t)}}{2!}(x-t)^2 - ... - \frac{f^{(n)(t)}}{n!}(x-t)^n. \quad (2.2.2)$$

Sehingga

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}}{n!}(x-t)^n.$$

Selanjutnya didefinisikan fungsi G di I sebagai berikut:

$$G(t) = F(t) - \left(\frac{x-t}{x-a}\right)^{n+1} F(a)$$

untuk $t \in I$, maka $G(x) = G(a) = 0$. Karena G mempunyai turunan pada interval yang titik ujungnya x dan a, maka menurut Teorema Rolle[2] terdapat titik ξ diantara titik x dan a sedemikian sehingga $G'(\xi) = 0$.

$$G'(\xi) = F'(\xi) + (n+1)\frac{(x-\xi)^n}{(x-a)^{n+1}}F(a) = 0. \quad (2.2.3)$$

Selanjutnya subtitusi $F(\xi)$ ke persamaan (2.2.3, diperoleh:

$$F(a) = \frac{f^{(n+1}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Dengan mensubtitusikan $F(a)$ ke persamaan (2.2.2) diperoleh

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

■

Jika $R_n \to 0$ untuk $n \to 0$, maka diperoleh:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{2.2.4}$$

yang dikenal sebagai deret Taylor. Jika a=0 pada deret (2.2.4), maka deret tersebut disebut Deret Mclaurin.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-a)^k. \tag{2.2.5}$$

Berikut beberapa fungsi dalam bentuk deret Mclaurin:

1. Misalkan $f(x) = cos(x)$, maka

$f^{'}(x) = -sin(x)$

$f^{(2)}x) = -cos(x)$

$f^{(3)}(x) = sin(x)$

$f^{(4)}(x) = cos(x)$

$\vdots$

Sehingga deret Mclaurin dari $f(x) = cos(x)$ adalah

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k \\
&= f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + ... \\
&= cos(0) + \frac{cos^{(1)(0)}}{1!}x^1 + \frac{cos^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{cos^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{cos^{(4)}(0)}{4!}x^4 + ... \\
&= cos(0) + \frac{-sin(0)}{1!}x^1 + \frac{-cos(0)}{2!}x^2 + \frac{sin^{(}0)}{3!}x^3 + \frac{cos(0)}{4!}x^4 + ... \\
&= 1 + 0 + \frac{(-1)x^2}{2!} + 0 + \frac{(1)x^4}{4!} + ... \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{\Gamma(2k+1)}.
\end{aligned}$$

2. Misalkan $f(x) = sin(x)$, maka

$f^{'}(x) = cos(x)$

$f^{(2)}x) = -sin(x)$

$f^{(3)}(x) = -cos(x)$

$f^{(4)}(x) = sin(x)$

$f^{(4)}(x) = cos(x)$

$\vdots$

Sehingga deret Mclaurin dari $f(x) = sin(x)$ adalah

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k \\
&= f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + dfracf^{(5)}(0)5!x^5 \\
&= sin(0) + \frac{sin^{(1)(0)}}{1!}x^1 + \frac{sin^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{sin^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{sin^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{sin^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \\
&\quad ... \\
&= sin(0) + \frac{cos(0)}{1!}x^1 + \frac{-sin(0)}{2!}x^2 + \frac{-cos^(0)}{3!}x^3 + \frac{sin(0)}{4!}x^4 + \frac{cos(0)}{5!}x^5 + ... \\
&= 0 + 1 + 0 + \frac{(-1)x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + ... \\
&= 1 + \frac{(-1)x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{\Gamma(2k+2)}.
\end{aligned}
$$

2.3 Persamaan Diferensial Orde Dua

Persamaan diferensial orde dua adalah persamaan diferensial yang turunan tertingginya berorde dua. Secara umum persamaan diferensial biasa linier orde dua dapat ditulis dalam bentuk[3] :

$$p(x)D^2y(x) + q(x)Dy(x) + r(x)y(x) = g(x), \tag{2.3.1}$$

dimana *p(x)*,*q(x)*,*r(x)* adalah koefisien dari persaman diferensial tersebut.

Jika *g(x)=0*, maka persamaan (2.3.1) disebut persamaan diferensial biasa orde dua homogen. Selanjutnya dengan mengganti $p(x) = a_2, q(x) = a_1$, dan $r(x) = a_0$ maka persamaan (2.3.1) dapat ditulis kembali dalam bentuk [3]

$$a_2 D^2 y(x) + a_1 D y(x) + a_0 y(x) = 0. \tag{2.3.2}$$

Persamaan (2.3.2) dapat diselesaikan dengan memisalkan $y = e^{rx}$, sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} a_2 D^2 e^{rx} + a_1 D e^{rx} + a_0 (e^{rx}) &= 0 \\ a_2 r^2 e^{rx} + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} &= 0 \\ e^{rx}(a_2 r^2 + a_1 r + a_0) &= 0. \end{aligned}$$

Karena $e^{rx} \neq 0$, maka $y = e^{rx}$ merupakan penyelesaian persamaan (2.3.2) jika dan hanya jika r memenui persamaan karakteristik,

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0. \tag{2.3.3}$$

Penyelesaian dari persamaan karakteristik (2.3.3) adalah

$$r_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \text{ dan } r_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}.$$

Adapun bentuk-bentuk penyelesaian persamaan karakteristik adalah sebagai berikut [3]:

1. Jika $a_1^2 - 4a_2a_0 > 0$, maka akan diperoleh akar-akar riil berbeda $(r_1 \neq r_2)$ dan solusi berupa:

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.3.4}$$

2. Jika $a_1^2 - 4a_2a_0 = 0$,maka akan diperoleh akar-akar riil sama $(r_1 = r_2)$ dan solusi berupa:

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + x C_2 e^{r_2 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.3.5}$$

3. Jika $a_1^2 - 4a_2a_0 < 0$, maka akan diperoleh akar-akar kompleks ($r_{1,2} = p \pm iq$) dan solusi berupa:

$$y(x) = e^{px}(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.3.6}$$

Contoh:

Selesaikan persamaan diferensial $D^2y(x) + y(x) = 0$.

Penyelesaian:

Diketahui:

$$D^2y(x) + y(x) = 0. \tag{2.3.7}$$

Misal

$$y(x) = e^{rx}; \quad Dy(x) = r\, e^{rx}; \quad D^2y(x) = r^2\, e^{rx}. \tag{2.3.8}$$

Substitusi (2.3.7) ke (2.3.8), sehingga diperoleh :

$r^2\, e^{rx} + e^{rx} = 0$

$e^{rx}(r^2 + 1) = 0$

Karena $e^{rx} \neq 0$, haruslah $r^2 + 1 = 0$.

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik berupa :

$r^2 + 1 = 0$

$r^2 = -1$

$r = \pm i$.

Diperoleh akar-akar berupa $r_1 = i, r_2 = -i$, maka solusi PD :

$$y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x).$$

2.4 Turunan *Fractional* Riemann-Liouville

Definisi 2.4.1. [1] *Turunan fractional Riemann-Liouville kiri orde* α *dan kanan orde* β *berturut-turut didefinisikan sebagai berikut:*

$$D_{a^+}^{\alpha} y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \dfrac{d^n}{dx^n} \displaystyle\int_a^x \dfrac{y(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, & \textit{untuk } \ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0, n = [\alpha] + 1 \\ D^n y(x), & \textit{untuk } \ \alpha = n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

$$D_{b^-}^{\beta} y(x) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{\Gamma(n-\beta)} \dfrac{d^n}{dx^n} \displaystyle\int_x^b \dfrac{y(t)}{(t-x)^{\beta-n+1}} dt, & \textit{untuk } \ \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0, n = [\beta] + 1 \\ (-1)^n D^n y(x), & \textit{untuk } \ \beta = n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

dimana $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ dan $[\alpha]$ adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan α, $[\beta]$ adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan β.

Sifat-sifat berikut berlaku untuk turunan *fractional* Riemann-Liouville kiri dan kanan:

Sifat 1

$$D^{\alpha}(\lambda f(x)) = \lambda D^{\alpha} f(x)$$

Bukti:

Dengan menggunakan Definisi 2.4.1 sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} D^{\alpha}(\lambda f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{\lambda f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{\lambda f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \\ &= \lambda D^{\alpha} f(x) \qquad \blacksquare. \end{aligned}$$

Sifat 2

$$D^{\alpha}\big(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)\big) = D^{\alpha}(\lambda_1 f(x)) + D^{\alpha}(\lambda_2 g(x))$$

Bukti:

Dengan menggunakan Definisi 2.4.1 sehingga diperoleh [8]

$$\begin{aligned} D^{\alpha}(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int\limits_a^x \frac{\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int\limits_a^x \frac{\lambda_1 f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int\limits_a^x \frac{\lambda_2 g(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \\ &= D^{\alpha}(\lambda_1 f(x)) + D^{\alpha}(\lambda_2 g(x)) \qquad \blacksquare. \end{aligned}$$

Dengan mengggunakan Definisi 2.4.1 dapat ditentukan turunan beberapa fungsi sebagai berikut:

1. Misalkan $f(x) = (x-a)^m$, $m > -1$, maka turunan *fractional* Riemann-Liouville kiri orde α adalah

$$D^{\alpha}_{a+}(x-a)^m = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (t-a)^m (x-t)^{n-\alpha-1} dt$$

Misal: $v = \dfrac{t-a}{x-a}$, maka $t = v(x-a) + a$ dan $dt = (x-a)dv$, sehingga

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a+}(x-a)^m &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^1 (v(x-a) + a - a)^m (x - v(x-a) - a)^{n-\alpha-1} \\ &\quad (x-a)dv \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^1 v^m (x-a)^m (1-v)^{n-\alpha-1} (x-a)^{n-\alpha-1} (x-a) dv \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 v^m (1-v)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{dx^n} (x-a)^{m+n-\alpha} dv \end{aligned}$$

Karena $\dfrac{d^n}{dx^n} x^{\lambda} = \dfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-n+1)} x^{\lambda-n}$,maka

$$D^{\alpha}_{a+}(x-a)^m = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\Gamma(m+n-\alpha+1)}{(m-\alpha+1)} (x-a)^{m-\alpha} \int_0^1 v^m (1-v)^{n-\alpha-1} dv$$

Berdasarkan definisi 2.1.2 dan persamaan 2.1.1

$$\begin{aligned}\int_0^1 v^m(1-v)^{n-\alpha-1}dv &= B(m+1, n-\alpha)\\ &= \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(m+n-\alpha+1)}.\end{aligned}$$

Sehingga,

$$D_{a+}^{\alpha}(x-a)^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)}(x-a)^{m-\alpha}, \qquad \alpha \geqslant 0,\ m > -1. \qquad (2.4.1)$$

2. Misalkan $f(x) = (b-x)^m,\ m > -1$, maka turunan *fractional* Riemann-Liouville kanan orde β adalah

$$D_{b-}^{\beta}(b-x)^m = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\beta)}\frac{d^n}{dx^n}\int_x^b (b-t)^m(t-x)^{n-\beta-1}dt$$

Misal: $v = \dfrac{b-t}{b-x}$, maka $t = v(b-x)+b$ dan $dt = -(b-x)dv$, sehingga

$$\begin{aligned}D_{b-}^{\beta}(b-x)^m &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\beta)}\frac{d^n}{dx^n}\int_1^0 (v(b-x)+b-b)^m(b-v(b-x)-x)^{n-\beta-1}\\ &\quad(-(b-x))dv\\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\beta)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^1 v^m(b-x)^m(1-v)^{n-\beta-1}(b-x)^{n-\beta-1}(b-x)dv\\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\beta)}\int_0^1 v^m(1-v)^{n-\beta-1}\frac{d^n}{dx^n}(b-x)^{m+n-\beta}dv\end{aligned}$$

Karena $\dfrac{d^n}{dx^n}x^{\lambda} = \dfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-n+1)}x^{\lambda-n}$,maka

$$D_{b-}^{\beta}(b-x)^m = \frac{(-1)^{2n}}{\Gamma(n-\beta)}\frac{\Gamma(m+n-\beta+1)}{(m-\beta+1)}(b-x)^{m-\beta}\int_0^1 v^m(1-v)^{n-\beta-1}dv$$

Berdasarkan definisi 2.1.2 dan persamaan 2.1.1

$$\begin{aligned}\int_0^1 v^m(1-v)^{n-\beta-1}dv &= B(m+1, n-\beta)\\ &= \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n-\beta)}{\Gamma(m+n-\beta+1)}.\end{aligned}$$

Sehingga,

$$D_{b-}^{\beta}(b-x)^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\beta)}(b-x)^{m-\beta} \quad \beta \geqslant 0,\ m > -1. \qquad (2.4.2)$$