MASALAH NILAI EIGEN DIPERUMUM

TESIS

WIDYA RESTU YANI
06215073

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
2008

Masalah Nilai Eigen Diperumum

Oleh : Widya Restu Yani

(Di bawah bimbingan Muhafzan, Ph.D dan Zulakmal, M.Si)

RINGKASAN

Secara umum, masalah nilai eigen adalah menentukan skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ dan vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{x} \neq 0$ yang memenuhi hubungan :

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

Skalar λ disebut sebagai nilai eigen dari matriks A dan vektor $\vec{x}$ disebut vektor eigen yang berkaitan dengan nilai eigen λ.

Pada beberapa masalah seperti teknik dan fisika, diperlukan mengganti matriks identitas dalam persamaan masalah nilai eigen dengan suatu matriks B berukuran $n \times n$. Sehingga persamaan dapat ditulis menjadi :

$$A\vec{x} = \lambda B\vec{x}$$

Berdasarkan hal itu maka penulis melakukan penelitian ini.

Tujuan penelitian ini adalah menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks pencil $(A - \lambda B)$. Dalam tesis ini akan diperkenalkan beberapa pengertian dari nilai eigen dan vektor eigen diperumum. Selain itu juga akan dipaparkan prosedur untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen diperumum tersebut.

Penelitian ini penulis mulai dari bulan Desember 2007 sampai bulan Juni 2008. Dalam melakukan penelitian ini penulis melakukan studi kepustakaan dan memulai dengan meninjau permasalahan, mengumpulkan teori-teori yang didapat sebagai penunjang untuk menyelesaikan permasalahan tersebut dan terakhir menarik kesimpulan dari permasalah yang telah dibahas.

Adapun langkah kerja dari penelitian adalah:

1. Meninjau konsep-konsep dasar matriks.
2. Meninjau tentang nilai eigen dan vektor eigen pada matriks.
3. Menyelesaikan masalah nilai eigen diperumum dengan teori-teori yang berhubungan dengan pemecahan masalah tersebut.
4. Menyimpulkan hasil yang diperoleh.

Misalkan dari persamaan $A\vec{x} = \lambda B\vec{x}$ dibentuk suatu polinomial karakteristik yaitu:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda B),$$

nilai eigen diperoleh jika $p(\lambda) = \det(A - \lambda B) = 0$.

Jika $\deg p(\lambda) = k$, menyatakan derjat dari $p(\lambda)$ dengan $k \leq n$, maka:

1. Jika B tak singular dan $k = n$, maka nilai eigen diperumum dari pencil (A, B) adalah akar dari $p(\lambda)$.
2. Jika B singular sebut $rank\, B = r$ dan $k < n$ dengan $k < r < n$, maka didefinisikan 2 jenis nilai eigen diperumum untuk pencil (A, B), yaitu:
   a. Nilai eigen hingga (sebanyak *k*) yang adalah akar dari $p(\lambda)$. Nilai eigen ini disebut dengan modes hingga.
   b. Nilai eigen tak hingga (sebanyak *n-k*). Nilai eigen ini disebut sebagai modes tak hingga.

Ada lagi 2 jenis bentuk mode tak hingga yaitu:

- Mode tak hingga yang berkaitan dengan vektor eigen diperumum $\vec{v}$ yang memenuhi:

$$B\vec{v} = 0$$

Mode tak hingga ini disebut sebagai mode non dynamik, dan ada sebanyak n-r .

- Misalkan $\vec{v}^j$ memenuhi:

$$B\vec{v}^j = 0$$

Mode tak hingga yang berkaitan dengan eigen vektor diperumum $\vec{v}^j$ yang memenuhi:

$$B\vec{v}^j = A\vec{v}^{j+1} \quad , \ j \geq 2 .$$

Mode ini disebut sebagai mode impulsive. Dan ada sebanyak r-k.

MASALAH NILAI EIGEN DIPERUMUM

Oleh

WIDYA RESTU YANI
06215073

Tesis

Sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Magister Sains
pada Program Pascasarjana Universitas Andalas

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
2008

Jika bersedih, panggillah jiwamu dengan harapan sebagai janji.
Karena kebaikan bagi jiwa adalah adanya janji.
Jadikan harapanmu menjadi perisai atas serangan putus asamu,
hingga waktu akan menghapus kesedihan itu.
Kesedihan itu tidak akan abadi,
seperti juga kesenangan tidak akan lestari.
Kalau saja bukan karena hal yang mempengaruhi jiwa,
pasti tak akan ada kehidupan bagi orang yang terjaga.

Kupersembahkan karya ini untuk :

ibunda Rusyda dan ayahnda Roestam (Alm), yang telah memberikan limpahan kasih sayang, kesabaran dan nasehat-nasehat yang berguna pada ananda. Semoga ibunda dan ayahnda bangga dengan prestasi yang ananda capai ini

suami tercinta Robby Sukma yang telah memberikan izin wid untuk melanjutkan pendidikan dan terus memberikan semangat dan motivasi sehingga wid dapat menyelesaikan pendidikan tepat waktu. Terima kasih untuk kasih sayang yang telah abang berikan. Semoga Allah memberikan kebahagiaan dan menjaga kasih sayang kita.

yang tersayang anakku Nasywa de Aniela (Almh). Mama dan papa sangat kehilanganmu anakku. Mama sedih... Tapi mama yakin, Allah pasti memberikan yang terbaik bagi kita semua. Sampai kapanpun kamu selalu ada dihati mama...

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Saya menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa segala pernyataan dalam tesis saya yang berjudul MASALAH NILAI EIGEN DIPERUMUM merupakan gagasan atau hasil penelitian saya sendiri dengan bimbingan komisi pembimbing, kecuali yang dengan jelas ditunjukkan rujukannya. Tesis ini belum pernah diajukan untuk memperoleh gelar pada program sejenis di perguruan tinggi lain. Semua data dan informasi yang digunakan telah dinyatakan secara jelas dan dapat diperiksa kebenarannya.

Padang, Juli 2008

Widya Restu Yani
BP. 06215073

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 26 Januari 1975 di Batusangkar, sebagai anak ketujuh dari Ayah Roestam. M (alm) dan Ibu Rusyda. Penulis menamatkan SD di Batusangkar pada tahun 1987, SMP di Batusangkar pada tahun 1990 dan SMA di Batusangkar pada tahun 1993. Penulis memperoleh gelar Sarjana Pendidikan jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FPMIPA) IKIP Padang tahun 1999.

Sejak tahun 2005 sampai sekarang penulis ditugaskan sebagai guru Matematika di SMA Negeri 1 Sungayang. Pada tahun 2006 memperoleh kesempatan meneruskan pendidikan pada Program Pascasarjana Universitas Andalas.

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan Rahmat dan hidayahNya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini. Tesis ini ditulis berdasarkan penelitian yang berjudul MASALAH NILAI EIGEN DIPERUMUM.

Pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Dinas Pendidikan Provinsi Sumatera Barat yang telah memberikan kesempatan dan biaya pada penulis dalam melanjutkan pendidikan ke Program Pascasarjana Universitas Andalas.
2. Prof. Dr. Ir. H. Novirman Jamarun, M.Sc, sebagai Direktur Program Pascasarjana Universitas Andalas.
3. Jenizon, M.Si sebagai ketua jurusan Matematika.
4. Muhafzan, Ph.D, sebagai pembimbing 1.
5. Zulakmal,M.Si sebagai pembimbing 2.
6. Dr. Susila Bahri, M.Sc, Nova Noliza Bakar, M.Si dan Haripamyu, M.Si sebagai dosen penguji.
7. Ibunda dan suami tercinta Rusyda dan Robby Sukma yang telah memberikan dorongan dan doanya untuk keberhasilan penulis.
8. Drs. H. Amrisman sebagai Kepala SMA Negeri 1 Sungayang.
9. Staf pengajar dan pegawai tata usaha Jurusan Matematika Universitas Andalas.

Akhir kata tidak lupa ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada teman-teman yang tidak dapat disebutkan satu persatu di Program Pascasarjana

Guru Matematika Universitas Andalas dan teman-teman di SMA Negeri 1 Sungayang yang telah turut serta memberikan semangat, motivasi dan bantuan lainnya kepada penulis. Selanjutnya penulis berharap semoga hasil penelitian yang dituangkan dalam tesis ini dapat bermanfaat bagi berbagai pihak.

Padang, Juli 2008

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Secara umum, masalah menentukan skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ dan vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{x} \neq 0$ yang memenuhi hubungan:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}, \tag{1.1.1}$$

untuk suatu matriks $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, dimana $\mathbb{C}^{n\times n}$ menyatakan himpunan matriks kompleks berukuran $n\times n$, sering disebut sebagai masalah nilai eigen (Leon, 2001). Dalam hal ini skalar λ disebut sebagai nilai eigen dari matriks A dan vektor $\vec{x}$ disebut vektor eigen yang berkaitan dengan nilai eigen λ.

Supaya λ adalah nilai eigen dari matriks A, maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan $(\lambda I - A)\vec{x} = 0$. Ini terpenuhi jika dan hanya jika:

$$\det(\lambda I - A) = 0. \tag{1.1.2}$$

Persamaan (1.1.2) disebut sebagai persamaan karakteristik dari A.

Dalam beberapa masalah, seperti masalah fisika dan teknik, diperlukan mengganti matriks identitas dalam persamaan (1.1.1) dengan suatu matriks B berukuran $n\times n$. Sehingga persamaan (1.1.1) dapat ditulis menjadi :

$$A\vec{x} = \lambda B\vec{x}, \tag{1.1.3}$$

atau dapat ditulis

$$(A - \lambda B)\vec{x} = 0. \tag{1.1.4}$$

Bentuk $(A - \lambda B)$ disebut dengan matriks pencil dari persamaan (1.1.3), dan sering ditulis sebagai (A,B). Polinomial $p(\lambda) = \det(A - \lambda B)$ disebut sebagai polinomial karakteristik dari pencil (A, B). Masalah utama dalam persamaan (1.1.4) adalah mendapatkan skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ dan vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{x} \neq 0$ sedemikian sehingga persamaan (1.1.4) dipenuhi. Masalah ini disebut sebagai masalah nilai eigen diperumum. Skalar λ disebut nilai eigen diperumum dari matriks pencil (A, B) dan vektor $\vec{x}$ disebut vektor eigen diperumum dari matriks pencil (A, B) (Fuller, 1967). Tentu saja, nilai eigen diperumum tersebut merupakan akar dari $p(\lambda)$.

Pencil (A, B) disebut regular jika $\det(A - \lambda B) \neq 0$ untuk suatu $\lambda \in \mathbb{C}$, dan dikatakan tak regular jika $\det(A - \lambda B) = 0$ untuk setiap $\lambda \in \mathbb{C}$.

Berbeda dengan masalah nilai eigen biasa, dimana persamaan karakteristiknya berderajat *n*, maka polinomial karakteristik untuk masalah nilai eigen diperumum tidak selalu berderajat *n*. Dalam hal derajat polinomial tersebut kurang dari *n*, maka akan memunculkan beberapa pengertian nilai eigen dan vektor eigan yang agak berbeda dari yang sudah dikenal.

Dalam tesis ini akan diperkenalkan beberapa pengertian dari nilai eigen dan vektor eigen yang disebutkan diatas. Selain itu juga akan dipaparkan prosedur untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen diperumum tersebut.

1.2 Perumusan Masalah

Diberikan matriks $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, bagaimana menentukan skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ dan vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{x} \neq 0$, yang memenuhi hubungan:

$$A\vec{x} = \lambda B\vec{x}.$$

Dengan asumsi bahwa matriks pencil (A, B) regular.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks pencil (A, B).

1.4 Manfaat Penelitian

Masalah nilai eigen banyak digunakan dalam berbagai bidang, seperti fisika, teknik dan lain-lain, sehingga masalah nilai eigen diperumum yang merupakan perluasan dari masalah nilai eigen juga bermanfaat dalam menyelesaikan berbagai persoalan. Selanjutnya pembahasan ini diharapkan dapat menjadi bahan masukan untuk penelitian selanjutnya dalam mengembangkan atau memperluas cakupan penelitian ini.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dikemukakan pengertian dan konsep dasar yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai eigen. Teori dasar tentang matriks menjadi landasan teori yang penting dalam memahami pembahasan tentang masalah nilai eigen yang diperumum. Berikut defenisi-defenisi serta teorema-teorema yang mendukung penyelesaian masalah pada penelitian ini.

2.1 Teori Dasar Matriks

Definisi 2.1.1 (Anton, 1998)

Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Sebuah matriks mempunyai ukuran. Ukuran ini diperoleh berdasarkan banyaknya baris dan kolom dalam matriks tersebut. Suatu matriks A yang berukuran $m \times n$ dapat ditulis dengan $A_{m\times n}$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dimana a_{ij} adalah elemen-elemen dari matriks yang terletak dibaris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A, dengan $i = 1,2,\ldots,m$ dan $j = 1,2,\ldots,n$.

Definisi 2.1.2 (Leon, 2001)

Matriks identitas adalah matriks $I = (a_{ij})$ berukuran $n \times n$, dimana

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & jika \quad i = j \\ 0 & jika \quad i \neq j \end{cases}$$

Suatu matriks A berukuran $n \times n$ disebut matriks diagonal jika $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$. (Leon, 2001)

Perkalian suatu matriks A_{ij} dengan dengan suatu konstanta $k \in \Re$ adalah perkalian entri-entri matriks A_{ij} dengan konstanta $k \in \Re$.

$$kA_{ij} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1j} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{ij} \end{pmatrix}$$

Definisi 2.1.3 (Leon, 2001)

Transpos dari suatu matriks A berukuran $m \times n$, adalah matriks B berukuran $n \times m$ yang didefinisikan dengan:

$$b_{ji} = a_{ij}$$

untuk $j = 1,....,n$ dan $i = 1,....,m$. Transpos dari A dinyatakan oleh A^T

Contoh:

a. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, maka $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

b. Jika $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, maka $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

2.2 Determinan Matriks

Pada setiap matriks A berukuran $n \times n$, dapat dikaitkan suatu skalar, yaitu $\det(A)$ yang nilainya akan menentukan apakah matriks A tersebut singular atau tak singular. Determinan matriks ini dipergunakan untuk menentukan invers dari suatu matriks.

Definisi 2.2.1 (Leon, 2001)

Determinan dari matriks $(n-1)\times(n-1)$ yang dibentuk dengan menghilangkan baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dari matriks $A = a_{ij}$ berukuran $n \times n$ disebut dengan minor dari a_{ij}, dan dinotasikan dengan M_{ij}. Dimana $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ disebut dengan kofaktor dari a_{ij}.

Definisi 2.2.2 (Leon, 2001)

Determinan dari matriks *A* berukuran $n \times n$ didefinisikan dengan :

$$|A| = \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j} ,$$

yaitu hasil penjumlahan elemen-elemen pada baris pertama yang dikalikan dengan masing-masing kofaktornya.

Dari definisi, secara umum determinan suatu matriks dapat ditinjau sebagai berikut:

Kasus 1. Matriks 1×1

Jika $A = (a)$ adalah matriks 1×1, maka $\det(A) = a$.

Kasus 2. Martiks 2×2

Misalkan:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12},$$

dengan A_{11} dan A_{12} masing-masing adalah kofaktor dari a_{11} dan a_{12}. Sehingga

$$\det(A) = a_{11}\det[a_{22}] - a_{12}\det[a_{21}]$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Kasus 3. Matriks 3×3

Misalkan:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$\det(A) = a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

Demikian seterusnya untuk matriks berukuran $n \times n$.

Jika suatu matriks nilai determinannya adalah nol, maka matriks tersebut disebut matriks singular.

Contoh :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det P = (1 \times 6) - (2 \times 3)$$

$$\det P = 6 - 6 = 0$$

2.3 Invers Matriks

Definisi 2.3.1 (Anton, 1998)

Jika A adalah matriks kuadrat dan jika kita dapat mencari matriks B sehingga $AB = BA = I$, maka A dikatakan dapat dibalik (invertible) dan B dinamakan invers dari A.

Definisi 2.3.2 (Leon, 2001)

Suatu matriks $n \times n$ dikatakan singular jika tidak memiliki invers.

2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai eigen dari suatu matriks A adalah suatu bilangan λ real atau kompleks. Nilai eigen dan vektor eigen tersebut didefenisikan sebagai berikut.

Definisi 2.4.1 (Anton, 1998)

Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$, maka vektor tak nol $\vec{x}$ didalam R^n dinamakan vektor eigen dari A bila ada skalar λ sehingga $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Sedangkan λ dalam hal ini disebut nilai eigen yang bersesuaian dengan A.

Secara umum masalah nilai eigen dapat ditulis sebagai:

$$(A - \lambda I)\vec{x} = 0$$

atau dalam bentuk lengkapnya adalah:

$$\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad & \vdots \\
a_{n2}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0
\end{aligned}$$

Untuk menentukan nilai eigen suatu matriks A yang berukuran $n \times n$ maka $\det(A - \lambda I) = 0$. Persamaan ini disebut dengan persamaan karakteristik. Supaya λ menjadi nilai eigen dari A, maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan karaktristik ini.

Setelah nilai eigen (λ) ditentukan, maka vektor eigen yang berkaitan dengan nilai eigen tersebut dapat dicari dengan persamaan $(A - \lambda I)\vec{x} = 0$. Dengan menggunakan eliminasi Gauss maka vektor eigen dapat ditentukan. Vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan λ adalah vektor-vektor tak nol.

Contoh 1

Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Penyelesaian:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

Maka persamaan karakteristik dari A adalah:

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 12 = 0$$

Dari persamaan diperoleh:

$$\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda_1 = 4 \text{ dan } \lambda_2 = -3$$

Inilah nilai eigen dari matriks A.

Vektor eigen dari matriks A adalah vektor $\vec{x}$ yang berkaitan dengan $\lambda_1 = 4$ dan $\lambda_2 = -3$. Untuk $\lambda_1 = 4$ diperoleh:

$$(A-4I)\vec{x}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0.$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss diperoleh:

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0,$$

sehingga $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$. Artinya semua kelipatan dari (2,1) adalah vektor eigen dari $\lambda_1=4$. Dengan cara yang sama untuk $\lambda_2=-3$ diperoleh $\vec{x}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}$. Artinya semua kelipatan dari (-1,3) adalah vektor eigen untuk $\lambda_2=-3$.

Solusi nilai eigen dan vektor eigen yang dihasilkan diatas dapat dicocokkan kebenarannya dengan mensubstitusikan hasil tersebut kedalam persamaan $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$. Untuk nilai eigen pertama dan vektor eigen yang dihasilkannya, persamaannya adalah:

$$A\vec{x}_1=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}\alpha\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}8\\ 4\end{pmatrix}=4\alpha\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\lambda_1\vec{x}_1$$

Hasilnya sesuai dengan yang diharapkan. Pencocokan ini dapat dilakukan untuk λ_2 dan $\vec{x}_2$.

Contoh 2

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A=\begin{pmatrix}20 & -4 & 8\\ -40 & 8 & -20\\ -60 & 12 & -26\end{pmatrix}$

Penyelesaiannya:

$$(A-\lambda I)=\begin{pmatrix} 20 & -4 & 8 \\ -40 & 8 & -20 \\ -60 & 12 & -26 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 20 & -4 & 8 \\ -40 & 8 & -20 \\ -60 & 12 & -26 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 20-\lambda & -4 & 8 \\ -40 & 8-\lambda & -20 \\ -60 & 12 & -26-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A)=\lambda^3-2\lambda^2+8\lambda$$

$$\lambda^3-2\lambda^2+8\lambda=0$$

$$(\lambda-0)(\lambda-4)(\lambda+2)=0$$

Diperoleh nilai eigen $\lambda_1=4$, $\lambda_2=0$ dan $\lambda_3=-2$. Untuk $\lambda_1=4$, vektor eigennya memenuhi $(A-4I)\vec{x}=0$.

$$(A-4I)=\begin{pmatrix} 20 & -4 & 8 \\ -40 & 8 & -20 \\ -60 & 12 & -26 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 16 & -4 & 8 \\ -40 & 4 & -20 \\ -60 & 12 & -30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 16 & -4 & 8 \\ -40 & 4 & -20 \\ -60 & 12 & -30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0.$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss diperoleh:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

sehingga vektor eigen yang berkaitan dengan $\lambda_1 = 4$ adalah $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dengan proses yang sama untuk $\lambda = 0$ diperoleh nilai eigen $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan untuk $\lambda = -2$ diperoleh nilai eigen $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nilai eigen dari suatu matriks dapat berupa bilangan kompleks, karena suatu polinom nyata mungkin saja mempunyai akar-akar yang kompleks.

Contoh 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

Persamaan diatas menghasilkan nilai eigen $\lambda_1 = i$ dan $\lambda_2 = -i$. Untuk $\lambda_1 = i$, vektor eigennya memenuhi $(A - iI)\vec{x} = 0$.

$$(A - iI) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$(A - iI)\vec{x} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss diperoleh:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

sehingga vektor eigen yang berkaitan dengan $\lambda_1 = i$ adalah $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Selanjutnya dengan proses yang sama diperoleh vektor eigen yang berkaitan dengan $\lambda_2 = -i$ yaitu $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

Selanjutnya pada masalah nilai eigen, jika A adalah matriks $n \times n$, maka pernyataan berikut ekivalen satu sama lain:

1. λ adalah nilai eigen dari matriks A
2. Sistem persamaan $(\lambda I - A)\vec{x} = 0$ mempunyai pemecahan yang tak trivial
3. Ada vektor tak nol x didalam R^n sehingga $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$
4. λ adalah pemecahan real atau kompleks dari persamaan karakteristik det.$(\lambda I - A) = 0$.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini penulis mulai dari bulan Desember 2007 sampai bulan juli 2008. Sedangkan tempat penelitian adalah perpustakaan.

3.2 Langkah-langkah Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian deskriptif yang menggunakan analisa teori yang relevan dengan masalah yang dibahas dan berlandaskan pada studi kepustakaan. Dalam melakukan penelitian ini penulis memulai dengan meninjau permasalahan, mengumpulkan teori-teori yang didapat sebagai penunjang untuk menyelesaikan permasalahan tersebut dan terakhir menarik kesimpulan dari permasalah yang telah dibahas.

Adapun langkah kerja dari penelitian adalah:

1. Meninjau konsep-konsep dasar matriks.
2. Meninjau tentang nilai eigen dan vektor eigen pada matriks.
3. Menyelesaikan masalah nilai eigen diperumum dengan teori-teori yang berhubungan dengan pemecahan masalah tersebut.
4. Menyimpulkan hasil yang diperoleh.

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Masalah Nilai Eigen Diperumum

Misalkan $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ seperti yang telah dikemukakan sebelumnya, masalah nilai eigen diperumum adalah masalah menentukan skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ dan vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{x} \neq 0$ yang memenuhi hubungan:

$$A\vec{x} = \lambda B\vec{x} . \tag{4.1.1}$$

Dalam bentuk lain persamaan (4.1.1) dapat juga ditulis sebagai:

$$(A - \lambda B)\vec{x} = 0$$

Asumsikan bahwa pencil (A, B) regular, dan perhatikan polinomial karakteristik dari pencil (A, B), yaitu:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda B) ,$$

dan nyatakan $\deg p(\lambda)$ sebagai derajat dari $p(\lambda)$.

Definisi 4.1.1 (Katayama, 1992)

Misalkan $\deg p(\lambda) = k$, dengan $k \leq n$

1. Jika matriks B tak singular dan $k = n$, maka nilai eigen diperumum dari pencil (A, B) adalah akar dari $p(\lambda)$, dan sama dengan nilai eigen dari matriks $B^{-1}A$.
2. Jika matriks B singular, sebut $rank\, B = r$ dan $k < n$ dengan $k < r < n$, maka didefinisikan 2 jenis nilai eigen diperumum untuk pencil (A, B), yaitu:
   a. Nilai eigen hingga (sebanyak k) yang adalah akar dari $p(\lambda)$. Nilai eigen ini disebut dengan mode hingga.

b. Nilai eigen tak hingga (sebanyak *n-k*). Nilai eigen ini disebut sebagai mode tak hingga. Ada 2 jenis mode tak hingga yaitu:

- Mode tak hingga yang berkaitan dengan vektor eigen diperumum $\vec{v}$ yang memenuhi:

$$B\vec{v} = 0\,.$$

Mode tak hingga ini disebut sebagai mode non dinamik, dan ada sebanyak *n-r* .

- Misalkan $\vec{v}^j$ memenuhi:

$$B\vec{v}^j = 0\,.$$

Mode tak hingga yang berkaitan dengan eigen vektor diperumum $\vec{v}^j$ yang memenuhi:

$$B\vec{v}^j = A\vec{v}^{j-1} \quad , \ j \geq 2\,,$$

mode ini disebut sebagai mode impulsive dan ada sebanyak *r-k*.

4.2 Masalah Nilai Eigen Diperumum untuk Matriks *B* Tak Singular.

Secara umum penyelesaian masalah nilai eigen diperumum adalah diberikan bentuk:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Maka matriks pencil yang dihasilkan adalah:

$$A - \lambda B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda b_{11} & \lambda b_{12} & \cdots & \lambda b_{1n} \\ \lambda b_{21} & \lambda b_{22} & \cdots & \lambda b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda b_{n1} & \lambda b_{n2} & \cdots & \lambda b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & \cdots & a_{1n} - \lambda b_{1n} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_{22} - \lambda b_{22} & \cdots & a_{2n} - \lambda b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - \lambda b_{n1} & a_{n2} - \lambda b_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda b_{nn} \end{pmatrix}$$

Nilai eigen diperumum diperoleh jika $p(\lambda) = \det(A - \lambda B) = 0$.

Untuk matriks B tak singular berukuran $n \times n$, nilai eigennya adalah n buah nilai eigen hingga yang merupakan akar dari polinomial $p(\lambda)$. Sedangkan vektor-vektor eigennya adalah $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{x} \neq 0$ yang masing-masingnya berkaitan dengan nilai eigen $\lambda \in \mathbb{C}$ dan memenuhi bentuk $(A - \lambda B)\vec{x} = 0$.

Beberapa pembahasan dapat diuraikan dengan contoh-contoh berikut:

Contoh 1:

Jika diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan matriks $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Matriks A dan matriks B merupakan matriks tak singular. Penyelesaiannya adalah:

$$A - \lambda B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 3-2\lambda \end{pmatrix}$$

Matriks pencil yang dihasilkan adalah regular. Untuk menentukan nilai eigen diperumum maka $\det(A-\lambda B)=0$, yaitu:

$$\det(A-\lambda B)=(2-\lambda)(3-2\lambda)-(1)(1)$$

$$=2\lambda^2-7\lambda+5$$

Dari $2\lambda^2-7\lambda+5=0$, diperoleh $\lambda_1=1$ dan $\lambda_2=\frac{5}{2}$. Nilai eigen yang dihasilkan adalah dua buah nilai eigen hingga yang disebut dengan mode hingga.

Selanjutnya akan ditentukan vektor eigen yang berkaitan dengan nilai-nilai eigen. Untuk $\lambda_1=1$, misalkan vektor eigen diperumumnya adalah $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$, sehingga:

$$(A-\lambda_1 B)\vec{x}_1=0$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=0$$

Dari persamaan tersebut diperoleh vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1=1$ adalah $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$.

Kemudian untuk $\lambda_2=\frac{5}{2}$, misalkan vektor eigen diperumumnya adalah $\vec{x}_2=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$, maka:

$$(A-\lambda_2 B)\vec{x}_2=0$$

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}=0$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = \frac{5}{2}$ adalah

$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Contoh 2:

Diberikan bentuk:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} = \lambda\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\vec{x}$$

Matriks A dan matriks B dari persamaan diatas adalah matriks tak singular. Matriks pencil yang dihasilkan adalah:

$$\begin{aligned} A - \lambda B &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -\lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matriks pencil yang dihasilkan juga regular. Nilai eigen yang diperoleh adalah:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda B) &= (-1)(1) - (-\lambda)(-\lambda) \\ &= -1 - \lambda^2 \end{aligned}$$

$-1 - \lambda^2 = 0$ atau $\lambda^2 + 1 = 0$. Sehingga $\lambda_1 = i$ dan $\lambda_2 = -i$. Nilai eigen yang dihasilkan adalah dua buah nilai eigen kompleks.

Untuk $\lambda_1 = i$, misalkan vektor eigen diperumum yang bersesuaian adalah $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$. Sehingga:

$$(A - \lambda_1 B)\vec{x}_1 = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0$$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = i$ adalah $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

Untuk $\lambda_2 = -i$, misalkan vektor eigen diperumum yang bersesuaian adalah $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, sehingga:

$$(A - \lambda_2 B)\vec{x}_2 = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - (-i)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0$$

Sehingga vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = -i$ adalah $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

Contoh 3

Diberikan:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Penyelesaian masalah nilai eigen diperumum dari matriks A dan matriks B adalah:

$$A - \lambda B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\lambda & 3\lambda & -\lambda \\ 0 & 4\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6-2\lambda & 1-3\lambda & -2+\lambda \\ 0 & 1-4\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 4-2\lambda \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda B) = (6-2\lambda)(1-4\lambda)(4-2\lambda)$$

$\deg p(\lambda) = 3$, $k = n$ maka ada sebanyak 3 mode hingga. Diperoleh nilai eigen diperumum adalah $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = \frac{1}{4}$ dan $\lambda_3 = 2$.

Untuk $\lambda_1 = 3$, misalkan vektor eigen diperumum adalah $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, maka:

$$(A - \lambda_1 B)\vec{x}_1 = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix}6 & 1 & -2\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 4\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix}6 & 1 & -2\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6 & 9 & -3\\0 & 12 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix}0 & -8 & 1\\0 & -11 & 0\\0 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix} = 0$$

Pada persamaan diatas diperoleh $\alpha_2 = 0$ dan $\alpha_3 = 0$. Dengan menetapkan $\alpha_1 = 1$, maka vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 3$ adalah $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Untuk $\lambda_2 = \frac{1}{4}$, misalkan vektor eigen diperumum adalah $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix}$, maka :

$$(A - \lambda_2 B)\vec{x}_2 = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix}6 & 1 & -2\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 4\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix}6 & 1 & -2\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{2}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = 0$$

Dengan eliminasi Gauss diperoleh bentuk persamaan:

$$\begin{pmatrix} 44 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Dari persamaan diperoleh $\beta_3 = 1$, maka $\beta_2 = -\frac{7}{2}$ dan $\beta_1 = -\frac{21}{44}$, sehingga vektor eigen diperumum yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ adalah $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{21}{44} \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Untuk $\lambda_3 = 2$, misalkan vektor eigen diperumum adalah $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$, maka:

$$(A - \lambda_3 B)\vec{x}_3 = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = 0$$

Dengan eliminasi Gauss diperoleh bentuk persamaan:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = 0$$

Dari persamaan diperoleh $\gamma_2 = 0$, $\gamma_1 = 0$ dan pilih $\gamma_3 = 1$, sehingga diperoleh vektor eigen diperumum yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 2$ adalah $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.3 Masalah Nilai Eigen Diperumum untuk Matriks *B* Singular

Sebelumnya telah dinyatakan bahwa jika matriks B singular maka nilai eigen diperumum dipandang dari derjat polinomial $p(\lambda) = \det(A - \lambda B)$. Jika k adalah derajat dari $p(\lambda)$, maka untuk $k < n$ nilai eigen diperumum adalah ∞ dan akar dari $p(\lambda) = 0$. Berarti disini ada nilai eigen hingga dan ada nilai eigen tak hingga. Sama dengan matriks B yang tak singular, untuk nilai eigen hingga disebut dengan modes dinamik hingga. Sedangkan untuk nilai eigen tak hingga ada dua jenis modes yang disebut dengan modes non dinamik dan modes impulsif.

Berikut akan diberikan contoh penyelesaian masalah nilai eigen diperumum untuk matriks B yang singular:

Contoh 1:

Jika diberikan matriks $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ dan matriks $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Matriks B merupakan matriks singular dengan $rank\,B=1$. Matriks pencil yang dihasilkan adalah:

$$A-\lambda B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -\lambda\\ 1 & -\lambda\end{pmatrix}$$

Matriks pencil yang dihasilkan adalah regular dengan $p(\lambda)=2\lambda$. Dalam hal ini deg $p(\lambda)=k=1$. Karena $k<n$, maka nilai eigennya adalah ∞ dan $\lambda=0$. Ini berarti bahwa:

- ada 1 mode hingga
- ada 1 mode tak hingga, yaitu 1 mode non dynamik.

Untuk $\lambda=0$, misal nilai eigen diperumum yang bersesuaian adalah $\vec{x}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$, maka

$$(A-\lambda B)\vec{x}=0$$

$$\left[\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}-0\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=0$$

Jika ditetapkan $\alpha_2 = 1$, maka $\alpha_1 = 0$. Sehingga vektor eigen diperumum yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$ adalah $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Selanjutnya untuk modes non dinamik diperoleh dari:

$$B\vec{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Dalam hal ini diperoleh $v_2 = 0$, dan pilih $v_1 = 1$. Maka $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ adalah vektor eigen diperumum yang berkaitan dengan mode non dynamik.

Contoh 2:

Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ dan matriks $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Jelas bahwa matriks B singular dan $rank\, B = 2$.

$$(A - \lambda B) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1-\lambda & 3-2\lambda \\ 3-\lambda & 2-\lambda & 5-2\lambda \\ 3-\lambda & 2-\lambda & 6-3\lambda \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda B) = \lambda - 1$$

deg $p(\lambda) = 1$, maka:

- Ada satu modes hingga
- Ada 2 modes tak hingga yang terdiri atas 1 mode non dynamik dan 1 mode impulsive

Berikut akan dibahas mode-mode yang disebutkan diatas.

$\lambda = 1$ adalah modes hingga. Vektor eigen yang berkaitan dengan $\lambda = 1$, dapat ditentukan sebagai berikut:

$$(A - \lambda B)\vec{x} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss diperoleh:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0$$

Misalkan $\alpha_3 = -t$, maka $\alpha_1 = t$ dan $\alpha_2 = t$. Sehingga vektor eigen yang berkaitan dengan $\lambda = 1$ adalah:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya akan dicari vektor eigen diperumum yang berkaitan dengan modes non dinamik. Perhatikan hubungan berikut:

$$B\vec{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

Dengan eliminasi gauss diperoleh:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$v_3 = 0$, maka $v_1 = -v_2$. Sehingga diperoleh:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya vektor eigen yang berkaitan dengan modes impulsive, dapat dicari sebagai berikut:

Misalkan $\vec{v}_1^1 = \vec{v}$, maka:

$$B\vec{v}^2 = A\vec{v}^1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss diperoleh :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v_3 = 0,\ v_2 = 1$ dan $v_1 = 0$, sehingga:

$$\vec{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Contoh 3:

Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan matriks $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Matrks B adalah matriks singular dengan $rank\, B = 3$.

$$A-\lambda B=\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 0 & 2-\lambda\\ 0 & 2+2\lambda & 1 & -\lambda\\ -\lambda & 4 & 0 & -1-\lambda\\ 1 & 0 & -2\lambda & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda B)=4(2-\lambda)$$

$Deg\ p(\lambda)=k=1$, maka:

- ada 1 mode hingga
- ada 3 mode tak hingga yang terdiri atas: 1 mode non dynamik dan 2 mode impulsive.

Berikut akan ditentukan mode-mode yang disebutkan diatas.

$\lambda=2$ adalah modes hingga. Vektor eigen yang berkaitan dengan $\lambda=2$, dapat ditentukan sebagai berikut:

$$(A-\lambda B)\vec{x}=0$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 1 & -2\\ -2 & 4 & 0 & -3\\ 1 & 0 & -4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}=0$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss diperoleh:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 1\\ 0 & 4 & 0 & -3\\ 0 & 0 & -4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}=0$$

Misalkan $\alpha_1=0$ dan $\alpha_4=1$, maka $\alpha_2=\frac{3}{4}$ dan $\alpha_3=-\frac{1}{4}$. Sehingga vektor eigen yang berkaitan dengan $\lambda=2$ adalah:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya akan dicari vektor eigen diperumum yang berkaitan dengan modes non dynamik, yaitu:

$$B\vec{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Misalkan $v_4 = 1$, maka $v_1 = -1$, $v_2 = \frac{1}{2}$ dan $v_3 = -\frac{1}{2}$. Sehingga diperoleh:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya vektor eigen yang berkaitan dengan modes impulsive, dapat dicari sebagai berikut:

Misalkan $\vec{v}^{1} = \vec{v}$, maka:

$$B\vec{v}^{2} = A\vec{v}^{1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dengan menggunakan eliminasi Gauss diperoleh:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Misalkan $v_4 = 0$, maka $v_1 = 1$, $v_2 = -\frac{1}{4}$ dan $v_3 = 0$ Sehingga diperoleh:

$$\vec{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sebelumnya telah dinyatakan bahwa ada 2 mode impulsive. Diatas telah diperoleh 1 mode impulsive. Mode impulsive berikutnya diperoleh dari:

$$B\vec{v}^3 = A\vec{v}^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dengan menggunakan eliminasi Gauss diperoleh:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Misalkan $v_4 = 0$ maka $v_1 = 1$, $v_2 = \frac{1}{4}$ dan $v_3 = \frac{1}{2}$. Sehingga diperoleh:

$$\vec{v}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Setelah dibahas beberapa cara menyelesaikan masalah nilai eigen diperumum, khususnya untuk matriks pencil yang regular, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Penyelesaian masalah nilai eigen diperumum pada dasarnya adalah menentukan nilai $\lambda \in \mathbb{C}$ dari polinomial karakteristik $p(\lambda) = \det(A - \lambda B) = 0$ dan menentukan vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{x} \neq 0$ yang berkaitan dengan $\lambda \in \mathbb{C}$.
2. Jika matriks B yang merupakan matriks tak singular, deg $p(\lambda) = k$ dan $k = n$, maka diperoleh sebanyak k nilai eigen dan vektor eigen yang disebut dengan mode hingga.
3. Jika matriks B adalah matriks singular, sebut $rank\, B = r$ dan $k < n$ dengan $k < r < n$, maka didefinisikan 2 jenis nilai eigen diperumum untuk pencil (A, B) yaitu mode hingga sebanyak k dan mode tak hingga sebanyak *n-k*. Mode tak hingga terdiri dari 2 jenis lagi yaitu mode non dinamik dan mode impulsive. Dimana mode non dynamik sebanyak *n-r* yang memenuhi:

$$B\vec{v} = 0,$$

dan mode impulsive sebanyak *r-k* yang memenuhi:

$$B\vec{v}^{\,j} = A\vec{v}^{\,j-1} \quad , \; j \geq 2.$$

5.2 Saran

Masih banyak kajian tentang masalah nilai eigen diperumum ini. Karena keterbatasan penulis, maka penulis hanya membahas untuk matriks pencil yang regular. Untuk itu penulis menyarankan agar penyelesaian masalah nilai eigen diperumum ini dapat lebih di kembangkan lagi. Mungkin untuk peneliti selanjutnya dapat menggali lebih dalam lagi tentang masalah nilai eigen diperumum ini. Sehingga para pengguna masalah nilai eigen seperti pada bidang fisika dan teknik dapat terbantu dalam penyelesaian masalah yang menggunakan masalah nilai eigen diperumum.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. 1998. ***Aljabar Linear Elementer Edisi Kelima***. Erlangga. Jakarta.

Beezer, R.A. 2006. ***A First Course in Linear Algebra***. Tacoma. Washington.

Campbell, H. G. 1980. ***Linear Algebra with Aplication, second edition***. Prentice Hall. Inc. Englewood Cliff, New Jersey.

Datta, B. N. 2004. ***Numerical Methods for Linear Control Systems***. Elsevier Academic press. California.

Fuller, L. E. 1967. ***Linear Algebra with Aplication.*** Dickenson Publishing Company, Inc. Belmont, California.

Gere, M. J and Weafer, W. 1987. ***Aljabar Matriks Untuk Para Insinyur***. Erlangga. Jakarta.

Hager, W. W. 1988. ***Applied Linear Algebra***. Prentice Hall. Inc. Englewood Cliff, New Jersey.

Katayama, T and Minamino, K. 1992. ***Linear Quadratic and Spectral Factorization for Continuous Time Description System***. Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control. 967-972. Tucson. Arizona.

Leon, S. J. 2001. ***Aljabar Linear dan Aplikasinya***. Erlangga. Jakarta.

Matthew, K. R. 1998. ***Linear Algebra***. University of Queensland.

Noble, B and Daniel, J. W. 1977. ***Applied Linear Algebra***. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliff, New Jersey.

Strang, G. 1976. ***Linear Algebra and Its Applications***. Massachusetts Institute of Tecnology. Amarica.