KETERBAGIAN TAK HINGGA DISTRIBUSI LOG-GAMMA DAN APLIKASINYA DALAM PEMBUKTIAN RUMUS PERKALIAN GAUSS DAN RUMUS LEGENDRE

TESIS

OLEH

MISHBAH ULHUSNA

1021222001

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

PADANG

2013

Keterbagian Tak Hingga Distribusi Log-Gamma dan Aplikasinya dalam Pembuktian Rumus Perkalian Gauss dan Rumus Legendre

Oleh: Mishbah Ulhusna

(Di bawah bimbingan Dr. Dodi Devianto, M.Sc dan Dr. Admi Nazra)

RINGKASAN

Misalkan X adalah peubah acak berdistribusi Gamma ($X \sim Gamma(\xi, \beta)$), maka fungsi kepekatan peluangnya sebagai berikut

$$f(x) = \frac{\beta^\xi}{\Gamma(\xi)} x^{\xi-1} e^{-\beta x}; \quad x > 0, \xi > 0, \beta > 0.$$

Sedangkan fungsi karakteristik dari peubah acak X berdistribusi Gamma(ξ, β) adalah $\varphi_X(u) = (\frac{\beta}{\beta - iu})^\xi$.

Karena

$$\begin{aligned} \varphi_n(u) &= [\varphi_X(u)]^{\frac{1}{n}} \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta - iu}\right)^{\frac{\xi}{n}}. \end{aligned}$$

maka jelas bahwa $\varphi_n(u)$ merupakan fungsi karakteristik dari Gamma$(\frac{\xi}{n}, \beta)$. Jadi, distribusi Gamma merupakan distribusi terbagi tak hingga ($\varphi_n(u) \sim Gamma(\frac{\xi}{n}, \beta)$).

Bentuk kanonik dari fungsi karakteristik terbagi tak hingga berdistribusi Gamma yang dijelaskan dalam Lukacs (1970) yang dikarakterisasi oleh (γ, σ^2, M) diberikan sebagai berikut:

$$\varphi_X(u) = \exp\left[iu\left(\xi\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x}}{1+x^2}dx\right) + \int_{+0}^\infty \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right) d\left(-\xi\int_x^\infty \frac{e^{-\beta y}}{y}dy\right)\right],$$

dimana

$$\gamma = \xi \int_0^\infty \frac{e^{-\beta x}}{1+x^2} dx,$$

$$\sigma^2 = 0,$$

dan

$$M(x) = -\xi \int_x^\infty \frac{e^{-\beta y}}{y} dy, \quad x > 0.$$

Jika ditentukan peubah acak baru, yaitu $Y = \alpha \log X$ (untuk selanjutnya Y disebut peubah acak berdistribusi Log-Gamma), maka fungsi distribusi dari peubah acak Y dapat dilihat dalam dua kasus berikut:

1. Misalkan α konstanta positif. Ekspresi fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak Y adalah sebagai berikut

$$P\{Y \leq y\} = \frac{\beta^\xi}{\Gamma(\xi)} \int_{-\infty}^{y} \left[e^{\frac{\xi}{\alpha} t - \beta e^{\frac{t}{\alpha}}} \right] \frac{dt}{\alpha}.$$

2. Misalkan α konstanta negatif $(\alpha^{'} = -\alpha)$. Ekspresi fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak Y adalah sebagai berikut

$$P\{Y \leq y\} = 1 + \frac{\beta^\xi}{\Gamma(\xi)} \int_{y}^{\infty} \left[e^{\frac{\xi}{\alpha} t} \right] \left[e^{-\beta e^{t/\alpha}} \right] \frac{dt}{\alpha}.$$

Sedangkan fungsi karakteristik dari distribusi Log-Gamma dengan α positif maupun α negatif diperoleh dengan cara berikut

$$E[e^{iuY}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuy} f(y) dy$$

Dengan memisalkan $e^{y/\alpha} = x$ untuk α positif dan $e^{-y/\alpha^{'}} = x$ untuk α negatif, maka diperoleh

$$E[e^{iuY}] = \frac{\Gamma(\xi + i\alpha u)}{\Gamma(\xi)\beta^{i\alpha u}}.$$

Sehingga diperoleh fungsi karakteristik dari distribusi Log-Gamma sebagai $\varphi_Y(u) = \frac{\Gamma(i\alpha u+\xi)}{\Gamma(\xi)\beta^{i\alpha u}}$.

Selanjutnya, fungsi karakteristik dari peubah acak yang berdistribusi Log-Gamma tersebut dapat direpresentasikan dalam bentuk kanonik sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(\xi+i\alpha u)}{\Gamma(\xi)\beta^{i\alpha u}} &= \exp\left[iu\left\{\alpha\frac{\Gamma'(\xi)}{\Gamma(\xi)} - \alpha\log\beta + \alpha^3\int_{-\infty}^{-0}\frac{y^2}{1+\alpha^2y^2}\frac{e^{\xi y}}{(1-e^y)}dy\right\}\right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{-0}\left(e^{iuy} - 1 - \frac{iuy}{1+y^2}\right)\frac{e^{(\xi/\alpha)y}}{(1-e^{y/\alpha})|y|}dy\right];\end{aligned}$$

dimana

$$\gamma = \alpha\frac{\Gamma'(\xi)}{\Gamma(\xi)} - \alpha\log\beta + \alpha^3\int_{-\infty}^{-0}\frac{y^2}{1+\alpha^2y^2}\frac{e^{\xi y}}{(1-e^y)}dy,$$

$$\sigma^2 = 0,$$

dan

$$M(y) = \int_{-\infty}^{y}\frac{e^{(\xi/\alpha)s}}{(1-e^{s/\alpha})|s|}ds, \quad y<0, \xi>0, \alpha>0, u=-iv, v\in\mathbb{R}.$$

Bentuk kanonik fungsi karakteristik terbagi tak hingga dari distribusi Log-Gamma tersebut dapat digunakan untuk membuktikan rumus berikut:

a. Rumus perkalian Gauss yang didefinisikan sebagai berikut

$$\Pi_{k=0}^{m-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{m}\right) = m^{1/2-mz}(2\pi)^{1/2(m-1)}\Gamma(mz),$$

dimana $\alpha = 1$, $z = \xi + i\eta$ dan $m = 2, 3, \cdots$.

b. Rumus Legendre yang didefinisikan sebagai berikut

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z),$$

dimana $\alpha = 1$, $z = \xi + i\eta$ dan $m = 2$.

KETERBAGIAN TAK HINGGA DISTRIBUSI LOG-GAMMA DAN APLIKASINYA DALAM PEMBUKTIAN RUMUS PERKALIAN GAUSS DAN RUMUS LEGENDRE

OLEH

MISHBAH ULHUSNA

1021222001

TESIS

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister pada Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

PADANG

2013

Judul Penelitian : Keterbagian Tak Hingga Distribusi Log-Gamma dan Aplikasinya dalam Pembuktian Rumus Perkalian Gauss dan Rumus Legendre

Nama Mahasiswa : Mishbah Ulhusna

Nomor Pokok : 1021222001

Program Studi : Matematika

Tesis ini telah diuji dan dipertahankan di depan sidang panitia ujian akhir Magister Matematika pada Program Pascasarjana Universitas Andalas dan dinyatakan lulus pada tanggal 25 Juli 2013.

Menyetujui,

1. Komisi Pembimbing

Ketua Pembimbing	Anggota
Dr. Dodi Devianto, M.Sc	Dr. Admi Nazra
NIP.19771227 200012 1 002	NIP.19730330 199903 1 008

2. Koordinator Program Studi Pascasarjana Matematika	**3. Dekan Fakultas MIPA**
Dr. Muhafzan	Prof. Dr. Edison Munaf, M.Eng
NIP.19670602 199302 1 001	NIP.19580722 198303 1 002

بسم الله الرحمن الرحيم

Sesungguhnya setelah kesulitan ada kemudahan. Maka apabila engkau telah selesai dengan satu urusan, tetaplah bekerja keras untuk urusan yang lain. Dan hanya kepada Tuhanmulah kamu berharap.

(QS Al-Insyirah: 6-8).

Rabb...
Alhamdulillah
Setetes nikmatMu ini
Bagaikan oasis di Padang Pasir
Bagaikan pelita disaat gelap
Bagaikan hujan di musim kemarau
Bagaikan... Bagaikan... Bagaikan...
Seribu bahkan tak hingga "Bagaikan"
Tak dapat melukiskan rasa syukurku padaMu
Hanya perasaan menghamba yang mampu kupersembahkan
Rabb...
Perjalananku masih panjang
Aku mohon...
Tanamkan semangat berjuang di hati ini
Demi cita-cita dan masa depan
Yang penuh rahmat dan berkah dari Mu
Semoga ridhoMu selalu mengiringi langkahku
Amin...

Ku persembahkan tulisan ini khusus untuk
Suami tercinta Muhammad Ihsan
Anakku tersayang Muhammad Fauzil Ihsan & Annisa Radhiatul Husna, serta calon bayi yang ada di rahimku

Segala puji hanya milik Allah SWT, Hamba berlindung dan memohon ampun pada Mu. Duhai Zat Yang Maha Sempurna, Engkau selalu sempurnakan hidupku dengan limpahan Rahman dan RahimMu. KeberkahanMu selalu kurindukan dalam setiap perjalanan singkatku menuju keabadian bersamaMu.

Ayah dan Ibu terkasih, Jazakallah Khairan Katsiran... Afwan Jiddan atas kekeliruan yang telah Uul hadirkan selama ini. Mohon doa dan ridho selalu, Insya Allah doa dan ridho Ayah dan Ibu memberikan ketenangan dan kebahagian bagi kehidupan Uul.

Duhai Kekasihku, Muhammad Ihsan. Semoga Allah selalu satukan hati kita dan tuntun kita untuk istiqomah dalam cintaNya. ***I love You, Honey****. Anakku, cintaku, sayangku, Muhammad Fauzil Ihsan & Annisa Radhiatul Husna serta calon bayi yang ada di rahimku, semoga Allah selalu melindungimu, melimpahkan keberkahan sepanjang kehidupanmu di dunia hingga kehidupan kekal di akhirat.*

Adik-adikku tersayang, Husnatul Fatimah, S.Pd & Idham Fakhrurozi, Mimi Fahmiyatri, S.S & Muhayatul, S.E, Putri Mutia & Said Abdul Hamid, serta Muhammad Yusra & Ikhwan Hanif. Semoga kalian lebih baik dan sukses dunia akhirat. Ayo berjuang! Semangat!

Keponakan-keponakanku yang menggemaskan, penerus perjuangan. Bilqis Fakhrurozi, Maryam Fakhrurozi, Luthfi Khaizuran Muhaymi & Zaini Kamil, semoga jadi anak yang shaleh dan shalehah ya sayang...

Hormat dan terima kasih Husna buat P' Dodi, P' Admi, P' Muhafzan, B' Maiyastri, B' Lyra, P' Mahdhivan dan dosen-dosen yang telah memberikan bimbingan, perhatian, nasehat dan kemudahan selama Husna menempuh pendidikan di Pascasarjana UNAND.

Untuk sahabat seperjuanganku, Ade, Ncuz, Rina, Rian, Reni n Mama Dedew, thanks atas bantuan, support n kritiknya ya...

Untuk semua yang berarti bagi kehidupanku, kumohon padaMu, himpun kami selalu dalam kebaikan, saat ini, esok hari dan di akhirat nan abadi. Amin...

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Dengan ini saya menyatakan bahwa Tesis yang ditulis dengan judul: **"KETERBAGIAN TAK HINGGA DISTRIBUSI LOG-GAMMA DAN APLIKASINYA DALAM PEMBUKTIAN RUMUS PERKALIAN GAUSS DAN RUMUS LEGENDRE"** adalah hasil kerja/karya saya sendiri dan bukan merupakan jiplakan dari hasil kerja/karya orang lain, kecuali kutipan pustaka yang sumbernya dicantumkan. Jika dikemudian hari pernyataan ini tidak benar, maka status kelulusan dan gelar yang saya peroleh menjadi batal dengan sendirinya.

Padang, Agustus 2013

Yang membuat pernyataan

Mishbah Ulhusna

NBP.1021222001

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Mishbah Ulhusna, anak pertama dari enam bersaudara yang dilahirkan di kota Padang pada tanggal 28 Agustus 1982 dari pasangan Bapak Sukarni Sabirin dan Ibu Kasmarni. Penulis mengikuti pendidikan di TK Cendrawasih 8 Padang (sekarang bernama TK Kartika I.16) tahun 1987, SDN 13 Kuranji Padang tahun 1988, MTsN Model Gunung Pangilun Padang tahun 1994, SMUN 3 Padang tahun 1997 dan Jurusan Matematika Universitas Negeri Padang tahun 2000. Setelah itu, Penulis bekerja sebagai guru MA pada Perguruan Islam Ar-Risalah (tahun 2008-2009). Pada tahun 2009, tepatnya 10 April 2009, Penulis menikah dengan Muhammad Ihsan, S.E. Penulis telah dikaruniai seorang putra bernama Muhammad Fauzil Ihsan dan seorang putri bernama Annisa Radhiatul Husna. Penulis melanjutkan pendidikan S2 di Jurusan Matematika Universitas Andalas pada tahun 2010 dan menyelesaikannya pada tahun 2013.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillaahirobbil'aalamiin. Puji dan syukur pada Allah SWT yang telah memberikan rahman dan rahimNya sehingga Penulis dapat menyelesaikan tesis dengan judul **Keterbagian Tak Hingga Distribusi Log-Gamma dan Aplikasinya dalam Pembuktian Rumus Perkalian Gauss dan Rumus Legendre** yang merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Matematika (M.Si) di Pascasarjana Universitas Andalas Padang. Salawat dan salam disampaikan kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah membawa cahaya kebenaran di muka bumi ini.

Dalam menyelesaikan tesis ini, Penulis banyak menerima bantuan moril maupun materil dari berbagai pihak. Untuk itu, Penulis mengucapkan terima kasih kepada:

(1) Keluarga besar Bapak Sukarni Sabirin dan Bapak H. Ahmadillah atas doa, dukungan dan motivasi yang diberikan.

(2) Muhammad Ihsan, S.E, Muhammad Fauzil Ihsan dan Annisa Radhiatul Husna yang selalu setia menemani dan menyemangati Penulis.

(3) Bapak Dr Muhafzan selaku Koordinator Program Studi Pascasarjana Matematika.

(4) Bapak Dr. Dodi Devianto, M.Sc sebagai ketua komisi pembimbing dan Bapak Dr. Admi Nazra sebagai anggota komisi pembimbing yang telah mem-

bimbing dan memberi saran serta masukan kepada Penulis dalam menyelesaikan tesis ini.

(5) Ibu Dr. Maiyastri, Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan selaku penguji yang telah memberi saran dan masukan kepada Penulis dalam penyempurnaan tesis ini.

(6) Bapak dan Ibu dosen beserta staf Pascasarjana Universitas Andalas Padang, atas ilmu dan inspirasi yang diberikan kepada Penulis selama ini.

(7) Teman-teman Pascasarjana atas kebersamaannya dan sahabat yang selalu memberi semangat.

(8) Semua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan tesis ini.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa tesis ini jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, Penulis mengharapkan saran dan kritik yang bersifat membangun untuk kesempurnaan isi tesis ini. Akhirnya penulis berharap semoga tesis ini berguna bagi kita semua. Amin ya Robbal'aalamiin.

Padang, Agustus 2013

Mishbah Ulhusna

ABSTRAK

Jika diberikan suatu peubah acak $Y = \alpha \log X$, dimana X adalah peubah acak berdistribusi Gamma, $\alpha \in \mathbb{R}$ dan Y adalah peubah acak berdistribusi Log-Gamma, maka dengan menggunakan representasi kanonik fungsi karakteristik dapat ditentukan ukuran Levy untuk distribusi Log-Gamma yang merupakan distribusi terbagi tak hingga. Representasi kanoniknya dapat digunakan untuk membuktikan rumus perkalian Gauss dan rumus Legendre.

Kata kunci : fungsi karakteristik, distribusi terbagi tak hingga, rumus perkalian Gauss dan rumus Legendre.

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Konsep distribusi terbagi tak hingga merupakan kajian penting dalam teori peluang pada beberapa dekade terakhir, terutama dalam topik ukuran Levy untuk suatu fungsi karakteristik. Perkembangan pertama distribusi terbagi tak hingga didasarkan pada kajian perluasan Teorema Limit Pusat oleh Levy pada tahun 1932 yang berhasil memformulasikan bentuk representasi kanonik fungsi karakteristik dari suatu distribusi terbagi tak hingga. Representasi kanonik tersebut memuat suatu fungsi monoton sehingga setiap fungsi karakteristik dari suatu distribusi menjadi spesifik. Fungsi monoton yang bersesuaian dengan distribusi peluangnya tersebut dinamakan ukuran Levy.

Pembentukan distribusi terbagi tak hingga berdasarkan ukuran Levy dilakukan dengan menggunakan representasi kanonik dari suatu fungsi karakteristik distribusi tertentu. Ide dasar tentang distribusi terbagi tak hingga dalam permasalahan Teorema Limit Pusat adalah keterbagian peubah acak X menjadi peubah-peubah acak yang saling bebas dengan distribusi yang sama. Peubah acak X dikatakan terbagi menjadi n jika terdapat peubah-peubah acak yang identik dan saling bebas $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sedemikian sehingga $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Suatu fungsi distribusi F dikatakan terbagi tak hingga jika untuk setiap bilangan bulat positif n terdapat suatu fungsi distribusi F_n sedemikian sehingga F adalah konvolusi n kali dari F_n dengan dirinya sendiri, yaitu $F = F_n * \cdots * F_n$ (n kali) [5]. Definisi yang ekuivalen dengan definisi distribusi terbagi tak hingga di atas adalah bahwa suatu fungsi distribusi F dengan fungsi karakteristik φ adalah terbagi tak hingga jika untuk setiap bilangan bulat positif n terdapat fungsi karakteristik φ_n sedemikian sehingga $\varphi(u) = (\varphi_n(u))^n$ untuk setiap $u \in \mathbb{R}$ [5]. Jika ditentukan suatu distribusi dari suatu peubah acak $Y = \alpha \log X$ dimana X adalah peubah acak berdistribusi Gamma dan $\alpha \in \mathbb{R}$, maka kita bisa mengkaji bentuk distribusi terbagi tak hingga dari peubah acak Y serta bentuk representasi kanonik fungsi karakteristiknya.

Pada tesis ini akan dikaji tentang distribusi terbagi tak hingga dari peubah acak $Y = \alpha \log X$, dimana X adalah peubah acak berdistribusi Gamma, $\alpha \in \mathbb{R}$ (untuk selanjutnya Y disebut peubah acak berdistribusi Log-Gamma) dan bentuk representasi kanonik fungsi karakteristik dari peubah acak Y tersebut serta aplikasinya terhadap pembuktian rumus perkalian Gauss dan rumus Legendre.

1.2 Perumusan Masalah

Jika diberikan suatu peubah acak $Y = \alpha \log X$, dimana X adalah peubah acak berdistribusi Gamma, $\alpha \in \mathbb{R}$ dan Y adalah peubah acak berdistribusi Log-

Gamma, bagaimanakah bentuk distribusi terbagi tak hingga dari peubah acak berdistribusi Log-Gamma tersebut dan bentuk representasi kanonik fungsi karakteristiknya serta aplikasinya terhadap pembuktian rumus perkalian Gauss dan rumus Legendre.

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah untuk mengkaji bentuk distribusi terbagi tak hingga dan bentuk representasi kanonik fungsi karakteristik dari peubah acak berdistribusi Log-Gamma serta aplikasinya terhadap pembuktian rumus perkalian Gauss dan rumus Legendre.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memperluas wawasan penulis serta pembaca pada umumnya dan diharapkan dapat memberikan sumbangan kepada para pembaca agar lebih memahami tentang distribusi terbagi tak hingga.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pengertian dasar tentang teori peluang, fungsi karakteristik, dan distribusi terbagi tak hingga merupakan landasan teori yang sangat penting untuk memahami representasi kanonik fungsi karakteristik. Berikut ini akan dipaparkan beberapa teori yang akan digunakan untuk menjawab permasalahan pada penelitian ini.

2.1 Pengertian Dasar dalam Teori Peluang

Himpunan semua kemungkinan hasil dari suatu percobaan disebut ruang contoh dan dilambangkan dengan Ω, sedangkan kejadian adalah suatu himpunan bagian dari ruang contoh [1].

Berikut ini akan dijelaskan beberapa pengertian dasar dalam teori peluang.

2.1.1 Ruang Peluang

Misalkan Ω suatu himpunan dari titik-titik dalam suatu ruang contoh dan misalkan $\mathcal{F}$ suatu himpunan yang anggotanya adalah himpunan bagian dari Ω. Himpunan bagian ini dapat juga dikatakan sebagai suatu kejadian. Jika dimisalkan P suatu fungsi yang memberikan peluang untuk sebarang kejadian dalam $\mathcal{F}$, maka tripel $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dinamakan ruang peluang. Keluarga subhimpunan $\mathcal{F}$ yang memenuhi sifat-sifat σ-algebra diberikan menurut definisi berikut.

Definisi 2.1. [2] *Keluarga dari subhimpunan dari ruang contoh Ω, dinamakan medan Borel (σ-algebra) dan dinotasikan dengan $\mathcal{F}$ jika memenuhi sifat-sifat berikut:*

1. *$\varnothing \in \mathcal{F}$ (himpunan kosong ada dalam medan Borel)*
2. *Jika $A \in \mathcal{F}$ maka $A^c \in \mathcal{F}$ (medan Borel tertutup terhadap komplemen)*
3. *Jika $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ maka $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ (medan Borel tertutup terhadap gabungan tercacah (countable union))*

2.1.2 Peubah Acak dan Fungsi Distribusi

Berikut ini akan diberikan beberapa definisi dan teorema yang terkait dengan peubah acak dan fungsi distribusi.

Definisi 2.2. [1] *Suatu peubah acak, dinotasikan sebagai X, adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada suatu ruang contoh Ω, yang memetakan setiap anggota ruang contoh ω dalam Ω ke suatu bilangan riil x, atau dapat ditulis sebagai $X(\omega) = x, x \in \mathbb{R}$.*

Dengan kata lain, peubah acak X adalah bilangan yang ditentukan oleh hasil suatu percobaan. Peubah acak dinotasikan dengan huruf kapital, sedangkan nilai yang mungkin bagi peubah acak dinotasikan dengan huruf kecil yang bersesuaian [1].

Definisi 2.3. [1] *Jika himpunan dari semua nilai yang mungkin bagi peubah acak* X *adalah himpunan tercacah* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *atau* $x_1, x_2, \cdots$ *maka* X *dinamakan peubah acak diskrit. Fungsi*

$$f(x) = P[X = x], \quad x = x_1, x_2, \cdots$$

yang memasangkan setiap nilai x *dengan nilai peluang dinamakan sebagai fungsi kepekatan peluang diskrit. Untuk selanjutnya* $f(x)$ *disebut sebagai fkp diskrit.*

Definisi 2.4. [1] *Fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak* X *didefinisikan untuk setiap nilai riil* x *sebagai*

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Untuk selanjutnya $F(x)$ *disebut sebagai fungsi distribusi.*

Definisi 2.5. [1] *Suatu peubah acak* X *dikatakan peubah acak kontinu jika terdapat suatu fungsi* $f(x)$ *yang dinamakan fungsi kepekatan peluang (fkp) sehingga fungsi distribusi dapat dinyatakan sebagai*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad dan \quad f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = F'(x).$$

Teorema 2.6. [1] *Suatu fungsi* $f(x)$ *merupakan fkp diskrit jika dan hanya jika untuk suatu himpunan bilangan riil takhingga yang tercacah* $x_1, x_2, \cdots$ *terpenuhi kedua sifat berikut*

$$f(x_i) \geq 0, \quad untuk\ setiap\ x_i$$

dan

$$\sum_{\forall x_i} f(x_i) = 1.$$

Teorema 2.7. [1] *Fungsi $f(x)$ adalah fkp bagi suatu peubah acak yang kontinu jika dan hanya jika memenuhi sifat-sifat berikut*

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Berikut akan diberikan pengertian dari peubah acak menyebar identik dan peubah acak saling bebas.

Definisi 2.8. [2] *Dua peubah acak X dan Y dikatakan menyebar identik jika $P(X \in A) = P(Y \in A)$ untuk setiap kejadian A.*

Definisi 2.9. [1] *Peubah acak $X_1, \cdots, X_k$ dikatakan saling bebas jika untuk setiap $a_i < b_i$, berlaku*

$$P[a_1 \leq X_1 \leq b_1, \cdots, a_k \leq X_k \leq b_k] = \Pi_{i=1}^{k} P[a_i \leq X_i \leq b_i].$$

2.1.3 Nilai Harapan, Variansi dan Fungsi Pembangkit Momen

Pada pembahasan ini juga dibutuhkan pemahaman mengenai nilai harapan, variansi dan fungsi pembangkit momen seperti definisi berikut ini.

Definisi 2.10. [5] *Misalkan X peubah acak pada ruang peluang $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Misalkan $g(X)$ sebuah fungsi pada $\mathbb{R}$ yang merupakan suatu peubah acak. Nilai harapan $g(X)$ ada jika $g(X)$ terintegralkan pada Ω. Nilai harapan peubah acak $g(X)$ didefinisikan sebagai*

$$E[g(X)] = \begin{cases} \Sigma_x g(x)f(x), & \textit{untuk } X \textit{ diskrit;} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx, & \textit{untuk } X \textit{ kontinu.} \end{cases}$$

Definisi 2.11. [1] *Misal X merupakan peubah acak diskrit dengan fkp $f(x)$, maka nilai harapan dari X dinyatakan oleh*

$$E(X) = \sum_{\forall i} x_i P(X = x_i) = \sum_{\forall i} x_i f(x_i).$$

Definisi 2.12. [1] *Misal X merupakan peubah acak kontinu dengan fkp $f(x)$, maka nilai harapan dari X dinyatakan oleh*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Definisi 2.13. [1] *Variansi dari peubah acak X dirumuskan sebagai*

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2],$$

dimana μ merupakan nilai harapan dari peubah acak X.

Teorema 2.14. [1] *Jika X adalah peubah acak, maka*

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2.$$

Definisi 2.15. [1] *Misal X merupakan peubah acak maka nilai harapan*

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

dinamakan fungsi pembangkit momen dari peubah acak X jika nilai harapan itu ada untuk setiap t yang berada dalam selang $-h < t < h$ untuk suatu nilai $h > 0$.

2.2 Transformasi Bersama

Berikut ini akan diberikan teorema dan contoh dari transformasi bersama untuk peubah acak kontinu.

Teorema 2.16. [1] *Misalkan $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_k)$ adalah suatu vektor dari peubah acak kontinu dengan fkp bersama $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \cdots, x_k) > 0$ pada himpunan kejadian A, dan $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$ didefinisikan oleh transformasi satu satu sebagai berikut*

$$Y_i = u_i(X_1, X_2, \cdots, X_k), \quad i = 1, 2, \cdots, k.$$

Jika Jacobian adalah kontinu dan taknol pada range transformasi, maka fkp bersama dari $\mathbf{Y}$ adalah

$$f_{\mathbf{Y}}(y_1, \cdots, y_k) = f_{\mathbf{X}}(x_1, \cdots, x_k)|J|$$

dimana $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_k)$ adalah solusi dari $\mathbf{y} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$.

Contoh 2.1. *Misalkan X dan Y merupakan dua peubah acak saling bebas berdistribusi eksponensial dengan fungsi kepekatan peluang masing-masing $f_X(x)$ dan $f_Y(x)$ yang terletak pada interval $[0, \infty)$. Maka*

$$f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & jika\ x \geq 0; \\ 0\ , & jika\ x\ lainnya. \end{cases}$$

dan $Z = X + Y$ *memiliki fungsi kepekatan peluang sebagai berikut.*

Untuk $z > 0$, *fkp bersama dari* X *dan* Y *adalah*

$$f_{X,Y}(x,y) \;=\; \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \qquad\qquad (x,y) \in A$$

dimana kejadian $A = \{(x,y)|0 < x, 0 < y\}$. *Misalkan peubah acak* $W = X$ *dan* $Z = X + Y$ *bersesuaian dengan transformasi* $w = x$ *dan* $z = x + y$ *yang memiliki solusi tunggal* $x = w$ *dan* $y = z - w$.

Sehingga diperoleh Jacobiannya

$$J \;=\; \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Selanjutnya fkp bersama dari peubah acak W *dan* Z *adalah*

$$\begin{aligned} f_{W,Z}(w,z) &= f_{X,Y}(w, z-w)|J| \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda z} \qquad\qquad (w,z) \in B \end{aligned}$$

dimana $B = \{(w,z)|0 < w < z < \infty\}$. *Sedangkan fkp marginal dari* Z *adalah sebagai berikut*

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^z f_{W,Z}(w,z)dw \\ &= \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda(z)} dw \\ &= \lambda^2 z e^{-\lambda z}. \end{aligned}$$

dan untuk $z < 0$, $f_Z(z) = 0$.

Jadi,

$$f_Z(z) = \begin{cases} \lambda^2 z e^{-\lambda z}, & jika\ z \geq 0; \\ 0 \quad , & jika\ z\ lainnya. \end{cases}$$

2.3 Konvolusi Distribusi

Berikut ini akan diberikan definisi dan teorema dari konvolusi distribusi baik untuk peubah acak diskrit maupun kontinu.

Definisi 2.17. [5] *Misalkan X dan Y adalah dua peubah acak diskrit yang saling bebas dengan fungsi distribusi masing-masing $m_1(x)$ dan $m_2(x)$. Maka konvolusi dari $m_1(x)$ dan $m_2(x)$ adalah fungsi distribusi $m(x) = m_1(x) * m_2(x)$ yang didefinisikan sebagai berikut*

$$m(j) = \Sigma_k m_1(k).m_2(j-k),\ untuk\ j = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots.$$

Fungsi $m(x)$ merupakan fungsi distribusi dari peubah acak $Z = X + Y$.

Contoh 2.2. *Sebuah dadu dilemparkan dua kali. Misalkan X_1 dan X_2 adalah hasil yang diperoleh dan misalkan $S_2 = X_1 + X_2$ adalah jumlah dari hasil ini. Maka X_1 dan X_2 mempunyai fungsi distribusi sebagai berikut:*

$$h(x_i) = \frac{1}{6}\ untuk\ x_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\ dan\ i = 1, 2.$$

Berdasarkan Definisi 2.17*, fungsi distribusi dari S_2 adalah konvolusi dari dis-*

tribusi ini dengan dirinya sendiri. Sehingga

$$
\begin{aligned}
P(S_2 = 2) &= h(1)h(1) = \frac{1}{6}.\frac{1}{6} = \frac{1}{36}, \\
P(S_2 = 3) &= h(1)h(2) + h(2)h(1) = \frac{1}{6}.\frac{1}{6} + \frac{1}{6}.\frac{1}{6} = \frac{2}{36}, \\
P(S_2 = 4) &= h(1)h(3) + h(2)h(2) + h(3)h(1) = \frac{1}{6}.\frac{1}{6} + \frac{1}{6}.\frac{1}{6} + \frac{1}{6}.\frac{1}{6} = \frac{3}{36}.
\end{aligned}
$$

Jika proses tersebut dilanjutkan akan diperoleh $P(S_2 = 5) = 4/36$, $P(S_2 = 6) = 5/36$, $P(S_2 = 7) = 6/36$, $P(S_2 = 8) = 5/36$, $P(S_2 = 9) = 4/36$, $P(S_2 = 10) = 3/36$, $P(S_2 = 11) = 2/36$, *dan* $P(S_2 = 12) = 1/36$.

Sedangkan distribusi untuk S_3 *merupakan konvolusi dari distribusi* S_2 *dan* X_3. *Sehingga diperoleh*

$$
\begin{aligned}
P(S_3 = 3) &= P(S_2 = 2)P(X_3 = 1) = \frac{1}{36}.\frac{1}{6} = \frac{1}{216} \\
P(S_3 = 4) &= P(S_2 = 3)P(X_3 = 1) + P(S_2 = 2)P(X_3 = 2) = \frac{2}{36}.\frac{1}{6} + \frac{1}{36}.\frac{1}{6} = \frac{3}{216}
\end{aligned}
$$

dan seterusnya.

Definisi 2.18. [5] *Misalkan* X *dan* Y *adalah dua peubah acak kontinu dengan fungsi kepekatan peluang masing-masing adalah* $f(x)$ *dan* $g(x)$. *Asumsikan* $f(x)$ *dan* $g(x)$ *terdefinisi pada setiap bilangan riil. Maka konvolusi* $f * g$ *dari fungsi* f *dan* g *didefinisikan sebagai berikut*

$$
\begin{aligned}
(f * g)(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(z-x)f(x)dx
\end{aligned}
$$

Teorema 2.19. [5] *Misalkan X dan Y adalah dua peubah acak dengan fungsi kepekatan peluang $f_X(x)$ dan $f_Y(x)$ terdefinisi untuk setiap x. Maka $Z = X + Y$ merupakan peubah acak dengan fungsi kepekatan peluang $f_Z(z)$, dimana f_Z merupakan konvolusi dari f_X dan f_Y.*

Contoh 2.3. *Misalkan X dan Y merupakan dua peubah acak berdistribusi eksponensial dengan fungsi kepekatan peluang masing-masing $f_X(x)$ dan $f_Y(x)$ yang terletak pada interval $[0, \infty)$. Maka*

$$f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{jika } x \geq 0; \\ 0 \;\; , & \text{jika } x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

dan $Z = X + Y$ memiliki fungsi kepekatan peluang sebagai berikut.

Untuk $z > 0$,

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy \\ &= \int_0^z \lambda e^{-\lambda(z-y)} \lambda e^{-\lambda y} dy \\ &= \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda z} dy \\ &= \lambda^2 z e^{-\lambda z}, \end{aligned}$$

dan untuk $z < 0$, $f_Z(z) = 0$.

Jadi,

$$f_Z(z) = \begin{cases} \lambda^2 z e^{-\lambda z}, & \text{jika } z \geq 0; \\ 0 \;\; , & \text{jika } z \text{ lainnya.} \end{cases}$$

2.4 Fungsi Karakteristik

Berikut akan dijelaskan tentang definisi fungsi karakteristik dan sifat-sifat fungsi karakteristik tersebut.

Definisi 2.20. [8] *Jika X suatu peubah acak dengan fungsi kepekatan peluang $f(x)$ dan fungsi distribusi kumulatif $F(x)$ maka fungsi karakteristik dari peubah acak X didefinisikan sebagai berikut*

$$\varphi_X(u) = E[e^{iuX}] = \int e^{iux} dF(x)$$

dimana $u \in \mathbb{R}, i = \sqrt{(-1)}$ dan $e^{iux} = \cos(ux) + i\sin(ux)$.

Adapun sifat-sifat dari fungsi karakteristik adalah sebagai berikut:

Proposisi 2.21. [8] *Misalkan $\varphi_X(u)$ adalah fungsi karakteristik dari peubah acak X, maka $\varphi_X(0) = 1$.*

Proposisi 2.22. [8] *Fungsi karakteristik ada untuk sebarang distribusi.*

Proposisi 2.23. [8] *Misalkan X suatu peubah acak, maka fungsi karakteristik dari $-X$ adalah $\overline{\varphi_X(u)}$.*

Proposisi 2.24. [8] *Fungsi karakteristik $\varphi_X(u)$ adalah kontinu seragam.*

Proposisi 2.25. [8] *Misalkan X suatu peubah acak, maka fungsi karakteristik dari $a + bX$ adalah $e^{iua}\varphi_X(bu)$.*

Proposisi 2.26. [8] *Fungsi karakteristik $\varphi_X(u)$ dari peubah acak X, bernilai riil jika dan hanya jika peubah acak X mempunyai distribusi yang simetrik terhadap garis $x = 0$.*

2.5 Distribusi Terbagi Tak Hingga

Ide dasar tentang distribusi terbagi tak hingga dalam permasalahan Teorema Limit Pusat adalah keterbagian peubah acak X menjadi peubah-peubah acak yang saling bebas dengan distribusi yang sama. Peubah acak X dikatakan terbagi menjadi n jika terdapat peubah-peubah acak yang identik dan saling bebas $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sedemikian sehingga $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Berikut ini akan dibahas mengenai definisi dan teorema dari fungsi distribusi terbagi tak hingga.

Definisi 2.27. [5] *Suatu fungsi distribusi F dikatakan terbagi tak hingga jika untuk setiap bilangan bulat positif n terdapat suatu fungsi distribusi F_n sedemikian sehingga F adalah konvolusi n kali dari F_n dengan dirinya sendiri, yaitu $F = F_n * \cdots * F_n$ (n kali).*

Dengan menggunakan fungsi karakteristik dari suatu distribusi maka distribusi terbagi tak hingga dapat dinyatakan sebagai berikut.

Definisi 2.28. [5] *Suatu fungsi distribusi F dengan fungsi karakteristik φ adalah terbagi tak hingga jika untuk setiap bilangan bulat positif n terdapat fungsi karakteristik φ_n sedemikian sehingga $\varphi(u) = (\varphi_n(u))^n$ untuk setiap u.*

Berikut diberikan dua contoh penting distribusi terbagi tak hingga yang dijelaskan dalam Tucker (1967).

1). Distribusi Normal $N(\mu, \sigma^2)$

Pada kasus distribusi Normal, fungsi kepekatan peluangnya didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

untuk $-\infty < x < \infty$, dimana μ dan σ^2 adalah konstan, $-\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0$. Fungsi karakteristik dari distribusi Normal ini adalah

$$\varphi(u) \quad = \quad \exp\left[i\mu u - \frac{\sigma^2 u^2}{2}\right].$$

Fungsi karakteristik ini berasal dari distribusi terbagi tak hingga karena

$$\varphi_n(u) \quad = \quad \exp\left[\frac{i\mu u}{n} - \frac{\sigma^2 u^2}{2n}\right]$$

adalah fungsi karakteristik dari distribusi Normal dengan nilai harapan μ/n dan variansi σ^2/n, yaitu distribusi Normal $N(\mu/n, \sigma^2/n)$. Dengan demikian diperoleh $\varphi(u) = (\varphi_n(u))^n$.

2). Distribusi Poisson $Poi(\lambda)$

Pada kasus distribusi Poisson ini, fungsi kepekatan peluangnya adalah

$$f(x) \quad = \quad \exp[-\lambda]\lambda^x/x!$$

untuk suatu parameter λ dan bilangan bulat taknegatif x. Fungsi karakteristiknya adalah

$$\varphi(u) \quad = \quad \exp[\lambda(\exp[iu] - 1)].$$

Fungsi karakteristik ini berasal dari distribusi terbagi tak hingga karena

$$\varphi_n(u) \quad = \quad \exp[(\lambda/n)(\exp[iu] - 1)]$$

adalah suatu fungsi karakteristik dari distribusi Poisson dengan nilai harapan λ/n, yaitu distribusi $Poi(\lambda/n)$ sehingga diperoleh $\varphi(u) = (\varphi_n(u))^n$.

Teorema 2.29. [9] *Jika F adalah fungsi distribusi terbagi tak hingga maka begitu juga dengan $G(x) = 1 - F(-x - 0)$.*

Teorema 2.30. [9] *Jika X dan Y adalah peubah acak saling bebas dengan fungsi distribusi terbagi tak hingga, maka $X + Y$ adalah peubah acak dari suatu fungsi distribusi terbagi tak hingga.*

Teorema 2.31. [9] *Jika F adalah fungsi distribusi terbagi tak hingga, maka fungsi karakteristiknya yakni φ, tidak pernah nol.*

Teorema 2.32. [9] *Jika F adalah suatu fungsi distribusi terbagi tak hingga maka terdapat tepat satu fungsi distribusi F_n (untuk semua n) sedemikian sehingga $F = F_n * \cdots * F_n$ (n kali).*

Teorema 2.33. [9] *Misalkan $\{Y, X_1, X_2, \cdots\}$ adalah peubah acak saling bebas dimana distribusi dari Y adalah Poisson dengan nilai harapan $\lambda > 0$ dan $\{X_n\}$ menyebar identik dengan fungsi karakteristik φ. Misalkan $Z = X_1 + X_2 + \cdots + Y$. Maka fungsi distribusi Z terbagi tak hingga dan fungsi karakteristiknya adalah $\varphi_Z(u) = \exp[\lambda(\varphi(u) - 1)]$.*

Tujuan dari pembahasan berikut ini adalah untuk memperoleh representasi Levy Khinthine dari fungsi karakteristik suatu fungsi distribusi terbagi tak hingga, seperti yang dinyatakan dalam Teorema 2.36.

Lema 2.34. [9] *Jika* φ *adalah fungsi karakteristik dari suatu fungsi distribusi terbagi tak hingga dan* φ_n *adalah fungsi karakteristik dimana* $\varphi(u) = (\varphi_n(u))^n$ *maka* $n(\varphi_n(u) - 1) \to \log \varphi(u)$ *bila mana* $n \to \infty$ *secara seragam pada setiap interval terbatas.*

Lema 2.35. [9] *Jika* $A(x, u)$ *didefinisikan untuk* $x \in (-\infty, 0) \bigcup (0, \infty)$ *dan* $u \in (-\infty, +\infty)$ *oleh*

$$A(x, u) = \left(\exp[iux] - 1 - \frac{iux}{1 + x^2} \right) \frac{1 + x^2}{x^2},$$

maka $\lim_{x \to 0} A(x, u) = -u^2/2$.

Teorema 2.36. [3]**(Representasi Levy Khinthine)** *Suatu fungsi* φ *adalah fungsi karakteristik dari suatu fungsi distribusi terbagi tak hingga jika dan hanya jika terdapat suatu bilangan riil* γ *dan fungsi takturun terbatas* G *yang terdefinisi pada* $(-\infty, +\infty)$ *sedemikian sehingga*

$$\varphi(u) = \exp \left[i\gamma u + \int_{-\infty}^{\infty} (\exp[iux] - 1 - \frac{iux}{1 + x^2}) \frac{1 + x^2}{x^2} dG(x) \right], \qquad (2.1)$$

dimana integran terdefinisi pada $x = 0$ *dengan kontinuitas menjadi* $-u^2/2$. *Representasi kanonik pasangan* (γ, G) *ini tunggal.*

Bukti Teorema representasi Levy Khinthine di atas dapat dilihat pada lampiran.

Teorema 2.37. [3]**(Representasi Levy)** *Suatu fungsi φ adalah fungsi karakteristik dari suatu fungsi distribusi terbagi tak hingga jika dan hanya jika terdapat konstanta γ dan $\sigma^2 \geq 0$ dan fungsi M yang terdefinisi pada $(-\infty, 0) \bigcup (0, \infty)$ yang takturun pada $(-\infty, 0)$ dan $(0, \infty)$ dan memenuhi $M(-\infty) = M(\infty) = 0$ dan*

$$\int_{-1}^{-0} + \int_{+0}^{+1} x^2 dM(x) < \infty,$$

sedemikian sehingga

$$\varphi(u) = \exp\left[i\gamma u - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_{-\infty}^{-0} + \int_{+0}^{+\infty} (\exp[iux] - 1 - \frac{iux}{1+x^2}) dM(x)\right]. \quad (2.2)$$

Representasi kanonik tripel (γ, σ^2, M) ini tunggal.

Teorema **Representasi Levy** jelas ekuivalen dengan teorema **Representasi Levy Khinthine** dengan menggunakan hubungan

$$M(x) = \begin{cases} -\int_x^\infty \frac{1+y^2}{y^2} dG(y), & jika\ x > 0; \\ \int_{-\infty}^x \frac{1+y^2}{y^2} dG(y), & jika\ x < 0. \end{cases}$$

2.6 Rumus Perkalian Gauss dan Rumus Legendre

Berikut ini diberikan definisi tentang rumus perkalian Gauss dan rumus Legendre.

Definisi 2.38. [4] *Misalkan $z = \xi + i\eta$ dan $m = 2, 3, \cdots$, maka rumus perkalian Gauss didefinisikan sebagai berikut*

$$\Pi_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{m}\right) = m^{1/2-mz} (2\pi)^{1/2(m-1)} \Gamma(mz).$$

Rumus Legendre adalah bentuk khusus dari rumus perkalian Gauss, yaitu pada saat $m = 2$. Bentuk rumus Legendre adalah sebagai berikut.

Definisi 2.39. [4] *Misalkan $z = \xi + i\eta$ dan $m = 2$, maka bentuk rumus Legendre adalah sebagai berikut*

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z).$$

BAB III

DISTRIBUSI LOG-GAMMA TERBAGI TAK HINGGA

3.1 Distribusi Gamma

Berikut akan dijelaskan tentang definisi, variansi, fungsi pembangkit momen, fungsi karakteristik dan distribusi terbagi tak hingga dari distribusi Gamma.

Definisi 3.1. [5] *Misalkan X peubah acak berdistribusi Gamma ($X \sim Gamma(\xi, \beta)$), maka fungsi kepekatan peluangnya sebagai berikut*

$$f(x) = \frac{\beta^{\xi}}{\Gamma(\xi)} x^{\xi-1} e^{-\beta x}; \quad x > 0, \xi > 0, \beta > 0 \tag{3.1}$$

dengan $\int_0^\infty x^{\xi-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\Gamma(\xi)}{\beta^{\xi}}$. Kemudian

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^{\xi}}{\Gamma(\xi)} x^{\xi-1} e^{-\beta x} dx = 1.$$

Selanjutnya akan ditentukan variansi dari distribusi Gamma dengan terlebih dahulu menghitung nilai harapan $E(X)$ dan $E(X^2)$ seperti berikut

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x \frac{\beta^{\xi}}{\Gamma(\xi)} x^{\xi-1} e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{\beta^{\xi}}{\Gamma(\xi)} \int_0^{\infty} x^{(\xi+1)-1} e^{-\beta x} dx. \end{aligned}$$

Karena $\int_0^\infty x^{(\xi+1)-1}e^{-\beta x}dx = \frac{\Gamma(\xi+1)}{\beta^{\xi+1}}$ dan $\Gamma(\xi+1) = \xi\Gamma(\xi)$ maka $E(X) = \frac{\xi}{\beta}$.

Selanjutnya

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx \\ &= \int_0^\infty x^2 \frac{\beta^\xi}{\Gamma(\xi)} x^{\xi-1}e^{-\beta x}dx \\ &= \frac{\beta^\xi}{\Gamma(\xi)} \int_0^\infty x^{(\xi+2)-1}e^{-\beta x}dx. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan cara yang sama dengan penghitungan $E(X)$, diperoleh $E(X^2) = \frac{\xi(\xi+1)}{\beta^2}$. Sehingga

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \frac{\xi}{\beta^2}. \end{aligned}$$

Selanjutnya akan diberikan fungsi pembangkit momen dari distribusi Gamma sebagai berikut

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tX}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx \\ &= \int_0^\infty e^{tx} \frac{\beta^\xi}{\Gamma(\xi)} x^{\xi-1}e^{-\beta x}dx \\ &= \frac{\beta^\xi}{\Gamma(\xi)} \int_0^\infty x^{\xi-1}e^{-x(\beta-t)}dx. \end{aligned}$$

Karena $\int_0^\infty x^{\xi-1}e^{-x(\beta-t)}dx = \frac{\Gamma(\xi)}{(\beta-t)^\xi}$ maka diperoleh $M_X(t) = (\frac{\beta}{\beta-t})^\xi$. Sedangkan fungsi karakteristik dari distribusi Gamma diberikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\varphi_X(u) &= E[e^{iuX}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x)dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{iux} \frac{\beta^\xi}{\Gamma(\xi)} x^{\xi-1} e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{\beta^\xi}{\Gamma(\xi)} \int_0^{\infty} x^{\xi-1} e^{-x(\beta-iu)} dx.\end{aligned}$$

Dengan menggunakan cara yang sama dengan penghitungan fungsi pembangkit momen, diperoleh $\varphi_X(u) = (\frac{\beta}{\beta-iu})^\xi$.

Misalkan X berdistribusi Gamma(ξ, β) dengan fungsi karakteristik $\varphi_X(u) = (\frac{\beta}{\beta-iu})^\xi$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\varphi_n(u) &= [\varphi_X(u)]^{\frac{1}{n}} \\ &= \left[\left(\frac{\beta}{\beta - iu}\right)^\xi\right]^{\frac{1}{n}} \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta - iu}\right)^{\frac{\xi}{n}}.\end{aligned}$$

Adalah jelas bahwa $\varphi_n(u)$ merupakan fungsi karakteristik dari Gamma$(\frac{\xi}{n}, \beta)$. Jadi, distribusi Gamma merupakan distribusi terbagi tak hingga ($\varphi_n(u) \sim Gamma(\frac{\xi}{n}, \beta)$).

Sedangkan bentuk kanonik dari fungsi karakteristik terbagi tak hingga berdistribusi Gamma yang dijelaskan dalam Lukacs (1970) yang dikarakterisasi oleh (γ, σ^2, M) seperti pada persamaan (2.2), diberikan sebagai berikut:

$$\varphi_X(u) = \exp\left[iu\left(\xi\int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta x}}{1+x^2} dx\right) + \int_{+0}^{\infty}\left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right) d\left(-\xi\int_x^{\infty}\frac{e^{-\beta y}}{y} dy\right)\right]$$

dimana

$$\gamma = \xi \int_0^\infty \frac{e^{-\beta x}}{1+x^2} dx,$$

$$\sigma^2 = 0,$$

dan

$$M(x) = -\xi \int_x^\infty \frac{e^{-\beta y}}{y} dy, \quad x > 0.$$

3.2 Distribusi Log-Gamma

Selanjutnya akan dikaji distribusi dari peubah acak $Y = \alpha \log X$, dimana X adalah peubah acak berdistribusi Gamma, $\alpha \neq 0$. Untuk ini, akan dilihat dua kasus berikut:

1. Misalkan α konstanta positif. Ekspresi fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak Y diperoleh dengan cara mengubah variabel x dengan $w = e^{t/\alpha}$, yaitu

$$\begin{aligned}
P\{Y \leq y\} &= P\{\alpha \log X \leq y\} \\
&= P\left\{\log X \leq \frac{y}{\alpha}\right\} \\
&= P\left\{X \leq \exp\left(\frac{y}{\alpha}\right)\right\} \\
&= \int_0^{\exp(\frac{y}{\alpha})} \frac{\beta^\xi}{\Gamma(\xi)} w^{\xi-1} e^{-\beta w} dw \\
&= \frac{\beta^\xi}{\Gamma(\xi)} \int_{-\infty}^{y} \left[e^{\frac{t}{\alpha}(\xi-1)}\right] \left[e^{-\beta e^{t/\alpha}}\right] \left[\frac{1}{\alpha} e^{t/\alpha}\right] dt \\
&= \frac{\beta^\xi}{\Gamma(\xi)} \int_{-\infty}^{y} \left[e^{\frac{\xi}{\alpha}t - \beta e^{\frac{t}{\alpha}}}\right] \frac{dt}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Sedangkan fungsi karakteristik dari Y diperoleh dengan cara berikut

$$\begin{aligned}
E[e^{iuY}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuy} f(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuy} \frac{\beta^{\xi}}{\Gamma(\xi)} \left[e^{\frac{\xi}{\alpha} y} \right] \left[e^{-\beta e^{y/\alpha}} \right] \frac{dy}{\alpha} \\
&= \frac{\beta^{\xi}}{\Gamma(\xi)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{(i\alpha u + \xi)\frac{y}{\alpha}} \right] \left[e^{-\beta e^{y/\alpha}} \right] \frac{dy}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Dengan memisalkan $e^{y/\alpha} = x$ dimana $y = \alpha \log x$, maka

$$\begin{aligned}
E[e^{iuY}] &= \frac{\beta^{\xi}}{\Gamma(\xi)} \int_{+0}^{\infty} \left[x^{(i\alpha u + \xi)} \right] \left[e^{-\beta x} \right] \frac{d\alpha \log x}{\alpha} \\
&= \frac{\beta^{\xi}}{\Gamma(\xi)} \int_{+0}^{\infty} \left[x^{(i\alpha u + \xi) - 1} \right] \left[e^{-\beta x} \right] dx \\
&= \frac{\beta^{\xi} \Gamma(i\alpha u + \xi)}{\Gamma(\xi) \beta^{(i\alpha u + \xi)}} \\
&= \frac{\Gamma(i\alpha u + \xi)}{\Gamma(\xi) \beta^{i\alpha u}}.
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh fungsi karakteristik dari distribusi Log-Gamma untuk α positif sebagai $\varphi_Y(u) = \frac{\Gamma(i\alpha u + \xi)}{\Gamma(\xi)\beta^{i\alpha u}}$.

2. Misalkan α konstanta negatif $(\alpha^{'} = -\alpha)$. Ekspresi fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak Y diperoleh dengan cara mengubah variabel x dengan $w = e^{-t/\alpha^{'}}$, yaitu

$$\begin{aligned}
P\{Y \leq y\} &= P\{\alpha \log X \leq y\} \\
&= P\{-\alpha^{'} \log X \leq y\} \\
&= P\left\{ X \geq \exp\left(-\frac{y}{\alpha^{'}} \right) \right\} \\
&= 1 - P\left\{ X < \exp\left(-\frac{y}{\alpha^{'}} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1-\int_0^{\exp(-\frac{y}{\alpha'})}\frac{\beta^\xi}{\Gamma(\xi)}w^{\xi-1}e^{-\beta w}dw\\
&= 1-\frac{\beta^\xi}{\Gamma(\xi)}\int_\infty^y\left[e^{-\frac{t}{\alpha'}(\xi-1)}\right]\left[e^{-\beta e^{-t/\alpha'}}\right]\left[-\frac{1}{\alpha'}e^{-t/\alpha'}\right]dt\\
&= 1+\frac{\beta^\xi}{\Gamma(\xi)}\int_\infty^y\left[e^{-\frac{\xi}{\alpha'}t}\right]\left[e^{-\beta e^{-t/\alpha'}}\right]\frac{dt}{\alpha'}\\
&= 1-\frac{\beta^\xi}{\Gamma(\xi)}\int_\infty^y\left[e^{\frac{\xi}{\alpha}t}\right]\left[e^{-\beta e^{t/\alpha}}\right]\frac{dt}{\alpha}\\
&= 1+\frac{\beta^\xi}{\Gamma(\xi)}\int_y^\infty\left[e^{\frac{\xi}{\alpha}t}\right]\left[e^{-\beta e^{t/\alpha}}\right]\frac{dt}{\alpha}.
\end{aligned}
$$

Sedangkan fungsi karakteristik dari Y diperoleh dengan cara berikut

$$
\begin{aligned}
E[e^{iuY}] &= \int_{-\infty}^\infty e^{iuy}f(y)dy\\
&= \int_{-\infty}^\infty e^{iuy}\frac{\beta^\xi}{\Gamma(\xi)}\left[e^{-\frac{\xi}{\alpha'}y}\right]\left[e^{-\beta e^{-y/\alpha'}}\right]\frac{dy}{-\alpha'}\\
&= \frac{\beta^\xi}{\Gamma(\xi)}\int_{-\infty}^\infty\left[e^{(i\alpha' u-\xi)\frac{y}{\alpha'}}\right]\left[e^{-\beta e^{-y/\alpha'}}\right]\frac{dy}{-\alpha'}.
\end{aligned}
$$

Dengan memisalkan $e^{-y/\alpha'}=x$ dimana $y=-\alpha'\log x$, maka

$$
\begin{aligned}
E[e^{iuY}] &= \frac{\beta^\xi}{\Gamma(\xi)}\int_\infty^{+0}\left[x^{(\xi-i\alpha' u)}\right]\left[e^{-\beta x}\right]\frac{d(-\alpha'\log x)}{-\alpha'}\\
&= \frac{\beta^\xi}{\Gamma(\xi)}\int_\infty^{+0}\left[x^{(\xi-i\alpha' u)-1}\right]\left[e^{-\beta x}\right]dx\\
&= \frac{\beta^\xi\Gamma(\xi-i\alpha' u)}{\Gamma(\xi)\beta^{(\xi-i\alpha' u)}}\\
&= \frac{\Gamma(\xi+i\alpha u)}{\Gamma(\xi)\beta^{i\alpha u}}.
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh fungsi karakteristik dari distribusi Log-Gamma untuk α negatif sebagai $\varphi_Y(u)=\frac{\Gamma(i\alpha u+\xi)}{\Gamma(\xi)\beta^{i\alpha u}}$.

Selanjutnya akan dibuktikan suatu teorema tentang fungsi karakteristik dari distribusi Log-Gamma.

Teorema 3.2. [4] *Misalkan terdapat peubah acak* $Y = \alpha \log X$*, dimana* X *adalah peubah acak berdistribusi Gamma dan* $\alpha \in \mathbb{R}$*, maka fungsi karakteristik dari fungsi distribusi* $P\{Y \leq y\}$ *dapat ditulis sebagai berikut*

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\xi + i\alpha u)}{\Gamma(\xi)\beta^{i\alpha u}} &= \exp\left[iu\left\{\alpha\frac{\Gamma'(\xi)}{\Gamma(\xi)} - \alpha\log\beta + \alpha^3\int_{-\infty}^{-0}\frac{y^2}{1+\alpha^2y^2}\frac{e^{\xi y}}{(1-e^y)}dy\right\}\right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{-0}\left(e^{iuy} - 1 - \frac{iuy}{1+y^2}\right)\frac{e^{(\xi/\alpha)y}}{(1-e^{y/\alpha})|y|}dy\right]. \qquad (3.2) \end{aligned}$$

Bukti. Misalkan $u = -iv$ dan $v \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\xi + \alpha v \in \mathbb{C}$ dimana $\xi > 0$. Kemudian gunakan prinsip logaritma sedemikian sehingga

$$\log\left(\frac{\Gamma(\xi + i\alpha u)}{\Gamma(\xi)\beta^{i\alpha u}}\right) = 0$$

untuk $u = -iv = 0$, dan misalkan

$$\psi(v) = \log(\Gamma(\xi + \alpha v)) - \log(\Gamma(\xi)\beta^{\alpha v}). \qquad (3.3)$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(v)}{dv} &= \left[\log(\Gamma(\xi + \alpha v)) - \log(\Gamma(\xi)\beta^{\alpha v})\right]' \\ &= \frac{(\Gamma(\xi + \alpha v))'}{\Gamma(\xi + \alpha v)}\alpha - \alpha\log\beta. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan yang dijelaskan dalam Medina dan Moll (2009) sebagai berikut

$$\frac{\Gamma'(\xi)}{\Gamma(\xi)} = \int_{+0}^{\infty}\left(\frac{e^{-y}}{y} - \frac{e^{-\xi y}}{1-e^{-y}}\right)dy, \qquad (3.4)$$

maka diperoleh

$$\frac{d\psi(v)}{dv} = \alpha\int_{+0}^{\infty}\left\{\frac{e^{-y}}{y} - \frac{e^{-(\xi+\alpha v)y}}{1-e^{-y}}\right\}dy - \alpha\log\beta. \qquad (3.5)$$

Anggap α positif. Integralkan persamaan (3.5) dengan batas pengintegralan dari 0 sampai v, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\psi(v)-\psi(0) &= \int_0^v \left[\alpha \int_{+0}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-y}}{y} - \frac{e^{-(\xi+\alpha t)y}}{1-e^{-y}} \right\} dy - \alpha \log \beta \right] dt \\ &= \alpha \int_{+0}^{\infty} \left[\int_0^v \left\{ \frac{e^{-y}}{y} - \frac{e^{-(\xi+\alpha t)y}}{1-e^{-y}} \right\} dt \right] dy - \alpha v \log \beta.\end{aligned}$$

Karena $\psi(0)=0$, maka

$$\begin{aligned}\psi(v) &= \alpha \int_{+0}^{\infty} \left[\int_0^v \left\{ \frac{e^{-y}}{y} - \frac{e^{-(\xi+\alpha t)y}}{1-e^{-y}} \right\} dt \right] dy - \alpha v \log \beta \\ &= \alpha \int_{+0}^{\infty} \left[v\frac{e^{-y}}{y} - \frac{e^{-\xi y}}{(1-e^{-y})} \frac{[e^{-\alpha v y}-1]}{(-\alpha y)} \right] dy - \alpha v \log \beta \\ &= \alpha v \int_{+0}^{\infty} \left[\frac{e^{-y}}{y} - \frac{e^{-\xi y}}{1-e^{-y}} \right] dy + \alpha v \int_{+0}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{1+\alpha^2 y^2}\right) \left(\frac{e^{-\xi y}}{1-e^{-y}} \right) \right] dy \\ &\quad + \int_{+0}^{\infty} \left[\left(e^{-\alpha v y} - 1 + \frac{\alpha v y}{(1+\alpha^2 y^2)} \right) \left(\frac{e^{-\xi y}}{(1-e^{-y})y} \right) \right] dy - \alpha v \log \beta.\end{aligned}$$

Misalkan $h(y) = \int_{+0}^{\infty} \left[\left(e^{-\alpha v y} - 1 + \frac{\alpha v y}{(1+\alpha^2 y^2)} \right) \left(\frac{e^{-\xi y}}{(1-e^{-y})y} \right) \right] dy$ merupakan fungsi yang bernilai konstan.

Perhatikan bahwa dengan menggunakan pergantian variabel $t = \alpha y$ dan $s = -t$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}h(y) &= \int_{+0}^{\infty} \left[\left(e^{-\alpha v y} - 1 + \frac{\alpha v y}{(1+\alpha^2 y^2)} \right) \left(\frac{e^{-\xi y}}{(1-e^{-y})y} \right) \right] dy \\ &= \int_{+0}^{\infty} \left[\left(e^{-vt} - 1 + \frac{vt}{(1+t^2)} \right) \left(\frac{e^{-(\xi/\alpha)t}}{(1-e^{-t/\alpha})t} \right) \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{-0} \left[\left(e^{vs} - 1 - \frac{vs}{(1+s^2)} \right) \left(\frac{e^{(\xi/\alpha)s}}{(1-e^{s/\alpha})(-s)} \right) \right] ds \\ &= \int_{-\infty}^{-0} \left[\left(e^{vs} - 1 - \frac{vs}{(1+s^2)} \right) \left(\frac{e^{(\xi/\alpha)s}}{(1-e^{s/\alpha})|s|} \right) \right] ds. \qquad (3.6)\end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.6) dan persamaan (3.4), maka diperoleh

$$\begin{aligned}\psi(v) &= \alpha v\frac{\Gamma'(\xi)}{\Gamma(\xi)} + \alpha^3 v\int_{+0}^{\infty}\left[\left(\frac{y^2}{1+\alpha^2y^2}\right)\left(\frac{e^{-\xi y}}{1-e^{-y}}\right)\right]dy - \alpha v\log\beta\\ &\quad + \int_{-\infty}^{-0}\left[\left(e^{vs}-1-\frac{vs}{(1+s^2)}\right)\left(\frac{e^{(\xi/\alpha)s}}{(1-e^{s/\alpha})|s|}\right)\right]ds.\end{aligned}$$

Selanjutnya, berdasarkan kasus pada halaman 22, anggap α konstanta negatif ($\alpha' = -\alpha$). Integralkan persamaan (3.5) dengan batas pengintegralan dari 0 sampai v, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\psi(v)-\psi(0) &= \int_0^v\left[\alpha\int_{+0}^{\infty}\left\{\frac{e^{-y}}{y}-\frac{e^{-(\xi+\alpha t)y}}{1-e^{-y}}\right\}dy - \alpha\log\beta\right]dt\\ &= -\alpha'\int_{+0}^{\infty}\left[\int_0^v\left\{\frac{e^{-y}}{y}-\frac{e^{-(\xi-\alpha' t)y}}{1-e^{-y}}\right\}dt\right]dy + \alpha' v\log\beta.\end{aligned}$$

Karena $\psi(0)=0$, maka

$$\begin{aligned}\psi(v) &= -\alpha'\int_{+0}^{\infty}\left[\int_0^v\left\{\frac{e^{-y}}{y}-\frac{e^{-(\xi-\alpha' t)y}}{1-e^{-y}}\right\}dt\right]dy + \alpha' v\log\beta\\ &= -\alpha'\int_{+0}^{\infty}\left[v\frac{e^{-y}}{y}-\frac{e^{-\xi y}}{(1-e^{-y})}\frac{[e^{\alpha' vy}-1]}{(\alpha' y)}\right]dy + \alpha' v\log\beta\\ &= -\alpha' v\int_{+0}^{\infty}\left[\frac{e^{-y}}{y}-\frac{e^{-\xi y}}{1-e^{-y}}\right]dy - \alpha' v\int_{+0}^{\infty}\left[\left(1-\frac{1}{1+(-\alpha')^2y^2}\right)\left(\frac{e^{-\xi y}}{1-e^{-y}}\right)\right]dy\\ &\quad + \int_{+0}^{\infty}\left[\left(e^{\alpha' vy}-1+\frac{(-\alpha')vy}{(1+(-\alpha')^2y^2)}\right)\left(\frac{e^{-\xi y}}{(1-e^{-y})y}\right)\right]dy + \alpha' v\log\beta.\end{aligned}$$

Misalkan $k(y) = \int_{+0}^{\infty}\left[\left(e^{\alpha' vy}-1+\frac{(-\alpha')vy}{(1+(-\alpha')^2y^2)}\right)\left(\frac{e^{-\xi y}}{(1-e^{-y})y}\right)\right]dy$ merupakan fungsi yang bernilai konstan.

Perhatikan bahwa dengan menggunakan pergantian variabel $\alpha' y$ dengan s, maka diperoleh

$$\begin{aligned} k(y) &= \int_{+0}^{\infty}\left[\left(e^{\alpha' vy}-1+\frac{(-\alpha')vy}{(1+(-\alpha')^2y^2)}\right)\left(\frac{e^{-\xi y}}{(1-e^{-y})y}\right)\right]dy \\ &= \int_{+0}^{\infty}\left[\left(e^{vs}-1-\frac{vs}{(1+s^2)}\right)\left(\frac{e^{(\xi/\alpha)s}}{(1-e^{s/\alpha})s}\right)\right]ds \\ &= \int_{-\infty}^{-0}\left[\left(e^{vs}-1-\frac{vs}{(1+s^2)}\right)\left(\frac{e^{(\xi/\alpha)s}}{(1-e^{s/\alpha})(-s)}\right)\right]ds \\ &= \int_{-\infty}^{-0}\left[\left(e^{vs}-1-\frac{vs}{(1+s^2)}\right)\left(\frac{e^{(\xi/\alpha)s}}{(1-e^{s/\alpha})|s|}\right)\right]ds. \qquad (3.7) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.7) dan persamaan (3.4), maka diperoleh

$$\begin{aligned} \psi(v) &= \alpha v\frac{\Gamma'(\xi)}{\Gamma(\xi)}+\alpha^3 v\int_{+0}^{\infty}\left[\left(\frac{y^2}{1+\alpha^2y^2}\right)\left(\frac{e^{-\xi y}}{1-e^{-y}}\right)\right]dy-\alpha v\log\beta \\ &\quad +\int_{-\infty}^{-0}\left[\left(e^{vs}-1-\frac{vs}{(1+s^2)}\right)\left(\frac{e^{(\xi/\alpha)s}}{(1-e^{s/\alpha})|s|}\right)\right]ds. \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas dan karena $h(y)=k(y)$ merupakan fungsi konstan maka persamaan karakteristik distribusi Log-Gamma untuk α positif dan α negatif dapat direpresentasikan dalam bentuk kanonik yang sama, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\xi+i\alpha u)}{\Gamma(\xi)\beta^{i\alpha u}} &= \exp\Bigg[iu\left\{\alpha\frac{\Gamma'(\xi)}{\Gamma(\xi)}-\alpha\log\beta+\alpha^3\int_{-\infty}^{-0}\frac{y^2}{1+\alpha^2y^2}\frac{e^{\xi y}}{(1-e^{y})}dy\right\} \\ &\quad +\int_{-\infty}^{-0}\left(e^{iuy}-1-\frac{iuy}{1+y^2}\right)\frac{e^{(\xi/\alpha)y}}{(1-e^{y/\alpha})|y|}dy\Bigg]. \end{aligned}$$

$\square$

Jadi, fungsi karakteristik terbagi tak hingga yang berdistribusi Log-Gamma menyerupai bentuk representasi Levy dengan

$$\gamma=\alpha\frac{\Gamma'(\xi)}{\Gamma(\xi)}-\alpha\log\beta+\alpha^3\int_{-\infty}^{-0}\frac{y^2}{1+\alpha^2y^2}\frac{e^{\xi y}}{(1-e^{y})}dy,$$

$$\sigma^2=0$$

dan

$$M(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{e^{(\xi/\alpha)s}}{(1-e^{s/\alpha})|s|} ds, \quad y < 0.$$

3.3 Aplikasi Distribusi Log-Gamma Terbagi Tak Hingga

Dalam subbab ini akan dijelaskan bahwa sifat ukuran Levy pada Teorema 3.2 dapat digunakan untuk membuktikan rumus perkalian Gauss dan rumus Legendre.

Adapun bentuk rumus perkalian Gauss adalah sebagai berikut

$$\Pi_{k=0}^{m-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{m}\right) \;=\; m^{1/2-mz}(2\pi)^{1/2(m-1)}\Gamma(mz).$$

Sedangkan rumus Legendre adalah sebagai berikut

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \;=\; 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z),$$

dengan $\alpha = 1$, $z = \xi + i\eta$ dan $m = 2, 3, \cdots$.

Akan ditunjukkan bahwa rumus perkalian Gauss dapat dibuktikan dengan menggunakan sifat ukuran Levy pada Teorema 3.2 dengan memisalkan $\alpha = 1$, $z = \xi + i\eta$ dan $m = 2, 3, \cdots$.

Perhatikan bahwa ruas kiri dari rumus perkalian Gauss dapat ditulis sebagai berikut

$$\Pi_{k=0}^{m-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{m}\right) \;=\; \Pi_{k=0}^{m-1}\Gamma\left(\xi+i\eta+\frac{k}{m}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \Gamma(\xi)\beta^{i\eta}\Gamma\left(\xi+\frac{1}{m}\right)\beta^{i\eta}\cdots\Gamma\left(\xi+\frac{m-1}{m}\right)\beta^{i\eta} \\
&\quad \exp\left[i\eta\left\{\frac{\Gamma'(\xi)}{\Gamma(\xi)}-\log\beta+\int_{-\infty}^{-0}\frac{y^2}{1+y^2}\frac{e^{\xi y}}{(1-e^y)}dy\right\}\right. \\
&\quad \left.+\int_{-\infty}^{-0}\left(e^{i\eta y}-1-\frac{i\eta y}{1+y^2}\right)\frac{e^{\xi y}}{(1-e^y)|y|}dy\right] \\
&\quad \exp\left[i\eta\left\{\frac{\Gamma'(\xi+1/m)}{\Gamma(\xi+1/m)}-\log\beta+\int_{-\infty}^{-0}\frac{y^2}{1+y^2}\frac{e^{(\xi+1/m)y}}{(1-e^y)}dy\right\}\right. \\
&\quad \left.+\int_{-\infty}^{-0}\left(e^{i\eta y}-1-\frac{i\eta y}{1+y^2}\right)\frac{e^{(\xi+1/m)y}}{(1-e^y)|y|}dy\right] \\
&\quad \cdots\exp\left[i\eta\left\{\frac{\Gamma'(\xi+(m-1)/m)}{\Gamma(\xi+(m-1)/m)}-\log\beta+\int_{-\infty}^{-0}\frac{y^2}{1+y^2}\frac{e^{(\xi+(m-1)/m)y}}{(1-e^y)}dy\right\}\right. \\
&\quad \left.+\int_{-\infty}^{-0}\left(e^{i\eta y}-1-\frac{i\eta y}{1+y^2}\right)\frac{e^{(\xi+(m-1)/m)y}}{(1-e^y)|y|}dy\right] \\
&= \Gamma(\xi)\Gamma\left(\xi+\frac{1}{m}\right)\cdots\Gamma\left(\xi+\frac{m-1}{m}\right)\beta^{im\eta} \\
&\quad \exp\left[i\eta\left\{\frac{\Gamma'(\xi)}{\Gamma(\xi)}+\frac{\Gamma'(\xi+1/m)}{\Gamma(\xi+1/m)}+\cdots+\frac{\Gamma'(\xi+(m-1)/m)}{\Gamma(\xi+(m-1)/m)}\right\}\right. \\
&\quad -i\eta m\log\beta+i\eta\int_{-\infty}^{-0}\frac{y^2}{1+y^2}\frac{e^{\xi y}}{(1-e^{y/m})}dy \\
&\quad \left.+\int_{-\infty}^{-0}\left(e^{i\eta y}-1-\frac{i\eta y}{1+y^2}\right)\frac{e^{\xi y}}{(1-e^{y/m})|y|}dy\right].
\end{aligned}
$$

Selanjutnya dengan mengganti variabel y dengan my, diperoleh

$$
\begin{aligned}
\Pi_{k=0}^{m-1}\Gamma\left(\xi+i\eta+\frac{k}{m}\right) &= \Gamma(\xi)\Gamma\left(\xi+\frac{1}{m}\right)\cdots\Gamma\left(\xi+\frac{m-1}{m}\right)\beta^{im\eta} \\
&\quad \exp\left[i\eta\left\{\frac{\Gamma'(\xi)}{\Gamma(\xi)}+\frac{\Gamma'(\xi+1/m)}{\Gamma(\xi+1/m)}+\cdots+\frac{\Gamma'(\xi+(m-1)/m)}{\Gamma(\xi+(m-1)/m)}\right\}\right. \\
&\quad -i\eta m\log\beta+im\eta\int_{-\infty}^{-0}\frac{y^2}{1+y^2}\frac{e^{m\xi y}}{(1-e^y)}dy \\
&\quad \left.+\int_{-\infty}^{-0}\left(e^{im\eta y}-1-\frac{im\eta y}{1+y^2}\right)\frac{e^{m\xi y}}{(1-e^y)|y|}dy\right].
\end{aligned}
$$

Karena

$$
\begin{aligned}
&\frac{m\Gamma'(m\xi)}{\Gamma(m\xi)} - \left\{ \frac{\Gamma'(\xi)}{\Gamma(\xi)} + \frac{\Gamma'(\xi+1/m)}{\Gamma(\xi+1/m)} + \cdots + \frac{\Gamma'(\xi+(m-1)/m)}{\Gamma(\xi+(m-1)/m)} \right\} \\
= \;& m\int_{+0}^{\infty} \frac{e^{-t}-e^{-mt}}{t} dt = m\log m
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
\frac{\Gamma(\xi)\Gamma(\xi+1/m)\cdots\Gamma(\xi+(m-1)/m)}{\Gamma(m\xi)} &= \frac{\Gamma(1/m)\Gamma(2/m)\cdots\Gamma((m-1)/m)}{m^{m\xi-1}} \\
&= (2\pi)^{(m-1)/2} m^{1/2-m\xi},
\end{aligned}
$$

maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
\Pi_{k=0}^{m-1}\Gamma\left(\xi+i\eta+\frac{k}{m}\right) &= (2\pi)^{(m-1)/2} m^{1/2-m(\xi+i\eta)}\Gamma(m\xi)\beta^{im\eta} \\
&\quad \exp\left[im\eta \left\{ \frac{\Gamma'(m\xi)}{\Gamma(m\xi)} - \log\beta + \int_{-\infty}^{-0} \frac{y^2}{1+y^2}\frac{e^{m\xi y}}{(1-e^y)}dy \right\} \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\infty}^{-0} \left(e^{im\eta y} - 1 - \frac{im\eta y}{1+y^2} \right) \frac{e^{m\xi y}}{(1-e^y)|y|}dy \right] \\
&= (2\pi)^{(m-1)/2} m^{1/2-m(\xi+i\eta)}\Gamma(m(\xi+i\eta))
\end{aligned}
$$

untuk $\xi > 0$.

Berdasarkan uraian di atas, maka diperoleh

$$
\Pi_{k=0}^{m-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{m}\right) = m^{1/2-mz}(2\pi)^{1/2(m-1)}\Gamma(mz).
$$

Hal tersebut menunjukkan bahwa rumus perkalian Gauss dapat dibuktikan dengan menggunakan sifat ukuran Levy pada Teorema 3.2, yaitu dengan memisalkan $\alpha = 1$, $z = \xi + i\eta$ dan $m = 2, 3, \cdots$. Sedangkan, jika diganti $m = 2$, maka diperoleh rumus Legendre sebagai berikut

$$
\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z).
$$

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Misalkan X adalah peubah acak berdistribusi Gamma ($X \sim Gamma(\xi, \beta)$), maka fungsi kepekatan peluangnya sebagai berikut

$$f(x) = \frac{\beta^{\xi}}{\Gamma(\xi)} x^{\xi-1} e^{-\beta x}; \quad x > 0, \xi > 0, \beta > 0.$$

Jika ditentukan peubah acak baru, yaitu $Y = \alpha \log X$ (untuk selanjutnya Y disebut peubah acak berdistribusi Log-Gamma), maka fungsi karakteristik dari peubah acak yang berdistribusi Log-Gamma tersebut dapat direpresentasikan dalam bentuk kanonik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\xi + i\alpha u)}{\Gamma(\xi)\beta^{i\alpha u}} &= \exp\left[iu \left\{ \alpha \frac{\Gamma'(\xi)}{\Gamma(\xi)} - \alpha \log \beta + \alpha^3 \int_{-\infty}^{-0} \frac{y^2}{1 + \alpha^2 y^2} \frac{e^{\xi y}}{(1 - e^{y})} dy \right\} \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{-0} \left(e^{iuy} - 1 - \frac{iuy}{1 + y^2} \right) \frac{e^{(\xi/\alpha)y}}{(1 - e^{y/\alpha})|y|} dy \right]; \end{aligned}$$

dimana

$$\gamma = \alpha \frac{\Gamma'(\xi)}{\Gamma(\xi)} - \alpha \log \beta + \alpha^3 \int_{-\infty}^{-0} \frac{y^2}{1 + \alpha^2 y^2} \frac{e^{\xi y}}{(1 - e^{y})} dy,$$

$$\sigma^2 = 0,$$

dan

$$M(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{e^{(\xi/\alpha)s}}{(1-e^{s/\alpha})|s|} ds, \quad y < 0, \xi > 0, \alpha > 0, u = -iv, v \in \mathbb{R}.$$

Bentuk kanonik fungsi karakteristik terbagi tak hingga dari distribusi Log-Gamma tersebut dapat digunakan untuk membuktikan rumus berikut:

a. Rumus perkalian Gauss yang didefinisikan sebagai berikut

$$\Pi_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{m}\right) = m^{1/2-mz}(2\pi)^{1/2(m-1)}\Gamma(mz),$$

dimana $\alpha = 1$, $z = \xi + i\eta$ dan $m = 2, 3, \cdots$.

b. Rumus Legendre yang didefinisikan sebagai berikut

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z),$$

dimana $\alpha = 1$, $z = \xi + i\eta$ dan $m = 2$.

4.2 Saran

Distribusi Log-Gamma merupakan distribusi terbagi tak hingga. Hal tersebut menyebabkan fungsi karakteristik dari peubah acak yang berdistribusi Log-Gamma dapat direpresentasikan selain dalam bentuk representasi Levy dan representasi Levy Khinthine, juga dapat direpresentasikan dalam bentuk representasi Kolmogorov dan representasi Thorin.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bain, L.J. dan M. Engelhardt. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. Second Edition, Duxbury Press, California.

[2] Casella, G. dan R. L. Berger. 1990. *Statistical Inference*. Wadsworth Brooks/Cole, Pasific Grove, California.

[3] Gnedenko, B. V. dan A. N. Kolmogorov. 1968. *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*. Second Edition, Addison-Wesley, London.

[4] Katsuo, T. 2008. *A Note on Gamma Functions*. Japan Mathematical Research. Vol 1579:110-118.

[5] Laha, R. G. dan V. K. Rohatgi. 1979. *Probability Theory*. John Wiley Sons, New York.

[6] Lukacs, E. 1970. *Characteristic Function*. Second Edition. Griffin, London.

[7] Medina, L. A. dan V. H. Moll. 2009. *The Integrals in Gradshteyn and Ryzhik. Part 10: The Digamma Function*. Scientia, Chile. Vol 17: 45-66.

[8] Rao, M. M. dan R. J. Swift. 2006. *Probability with Applications*. Second Edition, Springer, New York.

[9] Tucker, H. G. 1967. *Probability and Mathematical Statistics*. Academic Press, London.

LAMPIRAN

Berikut akan diberikan pembuktian Teorema 2.36 tentang Representasi Levy Khinthine.

Teorema Representasi Levy Khinthine

Suatu fungsi φ adalah fungsi karakteristik dari suatu fungsi distribusi terbagi tak hingga jika dan hanya jika terdapat suatu bilangan riil γ dan fungsi takturun terbatas G yang terdefinisi pada $(-\infty, +\infty)$ sedemikian sehingga

$$\varphi(u) = \exp\left[i\gamma u + \int_{-\infty}^{\infty}\left(\exp[iux] - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}dG(x)\right] \tag{4.1}$$

dimana integran terdefinisi pada $x = 0$ dengan kontinuitas menjadi $-u^2/2$. Representasi kanonik pasangan (γ, G) ini tunggal.

Bukti. Misalkan F adalah fungsi distribusi terbagi tak hingga dengan fungsi karakteristik φ. Misalkan φ_n adalah suatu fungsi karakteristik sedemikian sehingga $\varphi(u) = (\varphi_n(u))^n$, untuk $n = 1, 2, \cdots$, dan misalkan F_n adalah fungsi distribusi dari fungsi karakteristik φ_n.

Berdasarkan Lema 2.34,

$$n(\varphi_n(u) - 1) = n\int_{-\infty}^{\infty}(\exp[iux] - 1)dF_n(x) \to \log\varphi(u) \tag{4.2}$$

untuk $n \to \infty$ secara seragam.

Misalkan

$$G_n(u) = n\int_{-\infty}^{u}\frac{x^2}{1+x^2}dF_n(x)$$

dan

$$I_n(u) = n\int_{-\infty}^{\infty}(\exp[iux]-1)\frac{1+x^2}{x^2}dG_n(x)$$

Maka (4.2) menyatakan bahwa $I_n(u) \to \log\varphi(u)$ secara seragam. Jika notasi Re menyatakan "bagian riil", maka diperoleh

$$ReI_n(u) = \int_{-\infty}^{\infty}(\cos ux - 1)\frac{1+x^2}{x^2}dG_n(x) \to \log \mid \varphi(u) \mid$$

untuk $n \to \infty$.

Perhatikan bahwa $G_n(-\infty) = 0$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa terdapat suatu fungsi takturun terbatas G dan subbarisan $\{G_{n_k}\}$ dari barisan $\{G_n\}$ sedemikian sehingga $\{G_{n_k}\} \to G$ untuk $k \to \infty$.

Akan ditunjukkan $\{G_n(+\infty)\}$ terbatas dan

$$\int_{|x|\geq T} dG_n(x) \to 0$$

untuk $T \to \infty$ secara seragam pada n.

$$A_n = \int_{|x|\leq 1} dG_n(x)$$

$$B_n = \int_{|x|>1} dG_n(x)$$

dan

$$C_n = A_n + B_n = \int_{-\infty}^{\infty} dG_n(x) = G_n(+\infty).$$

Karena $ReI_n(u) \to \log \mid \varphi(u) \mid$ seperti dijelaskan di atas, maka diperoleh suatu interval terbatas J, untuk sebarang $\varepsilon > 0$, dan untuk n yang cukup besar,

$$-\log \mid \varphi(u) \mid + \varepsilon \geq \int_{|x|\leq 1}(1-\cos ux)\frac{1+x^2}{x^2}dG_n(x) \tag{4.3}$$

dan

$$-\log|\,\varphi(u)\,|+\varepsilon \geq \int_{|x|>1}(1-\cos ux)\frac{1+x^2}{x^2}dG_n(x). \tag{4.4}$$

Perhatikan (4.3), jelas $(1-\cos ux)/(ux)^2 \to 1/2$ untuk $ux \to 0$. Jika dimisalkan $u=1$, maka $(1-\cos x)/(x)^2 > 0$ dan tidak bernilai 0 pada [-1,1]. Sehingga untuk suatu konstanta positif K_0, diperoleh

$$-\log|\,\varphi(1)\,|+\varepsilon \geq \int_{|x|\leq 1} K_0(1+x^2)dG_n(x) \geq K_0 A_n. \tag{4.5}$$

Pada (4.4), integrasikan kedua sisi sepanjang interval $J=[0,2]$, kemudian dibagi 2 dan dengan menggunakan teorema Fubini, diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^2(-\log|\,\varphi(u)\,|)du+\varepsilon &\geq \int_{|x|>1}\left(\int_0^2(1-\cos ux)du\right)\frac{1+x^2}{x^2}dG_n(x)\\ &\geq \int_{|x|>1}\left(1-\frac{\sin 2x}{2x}\right)dG_n(x) > K_1 B_n\end{aligned}$$

untuk $K_1>0$. Karena $\{A_n\}$ dan $\{B_n\}$ terbatas, maka

$$C_n = \int_{-\infty}^{\infty} dG_n(x).$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang $\zeta > 0$ terdapat suatu T sedemikian sehingga untuk n yang cukup besar berlaku

$$\int_{|x|\geq T} dG_n(x) < \zeta.$$

Seperti sebelumnya, integrasikan kedua sisi pada ketaksamaan (4.4) sepanjang interval $J=[0,2/T]$, bagi dengan $2/T$ dan gunakan teorema Fubini, sehingga diperoleh untuk semua $T>0$,

$$\frac{T}{2}\int_0^{2/T}(-\log|\,\varphi(u)\,|)du+\varepsilon \;\geq\; \int_{|x|\geq T}\left(1-\frac{\sin(2x/T)}{2x/T}\right)dG_n(x)$$

dimana ketaksamaan (4.4) akan berlaku apabila integral $\{|x| > 1\}$ diganti dengan integral $\{|x| > T\}$. Untuk setiap $\{|x| \geq T\}$ atau $\{|x|/T \geq 1\}$ terdapat $K_2 > 0$ sedemikian sehingga

$$1 - (\sin(2x/T))/(2x/T) \geq K_2,$$

dan karena

$$\frac{T}{2}\int_0^{2/T}(-\log|\ \varphi(u)\ |)du + \varepsilon \ \ \geq \ \ K_2\int_{|x|\geq T} dG_n(x)$$

untuk semua n yang cukup besar saling bebas terhadap T. Karena $|\ \varphi(0)\ |= 1$ dan $\log|\ \varphi(u)\ |$ kontinu di 0, diperoleh T yang cukup besar, sehingga

$$\frac{T}{2}\int_0^{2/T}(-\log|\ \varphi(u)\ |)du < \varepsilon.$$

Oleh sebab itu, untuk semua n dan T cukup besar,

$$\int_{|x|\geq T} dG_n(x) < \frac{2\varepsilon}{K_2}.$$

Kemudian, ada subbarisan dari $\{G_n\}$ yang konvergen secara lengkap. Misalkan $\{G_{n_k}\}$ adalah subbarisan dan misalkan G fungsi takturun terbatas sedemikian sehingga $\{G_{n_k}\} \to G$ secara lengkap.

Untuk u tertentu, $A(x, u)$ pada Lema 2.35 adalah fungsi kontinu terbatas pada x.

Berdasarkan teorema Helly-Bray

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(x,u)dG_{n_k}(x) \to \int_{-\infty}^{\infty} A(x,u)dG(x)$$

untuk $k \to \infty$.

Notasikan

$$\gamma_{n_k} = \int_{(-\infty,0)\cup(0,\infty)} \frac{1}{x}dG_{n_k}(x) = n_k\int \frac{x}{1+x^2}dF_{n_k}(x).$$

sehingga

$$I_{n_k}(u) = \int A(x,u)dG_{n_k}(x) + iu\gamma_{n_k},$$

dan oleh sebab itu, ada bilangan γ sedemikian sehingga $\gamma_{n_k} \to \gamma$ untuk $k \to \infty$. Karena $I_{n_k}(u) \to \log \varphi(u)$ untuk $k \to \infty$, diperoleh

$$\varphi(u) = \exp\left[i\gamma u + \int A(x,u)dG_n(x)\right],$$

yang membuktikan bahwa φ terwakilkan oleh persamaan (4.1).

Sebaliknya, anggap φ fungsi yang didefinisikan pada persamaan (4.1). Akan ditunjukkan bahwa φ fungsi karakteristik dari suatu fungsi distribusi terbagi tak hingga.

Untuk ini, akan dilihat 2 kasus berikut:

Kasus 1: Misalkan

$$0 < \lambda = \int_{-\infty}^{-0} + \int_{+0}^{\infty} \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) < \infty.$$

Misalkan $I = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$,

$$H(x) = \frac{1}{\lambda} \int_{I \cap (-\infty, x)} \frac{1+x^2}{x^2} dG(x),$$

dan misalkan $\sigma^2 = G(+0) - G(-0)$. Maka H adalah fungsi distribusi, dan jika $h(u)$ adalah fungsi karakteristik, maka

$$\varphi(u) = \exp[i\gamma' u - (1/2)\sigma^2 u^2 + \lambda(h(u) - 1)],$$

dimana

$$\gamma' = \gamma - \int_I (1/x)dG(x).$$

Berdasarkan Teorema 2.30 dan Teorema 2.33, maka $\varphi(u)$ adalah fungsi karakteristik dari suatu fungsi distribusi terbagi tak hingga. Pada kasus $\lambda = 0, \sigma^2 > 0$, maka $\varphi(u)$ adalah fungsi karakteristik dari distribusi $N(\gamma, \sigma^2)$ yang merupakan distribusi terbagi tak hingga.

Kasus 2: Pada kasus ini,

$$\int_I \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) = \infty.$$

Misalkan $\{x_n\}$ adalah suatu barisan bilangan positif sedemikian sehingga $x_n > x_{n+1}$ untuk semua n dan $x_n \to 0$ untuk $n \to \infty$. Misalkan

$$A_1 = (-\infty, -x_1] \cup [x_1, \infty)$$

dan

$$A_n = (-x_{n-1}, -x_n] \cup [x_n, x_{n-1})$$

untuk $n = 2, 3, \cdots$, dan sehingga dapat didefinisikan

$$\lambda_n = \int_{A_n} \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) > 0$$

untuk setiap n. Perhatikan bahwa $(-\infty, 0) \cup (0, \infty) = I = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Misalkan

$$F_n(x) = \lambda_n^{-1} \int_{A_n \cap (-\infty, x]} \frac{1+x^2}{x^2} dG(x).$$

Jelas bahwa F_n adalah fungsi distribusi.

Misalkan $\{Z, X_{n,j}, Y_n, n = 1, 2, \cdots, j = 1, 2, \cdots\}$ adalah peubah acak saling bebas sedemikian sehingga distribusi dari peubah acak Z adalah $N(0, \sigma^2)$, distribusi dari peubah acak $X_{n,j}$ adalah F_n dan distribusi dari peubah acak Y_n adalah Poisson dengan $E[Y_n] = \lambda_n$. Misalkan

$$X_n = \gamma + Z + \Sigma_{m=1}^{n}\left(X_{m,1} + \cdots + X_{m,Y_m} - \int_{A_m} x^{-1} dG(x)\right).$$

Berdasarkan Teorema 2.33, fungsi karakteristik $\varphi_n(u)$ dari peubah acak X_n adalah

$$\varphi_n(u) = \exp\left[i\gamma u - (1/2)\sigma^2 u^2 + \int_{-\infty}^{-X_n} + \int_{X_n}^{\infty} A(x,u)dG(x)\right]$$

dimana $A(x,u)$ seperti yang telah didefinisikan pada Lema 2.35 di atas. Jelas bahwa $\varphi_n(u) \to \varphi(u)$ untuk $n \to \infty$ untuk setiap u. Selanjutnya, akan diperlihatkan $\varphi(u)$ seperti yang telah didefinisikan pada persamaan (4.1) di atas adalah kontinu. Berdasarkan teorema Kekontinuan, $\varphi(u)$ adalah fungsi karakteristik. Sedangkan, menurut Teorema Kekonvergenan secara lengkap, $\varphi(u)$ adalah fungsi karakteristik dari suatu fungsi distribusi terbagi tak hingga.

Sebelum membuktikan ketunggalan dari r dan G, perhatikan bahwa

$$\log|\varphi(u)| = i\gamma u + \int_{-\infty}^{\infty} A(x,u)dG(x).$$

Berdasarkan fakta bahwa

$$\log|\varphi(u)| - i\gamma u - \int_{-\infty}^{\infty} A(x,u)dG(x)$$

adalah kontinu dan bernilai nol pada $u = 0$, maka $\log|\varphi(u)|$ adalah kontinu.

Selanjutnya akan dibuktikan ketunggalan dari r dan G. Untuk membuktikan ketunggalan dari r, cukup dibuktikan ketunggalan dari G.

Misalkan $\phi(u)$ didefinisikan sebagai berikut

$$-\phi(u) = \int_{u-1}^{u+1} \log\varphi(\tau)d\tau - 2\log\varphi(u).$$

Jelas bahwa φ secara tunggal menentukan ϕ. Berdasarkan teorema Fubini diperoleh

$$\phi(u) = 2\int_{-\infty}^{\infty} \exp[iux]\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)\frac{1+x^2}{x^2}dG(x).$$

Sehingga sangat mudah memeriksa $(1-\frac{\sin x}{x})\frac{1+x^2}{x^2} > 0$ untuk semua x. Oleh karena itu, jika didefinisikan

$$\Phi(x) = 2\int_{-\infty}^{x}\left(1 - \frac{\sin y}{y}\right)\frac{1+y^2}{y^2}dG(y),$$

maka dengan mudah diperoleh

$$\Phi(u) = 2\int_{-\infty}^{\infty} \exp[iux]d\Phi(x).$$

Catatan: Φ adalah fungsi takturun karena Φ merupakan integral dari fungsi taknegatif.

Karena integral yang mendefinisikan Φ adalah positif, maka Φ secara tunggal menentukan G. Tetapi, dengan menggunakan teorema Ketunggalan, ϕ secara tunggal menentukan Φ. Sehingga φ secara tunggal menentukan G dan γ. $\square$