

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Misalkan didefinisikan penjumlahan peubah acak sebagai berikut

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_N \quad (5.1)$$

untuk semua peubah acak $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ sebaran sebaran yang berdistribusi yang sama dan identik(iid) dan N adalah peubah acak yang berdistribusi Binomial Negatif, maka peubah acak S disebut sebaran Binomial Negatif Majemuk. Sebaran Binomial Negatif Majemuk memiliki sifat-sifat antara lain nilai harapan, variansi, fungsi pembangkit momen, *skewness*, kurtosis dan fungsi karakteristik. Dengan menggunakan fungsi karakteristik dari sebaran Binomial Negatif Majemuk akan ditunjukkan keterbagian dari sebaran ini.

Nilai harapan dari sebaran Binomial Negatif Majemuk adalah

$$E(S) = \frac{r(1-p)}{p} E(X)$$

Variansi dari sebaran Binomial Negatif Majemuk adalah

$$Var(S) = \frac{r(1-p)}{p} [Var(X) + \frac{1}{p} [E(X)]^2]$$

Adapun fungsi Pembangkit momennya adalah

$$M_S(t) = \left[\frac{p}{(1 - qM_X(t))} \right]^r$$

dimana $q = 1 - p$.

Skewness dan *Kurtosis* dari sebaran Binomial Negatif Majemuk adalah

$$Skew[S] = \left(\frac{p}{rq} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left(f_1 - \frac{3rqE(X)}{p} f_2 + 2\left(\frac{rq}{p}\right)^2 E(X) \right)}{\left(Var(X) + \frac{1}{p} E(X)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$Kurt[S] = \frac{1}{rq} \left[\frac{rq}{p^2} \left[rqf_3 - 4rqE(X)f_1 + \frac{6r^2q^2E(X)}{p} f_2 + \frac{6(rq)^3E(X)^4}{p^2} \right] \right]$$

dimana

$$\begin{aligned} f_1 &= (r-1)(r-2) \frac{q^2 E(X)^3}{p^2} + 3r(r-1) \frac{qE(X)}{p^2} [E(X^2) + 2qE(X)^2] \\ &\quad + \frac{E(X^3)}{p} + \frac{qE(X)E(X^2)[4p-1]}{p^2} - \frac{6q^2 E(X)^3}{p^2} \\ f_2 &= \frac{3(rq)E(X)}{p} \left[\frac{q(E(X^2) + (E(X))^2)}{p^3} + (r-1)E(X) \right] \\ f_3 &= 3(r-1)(r-2)(r-3) \frac{q^3 E(X)^4}{p^2} + 6(r-1)(r-2) \frac{q^2 E(X)^2}{p^2} [E(X^2) + 2qE(X)^2] \\ &\quad + 3(r-1) \frac{q}{p^2} [E(X^2) + 2qE(X)^2] + 4(r-1) \\ &\quad \frac{qE(X)}{p} \left[E(X^3) + \frac{qE(X)E(X^2)}{p} \left(\frac{1+4p}{p} \right) - \frac{6q^2 E(X)^3}{p^2} \right] \\ &\quad + \frac{E(X^4)}{p} + \frac{6qE(X)E(X^3) + 3qE(X^2)^2 - 6q^2 E(X)^2 E(X^2)}{p} \\ &\quad - \frac{22q^2 E(X)^2 E(X^2)}{p^2} - \frac{24(qE(X))^4}{p^2} \end{aligned}$$

Fungsi Karakteristik dari sebaran peubah acak S dilambangkan dengan

$\varphi_S(t)$ adalah

$$\varphi_S(t) = \left[\frac{p}{(1 - (1-p)\varphi_X(t))} \right]^r$$

Dengan memilih $\varphi_{S_n}(t) = \left[\frac{p}{(1 - (1-p)\varphi_X(t))} \right]^{\frac{r}{n}}$ untuk n bilangan bulat positif yang memenuhi $[\varphi_{S_n}(t)]^n = \varphi_S(t)$ maka dapat disimpulkan fungsi karakteristik dari sebaran Binomial Negatif Majemuk $(r/n, p)$ merupakan fungsi karakteristik terbagi tak hingga.

Contoh dari sebaran Binomial Negatif Majemuk adalah sebaran Binomial Negatif-Ekspensial dan sebaran Binomial Negatif-Binomial Negatif. Sebaran Binomial Negatif-Ekspensial adalah peubah acak yang terbentuk dari penjumlahan peubah acak-peubah acak Ekspensial dimana banyaknya menyebar menurut sebaran Binomial Negatif. Sedangkan sebaran Binomial Negatif-Binomial Negatif adalah peubah acak yang terbentuk dari penjumlahan peubah acak-peubah acak Binomial Negatif dimana banyaknya juga menyebar menurut sebaran Binomial Negatif

Sifat-sifat sebaran Binomial Negatif-Ekspensial antara lain:

1. Nilai harapan sebaran Binomial Negatif-Ekspensial

$$E(S) = \frac{r(1-p)}{\lambda p}$$

2. Nilai Variansi sebaran Binomial Negatif-Ekspensial

$$Var(S) = \frac{r(1-p)(p+1)}{(p\lambda)^2}$$

3. Fungsi pembangkit momen sebaran Binomial Negatif-Ekspensial

$$M_S(t) = \left[\frac{p\lambda - pt}{p\lambda - t} \right]^r$$

4. *Skewness* sebaran Binomial Negatif-Ekspensial

$$Skew(S) = \left[\frac{r(1-p)}{(1+p)} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{p^3 \lambda^3 (1+p)} [(r-1)(r-2)(1-p)^2 + 6(r-1)(1-p) - 3r(r-1)(1-p)^2 - 6r(1-p) + 2r^2(1-p)^2 + 6]$$

5. Kurtosis sebaran Binomial Negatif-Ekspensial

$$\begin{aligned}
Kurt[S] = & \frac{p^3 \lambda^3}{rq(1+p)^2} \left[\frac{1}{(p\lambda)^3} [(r-1)q[(r-2)(r-3)(q)^2 + 12(r-2)q + 36] + 24] \right. \\
& - \frac{4}{(p\lambda)^2} [(r-1)(r-2)(q)^2 + 6(r-1)q + 6] + \frac{4}{p\lambda} r(r-1) \frac{q^2}{(p\lambda)^2} \\
& \left. - 3 \frac{(rq)^3}{(p\lambda)^3} \right]
\end{aligned}$$

6. Fungsi Karakteristik sebaran Binomial Negatif-Ekspensial



$$\varphi_S(t) = \left[\frac{p}{(1 - q \frac{\lambda}{\lambda - it})} \right]^r$$

Dengan memilih $\varphi_{S_n}(t) = \left[\frac{p}{(1 - q \frac{\lambda}{\lambda - it})} \right]^{\frac{r}{n}}$ untuk n bilangan bulat positif yang memenuhi $[\varphi_{S_n}(t)]^n = \varphi_S(t)$ maka dapat disimpulkan fungsi karakteristik dari sebaran Binomial Negatif-Ekspensial $(r/n, p, \lambda)$ merupakan fungsi karakteristik terbagi tak hingga.

Sifat-sifat sebaran Binomial Negatif-Binomial Negatif antara lain:

1. Nilai harapan sebaran Binomial Negatif-Binomial Negatif

$$E(S) = \left[\frac{r(1-p)}{p} \right]^2$$

2. Nilai Variansi sebaran Binomial Negatif-Binomial Negatif

$$Var(S) = \left[\frac{r(1-p)}{p} \right]^2 \left[\frac{p + r(1-p)}{p^2} \right]$$

3. Fungsi pembangkit momen sebaran Binomial Negatif-Binomial Negatif

$$M_S(t) = \left[\frac{p(1 - (1-p)e^t)^r}{(1 - (1-p)e^t)^r - (1-p)p^r} \right]^r$$

4. *Skewness* sebaran Binomial Negatif-Binomial Negatif

$$Skew(S) = \left(\frac{qr}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{f_1 - \frac{3(qr)^2 f_2}{p^2} + 2\frac{(qr)^3}{p^3}}{\left(\frac{qr}{p^2 + \frac{(qr)^2}{p^3}}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

5. Kurtosis sebaran Binomial Negatif-Binomial Negatif

$$Kurt(S) = \frac{1}{rq} \left[\frac{rq}{p^2} \left[rqf_3 - \frac{4rq^2}{p} f_1 + \frac{6r^3 q^3}{p^2} f_2 + \frac{6(rq)^7}{p^6} \right] \right]$$

dimana

$$\begin{aligned} f_1 &= (r-1)(r-2) \frac{q^5 r^3}{p^5} + 3r(r-1) \frac{q^2 r}{p^3} [qr(1+qr)] + \frac{2q^3 r^2}{p^2} \\ &\quad + \frac{qrh_1}{p^2} + \frac{q^4 r^2 (1+qr)(4p-1)}{p^3} - \frac{6q^5 r^3}{p^5} \\ f_2 &= \frac{3(qr)^2}{p^2} \left[\frac{q^2 r (1+qr)}{p^3} + \frac{(qr)^2}{p^5} + \frac{qr(r-1)}{p^4} \right] \\ f_3 &= 3(r-1)(r-2)(r-3) \frac{q^7 r^4}{p^6} + 6(r-1)(r-2) \frac{q^4 r^2}{p^4} [qr(1+qr) + \frac{2q^3 r^2}{p^2}] \\ &\quad + 3(r-1) \frac{q}{p^2} [qr(1+qr) + \frac{2(qr)^2}{p^2}] + 4(r-1) \frac{q^2 r}{p^2} \\ &\quad \left[\frac{qrh_1}{p^2} + \frac{q^3 r^2 (1+q)}{p^2} \frac{1+4p}{p} - \frac{6q^5 r^3}{p^5} \right] \\ &\quad + \frac{qrh_2}{p^2} + \frac{6q^3 r^2 (1+qr)(1+4p)}{p^2} + \frac{3q^3 r^2 (1+qr)^2}{p^2} - \frac{6q^4 r (1+qr)}{p^2} \\ &\quad - \frac{22q^4 r^2 (1+qr)}{p^3} - \frac{24q^5 r^5}{p^6} \end{aligned}$$

6. Fungsi Karakteristik sebaran Binomial Negatif-Binomial Negatif

$$\varphi_S(t) = \left[\frac{p(1 - (1-p)e^{it})^r}{(1 - (1-p)e^{it})^r - (1-p)p^r} \right]^r$$

Dengan memilih $\varphi_{S_n}(t) = \left[\frac{p(1-(1-p)e^{it})^r}{(1-(1-p)e^{it})^r - (1-p)p^r} \right]^{\frac{r}{n}}$ untuk n bilangan bulat positif yang memenuhi $[\varphi_{S_n}(t)]^n = \varphi_S(t)$ maka dapat disimpulkan fungsi karakteristik dari sebaran Binomial Negatif-Binomial Negatif $(r/n, p)$ merupakan fungsi karakteristik terbagi tak hingga.

5.2 Saran

Pada penelitian ini hanya dibahas tentang sifat-sifat dari sebaran Binomial Negatif Majemuk antara lain nilai harapan, variansi, fungsi pembangkit momen, *skewness*, kurtosis dan fungsi karakteristik. Selanjutnya telah dapat ditentukan keterbagian tak hingga dengan menggunakan fungsi karakteristik. Untuk pembahasan lebih lanjut, pembaca dapat lebih mengkaji lebih dalam tentang keterbagian tak hingga sebaran Binomial Negatif Majemuk seperti Representasi Kanonik untuk fungsi karakteristik dari sebaran Binomial Negatif Majemuk

