

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada saat ini, kajian struktur aljabar yang terkait dengan graf menjadi hasil yang menarik. Hal ini dapat dilihat dari beberapa kajian yang ditulis oleh beberapa peneliti, yaitu kajian graf yang terkait dengan grup.

Beberapa kajian itu dapat dilihat pada [1], yaitu mengkaji graf dari grup non-abelian yang menghasilkan sifat bahwa jika dua buah graf isomorfis, maka orde dari grup dari dua buah graf itu sama. Hasil lain yang diperoleh pada [1] ini adalah graf yang berasal dari grup nilpoten berhingga yang isomorfis dengan graf dari sebarang grup, sehingga banyaknya unsur kedua grup sama dan grup sebarang yang isomorfis tersebut adalah grup nilpoten juga.

Balakrishnan [3], mengkaji graf dari grup dengan melibatkan unsur *center*, yaitu unsur-unsur pada grup yang komutatif dengan semua unsur dalam grup tersebut. Pada [3] ini, struktur graf ditentukan oleh graf yang *regular* dan *biregular*.

Kajian yang similar dengan [3], ditemukan pada [12], jika pada [3] mengkaji graf dari grup dengan melibatkan unsur *center*, maka pada [12] melibatkan unsur *non-center*. Pada kajian ini dihasilkan definisi graf yang terkait dengan unsur *non-center* dari suatu grup yang dinamakan graf *non-centralizer*.

Berdasarkan definisi graf dari grup yang diberikan pada [12] diperoleh bahwa diameter graf dari grup tanpa unsur *center* adalah 2 dengan panjang *cycle* terpendek adalah 3. Selanjutnya dengan menggunakan definisi ini diperoleh bahwa graf dari grup *non abelian* yang unsur centernya lebih dari 3 bukan merupakan graf planar.

Definisi lain dari graf yang terkait dengan grup, diberikan oleh [9]. Definisi graf dari grup pada [9] ini tidak dikaitkan dengan unsur-unsur seperti *center* atau lainnya. Definisi graf pada [9] ini hanya melibatkan hubungan dua unsur dalam grup yang menghasilkan unsur identitas (lebih lanjut definisi ini dapat dilihat pada Bab 2).

Tesis ini menggunakan definisi graf yang terkait pada grup yang didefinisikan oleh [9], karena grup yang digunakan adalah grup siklik dan grup ini tidak mengkaji *center* atau unsur-unsur dengan kriteria lainnya. Misalkan G adalah grup dengan unsur identitas e dan $H = (V, E)$ adalah graf yang terkait dengan grup G . Graf $H = (V, E)$ memenuhi pernyataan berikut: elemen-elemen dari V adalah elemen-elemen dari grup G , dan elemen-elemen dari E adalah sisi-sisi yang menghubungkan dua elemen x dan y di G , jika $xy = e$; serta sisi-sisi yang menghubungkan setiap elemen di G dengan unsur identitas e . Graf $H = (V, E)$ disebut graf identitas dari grup G . Definisi graf yang terkait dengan grup ini menyebabkan bentuk graf yang berpola, oleh karena itulah definisi ini digunakan.

Grup yang akan dikaji dalam tesis ini adalah grup siklik berorde n . Grup tersebut memiliki orde atau banyaknya unsur yang dibedakan berdasarkan

banriyak titik yang ganjil dan yang genap. Dengan demikian peneliti berasumsi bahwa terdapat dua karakteristik dari grup ini dengan memperhatikan banyaknya unsur pada grup ini. Oleh karena itu, peneliti berhipotesis bahwa kajian grup ini dapat dikembangkan menjadi kajian graf dengan sifat-sifat khusus.

Tesis ini juga akan mengkaji karakteristik-karakteristik yang diperoleh dari grup fundamental pertama yang diperoleh. Defenisi grup fundamental pertama pada tesis ini menggunakan defenisi pada [2]. Lebih lanjut, pada tesis ini juga akan mengkaji karakteristik-karakteristik dari unsur pembangun (*generator*) dari grup fundamental pertama yang diperoleh dari grup siklik berhingga.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang, maka yang menjadi rumusan masalah pada tugas akhir ini adalah :

1. Bagaimanakah karakteristik graf dari grup siklik dengan n adalah ganjil dan genap?
2. Bagaimanakah pengkontruksian grup fundamental dari grup siklik berhingga?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengkaji grup fundamental pertama dari grup siklik berhingga dengan menentukan :

1. Karakteristik graf dari grup siklik dengan n adalah ganjil dan genap.
2. Semua graf berarah dari graf identitas grup siklik berhingga.
3. Semua pohon pembangun dari graf identitas grup siklik berhingga.
4. Grup fundamental pertama dari grup siklik berhingga berdasarkan pohon pembangun yang diperoleh. Grup fundamental pertama berdasarkan graf identitas dari grup siklik.
5. Banyaknya *free generator* pada grup fundamental pertama yang diperoleh.

1.4 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut, yaitu: BAB I Pendahuluan, memberikan gambaran singkat tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian dan sistematika penulisan. BAB II Landasan Teori, bagian ini berisi teori-teori yang digunakan sebagai acuan dasar dalam pembahasan. BAB III GRUP FUNDAMENTAL PERTAMA DARI GRUP SIKLIK BERHINGGA, bagian ini berisikan teori-teori yang diperoleh mengenai Graf Identitas dari Grup Siklik Berhingga, Grup Fundamental Pertama dari Grup Siklik Berhingga, dan *Free Generator* dari Grup Fundamental Pertama dari Grup Siklik Berhingga. BAB IV Kesimpulan dari hasil pembahasan.