# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Salah satu persamaan beda-diferensial (*difference-differential*) yang menjelaskan berbagai fenomena penting di bidang fisika, kimia dan biologi adalah persamaan Schrödinger nonlinier diskrit (SNLD). Sebagai contoh, persamaan SNLD menjelaskan perambatan sinar optik pada larik pandu gelombang (*waveguide arrays*) yang tersusun atas senyawa *aluminium gallium arsenide* (AlGaAs) [15]. Persamaan SNLD juga mendeskripsikan beberapa fenomena dalam fisika atom, molekul dan osilator tak-harmonik [20].

Secara umum, persamaan SNLD diberikan oleh [20]

$$\mathrm{i}\dot{\Phi}_n = -\varepsilon(\Phi_{n+1} - 2\Phi_n + \Phi_{n-1}) + F(\Phi_{n+1}, \Phi_n, \Phi_{n-1}), \qquad (1.1.1)$$

dimana $\Phi_n \equiv \Phi_n(t) \in \mathbb{C}$ adalah fungsi gelombang pada waktu $t \in \mathbb{R}^+$ dan *site* $n \in \mathbb{Z}$, $\dot{\Phi}_n$ menyatakan turunan fungsi $\Phi_n$ terhadap $t$, $\varepsilon > 0$ menyatakan konstanta pengikat (*coupling constant*) dan $F$ merupakan suku nonlinier. Suku nonlinier $F$ pada persamaan (1.1.1) mempunyai beberapa bentuk, diantaranya [20]:

1. Kenonlinieran bertipe kubik:

$$F_{cub} = -|\Phi_n|^2\Phi_n. \qquad (1.1.2)$$

2. Kenonlinieran bertipe kuintik:

$$F_{quin} = |\Phi_n|^4 \Phi_n. \tag{1.1.3}$$

3. Kenonlinieran bertipe Ablowitz-Ladik (AL):

$$F_{AL} = -\frac{1}{2}|\Phi_n|^2(\Phi_{n+1} + \Phi_{n-1}). \tag{1.1.4}$$

Salah satu sifat menarik dari persamaan SNLD (1.1.1) adalah eksistensi solusi soliton yang dimilikinya. Soliton merupakan solusi persamaan beda-diferensial nonlinier atau persamaan diferensial parsial nonlinier yang mempunyai profil terlokalisasi yang tetap mempertahankan bentuknya [35]. Di awal tahun 1976, Ablowitz dan Ladik berhasil menunjukkan bahwa persamaan SNLD dengan kenonlinieran bertipe AL (1.1.4) bersifat *integrable*, yaitu dapat diselesaikan solusi solitonnya secara eksak [1]. Solusi soliton pada persamaan SNLD dengan kenonlinieran bertipe AL ditentukan dengan menggunakan metode *Inverse Scattering Transform* (IST) yang merupakan sebuah metode penyelesaian persamaan diferensial nonlinier yang dikembangkan pertama kali oleh Gardner dkk pada tahun 1967 [16].

Pada tahun 1994, MacKay dan Aubry membuktikan eksistensi soliton pada persamaan SNLD dengan kenonlinieran bertipe kubik (1.1.2) untuk konstanta pengikat ($\varepsilon$) lemah [24]. Selanjutnya pada tahun 2006, Gonzáles dkk menemukan solusi soliton pada persamaan SNLD dengan kombinasi bertipe kubik (1.1.2) dan kuintik (1.1.3), atau dikenal dengan istilah kenonlinieran kubik-kuintik [17]. Secara khusus, persamaan SNLD kubik-kuintik muncul berdasarkan hasil temuan yang menyatakan bahwa efek nonlinier pada beberapa material pandu gelombang lebih signifikan apabila dimodelkan dengan penambahan kenonlinieran kuintik.

Dalam menentukan solusi soliton pada persamaan SNLD (1.1.1), metode aproksimasi variasional (selanjutnya disingkat AV) merupakan salah satu metode pendekatan analitik yang paling sering digunakan. Metode ini dikembangkan berdasarkan prinsip Hamiltonian yang menyatakan bahwa persamaan gerak suatu sistem ditentukan oleh titik-titik kritis dari integral Lagrangiannya (yaitu selisih antara energi kinetik dan energi potensial sistem tersebut) [21]. Keberhasilan metode ini sangat bergantung pada pemilihan ansatz, yaitu bentuk analitik percobaan dari solusi yang ingin dicari [23].

Pada kasus persamaan SNLD kubik, Aceves dkk [3] menggunakan metode AV untuk mengaproksimasi soliton *onsite*, yaitu soliton yang berpusat pada satu *site*. Kemudian Cuevas dkk [13] dan Kaup dkk [19] memperluas penerapan metode AV pada persamaan SNLD kubik untuk menghampiri soliton *intersite*, yaitu soliton yang berpusat di antara dua *site*. Selanjutnya, Chong dkk [11] menggunakan metode AV untuk mengaproksimasi bifurkasi antara soliton *onsite* dan soliton *intersite* pada persamaan SLND kubik-kuintik. Ansatz yang dipakai oleh Chong dkk ini kemudian diperbaiki oleh Asfa dkk [4] sehingga diperoleh aproksimasi soliton *onsite* yang lebih baik. Lebih lanjut, Azadi dkk menggunakan metode AV untuk mengaproksimasi solusi soliton *intersite* pada persamaan SNLD dengan kombinasi kenonlinieran bertipe kubik dan bertipe AL [5].

Salah satu langkah dalam mengaproksimasi solusi soliton pada persamaan SNLD dengan menggunakan metode AV adalah menentukan Lagrangian dari sistem. Namun dalam beberapa kasus, Lagrangian dari suatu sistem sangat sulit untuk diformulasikan. Dalam [29], Rusin dkk mengembangkan metode AV sedemikian sehingga tidak diperlukan formulasi Lagrangian.

Pengembangan lebih lanjut dari persamaan SNLD adalah ketika suku nonlinier $|\Phi_n|^2$ diganti dengan $\Phi_n\overline{\Phi}_{-n}$, dimana $\overline{\Phi}_{-n}$ menyatakan kompleks konjugat dari $\Phi_{-n}$. Suku nonlinier yang demikian dinamakan suku nonlinier nonlokal, artinya fungsi gelombang di *site* $n$ selalu membutuhkan informasi dari *site* berlawanan $-n$ [30]. Dengan demikian persamaan SNLD kubik nonlokal diberikan oleh

$$\mathrm{i}\dot{\Phi}_n = -\varepsilon(\Phi_{n+1} - 2\Phi_n + \Phi_{n-1}) - \Phi_n^2\overline{\Phi}_{-n}, \tag{1.1.5}$$

sedangkan persamaan SNLD AL nonlokal diberikan oleh

$$\mathrm{i}\dot{\Phi}_n = -\varepsilon(\Phi_{n+1} - 2\Phi_n + \Phi_{n-1}) - \frac{1}{2}\Phi_n\overline{\Phi}_{-n}(\Phi_{n+1} + \Phi_{n-1}). \tag{1.1.6}$$

Sarma dkk pada tahun 2014 memperkenalkan persamaan SNLD kubik nonlokal (1.1.5) [30]. Ablowitz dan Musslimani [2] di lain pihak mengkaji persamaan SNLD AL nonlokal (1.1.6) dan kemudian membuktikan bahwa persamaan tersebut *integrable*.

Selanjutnya kajian tentang soliton pada persamaan SNLD kubik dikembangkan oleh Syafwan dkk dalam menjelaskan dinamika rangkaian osilator takharmonik pada sistem nano elektromekanik [34]. Pada sistem ini, tegangan arus dc (*direct current*) diberikan untuk menghasilkan ikatan antar osilator yang saling bertetangga, sedangkan tegangan arus lemah ac (*alternating current*) digunakan untuk mengeksitasi getaran pada osilator secara parametrik, artinya eksitasinya berasal dari dalam sistem. Dengan menggunakan metode *multiple scales*, Syafwan dkk berhasil mereduksi persamaan yang memodelkan osilasi sistem nano elektromekanik tersebut menjadi persamaan SNLD kubik dengan penambahan *parametric driving* yang diberikan oleh [34]

$$\mathrm{i}\dot{\Phi}_n = -\varepsilon(\Phi_{n+1} - 2\Phi_n + \Phi_{n-1}) + \Lambda\Phi_n + \sigma\overline{\Phi}_n - |\Phi_n|^2\Phi_n. \tag{1.1.7}$$

Dalam hal ini, konstanta pengikat ($\varepsilon$) dan *parametric driving* ($\sigma$) dengan frekuensi $\Lambda$ masing-masing berhubungan dengan tegangan arus dc (*direct current*) dan ac (*alternating current*) yang diberikan pada sistem nano elektromekanik.

Termotivasi dari pengembangan kajian-kajian yang disebutkan di atas, maka pada penelitian ini akan ditinjau persamaan SNLD nonlokal dengan penambahan *parametric driving* yang diberikan oleh

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\dot{\Phi}_n &= -\varepsilon(\Phi_{n+1} - 2\Phi_n + \Phi_{n-1}) + \Lambda\Phi_n + \sigma\overline{\Phi}_n - \frac{\gamma}{2}\Phi_n\overline{\Phi}_{-n}(\Phi_{n+1} + \Phi_{n-1}) \\ &\quad -(1-\gamma)\Phi_n^2\overline{\Phi}_{-n}, \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

dimana $\sigma > 0$ menyatakan *parametric driving* dengan frekuensi $\Lambda$ dan $\gamma \in [0, 1]$ menyatakan konstanta interpolasi antara persamaan SNLD kubik nonlokal (1.1.5) pada saat $\gamma = 0$ dan persamaan SNLD AL nonlokal (1.1.6) pada saat $\gamma = 1$.

Persamaan (1.1.8) menarik untuk dikaji karena dapat menjelaskan transisi antara persamaan SNLD AL nonlokal yang bersifat *integrable* dengan persamaan SNLD kubik nonlokal yang bersifat *nonintegrable* di bawah pengaruh *parametric driving*. Penelitian tentang topik ini merupakan pengembangan dari kajian yang telah dilakukan Putra dkk dalam mengaproksimasi soliton *onsite* pada persamaan (1.1.8) dengan menggunakan metode AV untuk $\sigma = 0$ (tanpa *parametric driving*) [27] dan dengan penambahan *parametric driving* untuk kasus konstanta interpolasi $\gamma$ bernilai kecil [28]. Berdasarkan kajian yang telah dilakukan pada persamaan SNLD kubik dengan penambahan *parametric driving* diperoleh hasil bahwa *parametric driving* dapat membuat soliton *onsite* yang awalnya stabil menjadi tidak stabil [33], dan membuat soliton *intersite* yang awalnya tidak stabil menjadi stabil [34]. Dalam penelitian ini juga akan ditinjau pengaruh *parametric driving* terhadap kestabilan soliton pada persamaan

(1.1.8) dengan menggunakan metode AV.

## 1.2 Rumusan Masalah

Dalam penelitian ini akan dikaji bagaimana memperoleh aproksimasi solusi soliton pada persamaan (1.1.8) dan memeriksa kestabilannya secara analitik dengan menggunakan metode AV yang dikembangkan berdasarkan referensi [29].

## 1.3 Pembatasan Masalah

Penerapan metode AV pada persamaan (1.1.8) hanya dibatasi untuk kasus soliton tipe *onsite*.

## 1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah :

1. Menentukan hampiran solusi soliton pada persamaan (1.1.8) dengan menggunakan metode AV.
2. Menganalisis kestabilan dari solusi yang diperoleh dengan menggunakan metode AV.
3. Membandingkan hasil-hasil AV yang diperoleh dengan hasil-hasil numerik.

## 1.5 Sistematika Penulisan

Tulisan ini dibagi atas empat bab. Pada Bab I diberikan latar belakang penelitian, rumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian dan sistematika penulisan. Teori dasar dan materi penunjang diberikan pada Bab II. Selanjutnya pada Bab III dibahas penerapan metode AV dalam menentukan hampiran solusi soliton *onsite* beserta analisis kestabilannya dan perhitungan numerik beserta perbandingannya. Hasil-hasil yang diperoleh selanjutnya disimpulkan pada Bab IV.