BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Misalkan $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan bilangan riil. Notasi $\mathbb{R}^n$ menyatakan himpunan vektor riil dengan n komponen. Didefinisikan $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ dan $\mathbb{R}_+^n := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \mathbb{R}_+, \forall i = 1, 2, ..., n\}$. Jika $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$, maka $\mathbf{x}$ disebut vektor nonnegatif. $\mathrm{Int}(\mathbb{R}_+^n)$ menyatakan himpunan vektor riil dengan n komponen dimana setiap komponennya adalah positif. $\mathbb{R}^{m \times n}$ merupakan himpunan matriks berukuran $m \times n$ dimana setiap entrinya adalah bilangan riil, sedangkan $\mathbb{R}_+^{m \times n}$ menyatakan himpunan matriks berukuran $m \times n$ dimana setiap entrinya adalah nonnegatif dan sekurang-kurangnya terdapat satu entri yang positif. Jika $A \in \mathbb{R}_+^{m \times n}$, maka A disebut matriks nonnegatif [7].

Masalah kontrol optimal kuadratik merupakan masalah penentuan suatu pengontrol optimal $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ yang meminimumkan fungsi objektif kuadratik

$$J(\mathbf{u}) = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{u}) dt \tag{1.1.1}$$

dan memenuhi sistem linier kontinu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

dimana $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ menyatakan keadaan, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$ menyatakan output, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$

menyatakan kontrol (input), $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{r\times m}$, dan $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ adalah matriks simetris [9].

Seiring dengan perkembangan dalam berbagai bidang, permasalahan ini telah mengalami berbagai modifikasi. Salah satunya adalah munculnya isu kepositifan dan kestabilan pada konstrain (1.1.2).

Perhatikan sistem (1.1.2) dengan penambahan faktor *disturbance*, yaitu :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + E\omega \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u} + F\omega \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

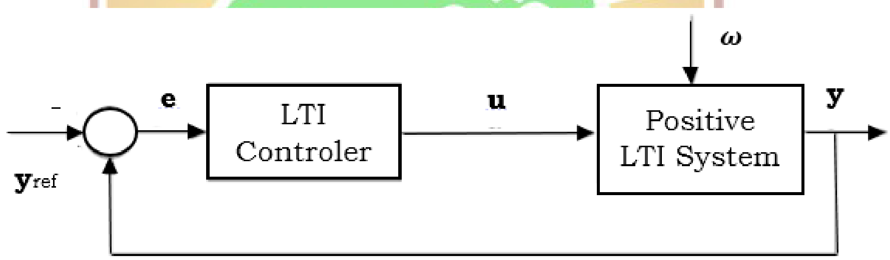
dimana $E \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $F \in \mathbb{R}^{r\times q}$ dan matriks-matriks A, B, C dan D berukuran seperti pada (1.1.2) dan $\omega \in \mathbb{R}^q_+$ menyatakan vektor *disturbance*.

Sistem (1.1.3) dikatakan positif jika untuk setiap keadaan awal nonnegatif, vektor input nonnegatif, dan *disturbance* nonnegatif, maka keadaan pada waktu t dan output pada waktu t adalah nonnegatif, yaitu $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n_+$ dan $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^r_+$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$ [2].

Dalam [4], Farida dan Rinaldi menyatakan bahwa sistem (1.1.3) adalah positif jika dan hanya jika A adalah matriks *Metzler* dan matriks-matriks B, C, D, E, dan F adalah nonnegatif.

Selain itu, sistem (1.1.3) dikatakan stabil asimtotik jika $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}_s$ bila $t \to \infty$, dimana $\mathbf{x}_s$ adalah keadaan *steady-state*, yaitu keadaan dimana $\dot{\mathbf{x}}(t) = 0$. Suatu syarat cukup agar sistem (1.1.3) stabil asimtotik adalah A matriks *Hurwitz*, yaitu bagian riil dari semua nilai eigennya adalah negatif [3]. Dengan demikian agar sistem (1.1.3) adalah positif stabil asimtotik, maka A haruslah matriks *Hurwitz* dan memenuhi syarat kepositifan.

Dalam prakteknya, output dari sistem tidak selalu berprilaku sesuai yang diinginkan. Jika $\mathbf{y}_{\text{ref}} \in \mathbb{R}^r$ menyatakan vektor output yang diinginkan, maka $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_{\text{ref}}$ disebut sebagai *error* dalam sistem. Biasanya *error* ini selalu diupayakan menjadi $\mathbf{0}$, yaitu $\mathbf{e} \to \mathbf{0}$. Hal ini dapat dilihat dalam bentuk diagram pada Gambar 1.1.1.



Gambar 1.1.1. Closed-loop LTI system [12]

Dalam [12], Roszak dan Davidson memperluas pendefinisian masalah kontrol optimal kuadratik untuk sistem *Linear Time Invariant* (LTI) (1.1.3) yaitu: tentukan kontrol optimal $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ yang memenuhi sistem (1.1.3) dan meminimumkan fungsi objektif kuadratik berikut:

$$J(\mathbf{u}) = \int_0^\infty (\epsilon^2 \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}}) dt, \tag{1.1.4}$$

dimana $\epsilon > 0$, dan $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ adalah matriks simetris.

Dalam penelitian ini akan dikaji masalah meminimumkan fungsi objektif (1.1.4) untuk sistem Linear Time Invariant (LTI) positif stabil asimtotik.

1.2 Rumusan Masalah

Asumsikan sistem (1.1.3) adalah positif stabil asimtotik, yaitu A adalah matriks *Metzler-Hurwitz*, matriks-matriks B, C, D, E dan F adalah nonnegatif, dan vektor *disturbance* ω adalah konstan. Akan ditentukan suatu pengontrol optimal $\mathbf{u}^*(t) = K\mathbf{x}^*(t) \in \mathbb{R}^n_+$ dimana $K \in \mathbb{R}^{m\times(n+r)}_+$ yang memenuhi sistem (1.1.3) dan meminimumkan fungsi objektif

$$J(\mathbf{u}) = \int_0^\infty (\epsilon^2 \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}}) dt, \tag{1.2.1}$$

dimana $\epsilon > 0$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ adalah matriks simetris definit positif, sedemikian sehingga semua sifat berikut terpenuhi:

1. Matriks $(A + BK_x)$ adalah matriks *Hurwitz*, dimana $K_x \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

2. Keadaan $\mathbf{x}(t)$ dan output $\mathbf{y}(t)$ adalah nonnegatif, yaitu $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n_+$ dan $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^r_+$, untuk setiap $t \geq 0$.

3. $\mathbf{e} = (\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_{ref}(t)) \to \mathbf{0}$ bila $t \to \infty$.

Dalam hal ini, vektor kontrol tersebut disebut sebagai kontrol optimal.

1.3 Pembatasan Masalah

Dalam penelitian ini, kajian hanya dibatasi pada sistem Multi Input Multi Output (MIMO).

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah mengkaji masalah kontrol optimal kuadratik untuk sistem Linear Time Invariant (LTI) positif stabil asimtotik.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan tesis ini terdiri dari empat bab. Bab I berisikan latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan dan sistematika penulisan. Bab II berisikan teori-teori yang akan digunakan dalam menyelesaikan permasalahan yang dibahas pada tesis ini. Bab III berisikan pembahasan mengenai permasalahan yang dibahas beserta hasilnya. Bab IV berisikan tentang kesimpulan dari penulisan dan saran bagi penulisan selanjutnya.