BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam Kalkulus, dikenal istilah *jumlah Riemann atas* dan *jumlah Riemann bawah* dari suatu fungsi yang terdefinisi pada suatu interval tertutup-terbatas, terkait dengan pemartisian domainnya menjadi sub-sub interval. Jumlah Riemann atas dan jumlah Riemann bawah ini digunakan untuk melakukan pendekatan pada integral Riemann. Integral Riemann dari suatu fungsi pada suatu interval tertutup-terbatas didefinisikan sebagai limit dari jumlah-jumlah Riemann atas dan jumlah-jumlah Riemann bawahnya apabila nilai limit dari keduanya sama. Hal ini mengimplikasikan bahwa suatu fungsi dikatakan terintegralkan Riemann hanyalah jika limit dari jumlah-jumlah Riemann atasnya sama dengan limit dari jumlah-jumlah Riemann bawahnya [1]. Kondisi ini seringkali mensyaratkan kekontinuan dari fungsi tersebut. Faktanya, masih banyak fungsi-fungsi yang tidak kontinu sehingga limit dari jumlah-jumlah Riemann atasnya tidak sama dengan limit dari jumlah-jumlah Riemann bawahnya.

Salah satu contoh dari fungsi yang mana limit dari jumlah-jumlah Riemann atasnya tidak sama dengan limit dari jumlah-jumlah Riemann bawahnya adalah fungsi f pada interval $[0, 1]$ yang didefinisikan oleh fungsi yang dikenal dengan nama fungsi *Dirichlet*, yaitu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{jika } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

untuk setiap $x \in [0,1]$ [1]. Fungsi diskontinu ini selalu memiliki jumlah Riemann atas, yaitu 1, yang berbeda dengan jumlah Riemann bawahnya, yaitu selalu bernilai 0, untuk setiap partisi dari $[0,1]$. Ini menyebabkan limit dari jumlah-jumlah Riemann atasnya tidaklah sama dengan limit dari jumlah-jumlah Riemann bawahnya, sehingga fungsi ini tidaklah terintegralkan Riemann pada $[0,1]$.

Dalam pendekatan integral dari suatu fungsi dengan menggunakan konsep jumlah Riemann, telah muncul beberapa kekurangan. Diantaranya, tidak ada jaminan bahwa limit dari barisan fungsi-fungsi yang terintegralkan Riemann juga akan merupakan fungsi yang terintegralkan Riemann. Selain itu, koleksi semua fungsi yang terintegralkan Riemann menjadi dipandang kecil terhadap koleksi semua fungsi yang ada, seiring dengan semakin berkembangnya ilmu matematika. Dengan kata lain, ternyata masih banyak fungsi-fungsi yang tidak terintegralkan Riemann. Kenyataan-kenyataan tersebut telah mengantarkan kepada perlunya dibuat suatu perumuman dari konsep jumlah Riemann [1]. Perumuman konsep jumlah Riemann ini dilakukan dengan memperumum cara pemartisian domain dari fungsinya, sehingga pemartisiannya tidak lagi terbatas pada pemartisian menjadi sub-sub interval dari domain tersebut, melainkan diperumum ke dalam pemartisiannya menjadi sub-sub himpunan yang disebut dengan sub-sub himpunan terukur dari domain fungsi tersebut. Selanjutnya, konsep "panjang" dari suatu interval, yang digunakan dalam konsep jumlah Riemann, juga diperumum menjadi suatu konsep baru yang disebut dengan "ukuran" dari suatu himpunan terukur. Sebagaimana halnya panjang dari suatu interval, ukuran dari suatu himpunan terukur merupakan suatu fungsi himpunan (*a set function*) yang memberikan suatu nilai berupa bilangan riil diperluas kepada setiap himpunan yang berada pada suatu koleksi himpunan-himpunan [7]. Gagasan mengenai ukuran ini diperkenalkan pada awal abad ke-20 M melalui penelitian dari Henri Lebesgue (1875-1941 M), penemu teori modern tentang ukuran dan integral [4].

Sebelum melakukan pemartisian suatu himpunan X, yang dalam hal ini adalah pemartisian domain dari suatu fungsi, menjadi sub-sub himpunan terukur dari himpunan tersebut, diperlukan suatu fungsi himpunan yang disebut dengan suatu *ukuran luar* pada X. Ukuran luar ini terdefinisi pada koleksi semua subhimpunan dari X, sedemikian sehingga dengan fungsi ini dapat diverifikasi apakah suatu subhimpunan dari X adalah terukur atau tidak. Sementara itu, dikatakan juga bahwa pembatasan suatu ukuran luar μ^* pada koleksi semua himpunan yang terukur oleh μ^*, akan menghasilkan suatu ukuran pada koleksi tersebut. Selanjutnya, pada himpunan semua bilangan riil berdimensi-n, dinotasikan dengan $\mathbb{R}^n$, diperkenalkan suatu ukuran luar khusus yang dikenal dengan nama *ukuran luar Lebesgue*. Setiap subhimpunan dari $\mathbb{R}^n$ yang terukur oleh ukuran luar Lebesgue ini nantinya disebut dengan *himpunan terukur Lebesgue*. Lebih lanjut, ukuran yang dihasilkan dari pembatasan ukuran luar Lebesgue pada koleksi semua himpunan terukur Lebesgue, dinamakan dengan *ukuran Lebesgue* [3]. Ukuran inilah yang nantinya digunakan dalam teori pengintegralan Lebesgue, sebuah perumuman dari teori pengintegralan Riemann [7].

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang, maka rumusan masalah yang akan dibahas adalah:

1. Bagaimanakah salah satu metode yang dapat digunakan untuk mengonstruksi suatu ukuran luar pada suatu himpunan?
2. Bagaimanakah bentuk pendefinisian dari suatu ukuran luar yang dinamakan dengan ukuran luar Lebesgue?
3. Bagaimanakah sifat-sifat yang berlaku pada ukuran luar Lebesgue dan ukuran Lebesgue?

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang telah dirumuskan di atas dibatasi hanya pada himpunan-himpunan tak kosong di $\mathbb{R}^n$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari diangkatnya penelitian ini diantaranya adalah:

1. Memperkenalkan dan menjelaskan suatu metode yang dapat digunakan untuk mengonstruksi suatu ukuran luar pada suatu himpunan tak kosong.

2. Memperkenalkan dan menjelaskan bentuk pendefinisian dari suatu ukuran luar yang dinamakan dengan ukuran luar Lebesgue.

3. Menjelaskan sifat-sifat yang berlaku pada ukuran luar Lebesgue dan ukuran Lebesgue.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam tulisan ini terdiri atas empat bab. Bab I, Pendahuluan, memuat latar belakang; rumusan masalah; batasan masalah; tujuan penelitian; serta sistematika penulisan. Selanjutnya, Bab II, yaitu Landasan Teori, berisi materi-materi dasar yang melandasi dan dapat dijadikan acuan pada bagian pembahasan. Bab III, Pembahasan, berisi pembahasan dari masalah-masalah yang telah diajukan pada bagian rumusan masalah. Terakhir, Bab IV, Kesimpulan dan Saran, menyajikan kesimpulan yang dapat ditarik dari penelitian ini beserta saran yang berkaitan dengan pelaksanaan atau hasil dari penelitian ini.