PENYELESAIAN MASALAH RUTE PERJALANAN KARYAWAN PDAM DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA BRUTE FORCE

TESIS

AISAL JAFNI
06215021

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
2008

Penyelesaian Masalah Rute Perjalanan Karyawan PDAM dengan Menggunakan Algoritma *Brute Force*

Oleh: Aisal Jafni

(Dibawah bimbingan Dr. Susila Bahri, M.Sc dan Budi Rudianto, M.Si)

RINGKASAN

Persoalan pedagang keliling *(Traveling Salesman Problem – TSP)* sangat terkenal dalam teori graf. Salah satu terapannya adalah perjalanan karyawan PDAM untuk memeriksa sambungan pipa induk yang tersebar pada *n* buah lokasi di wilayah Koto Baru Solok. Rute yang dilalui oleh karyawan tersebut adalah sebuah perjalanan mengunjungi setiap sambungan pipa hanya satu kali dan kembali lagi ke sambungan awal. Untuk mengefisienkan waktu karyawan tersebut harus memilih rute dengan total jarak yang minimum. Dalam menentukan rute tersebut, biasanya karyawan hanya memprediksi jarak tempuh. Total jarak yang diperoleh oleh karyawan tersebut belum tentu merupakan total jarak yang minimum. Untuk mempermudah dalam menentukan rute dengan total jarak minimum, maka perlu digunakan sebuah algoritma, salah satunya adalah Algoritma *Brute Force*. Berdasarkan permasalahan tersebut maka dilakukan penelitian.

Tujuan penelitian ini adalah menentukan solusi optimal pada perjalanan karyawan dalam memperbaiki sambungan pipa induk PDAM dan mengetahui kompleksitas waktu asimptotik dari pemakaian Algoritma *Brute Force* pada kasus TSP.

Penelitian ini dilakukan dari bulan Januari hingga bulan Mei 2008 di perpustakaan jurusan Matematika Universitas Andalas dengan langkah-langkah yang dilakukan adalah mengumpulkan data jarak antar lokasi sambungan pipa induk, membuat graf lengkap untuk data jarak tersebut, merubah graf lengkap ke dalam graf Hamilton , merubah graf Hamilton ke dalam bentuk pohon berakar dengan salah satu titik sebagai akarnya, menentukan total jarak berdasarkan pohon berakar yang terbentuk dan menentukan rute total jarak yang paling minimum.

Adapun langkah-langkah Algoritma *Brute Force* adalah memodelkan masalah ke dalam bentuk graf, buat sebuah pohon yang cabang-cabangnya berupa titik pada graf, ekspansi titik-titik pada tiap cabang-cabang sampai semua titik telah dipilih, hitung total jaraknya kemudian tentukan sirkuit Hamilton yang mempunyai jarak terpendek. Untuk menghitung total jarak digunakan metode *Breadth First- Search.*

Dari hasil penelitian ini dapat disimpulkan bahwa total jarak minimum rute perjalanan karyawan PDAM dalam memperbaiki sambungan pipa induk adalah 11,25 km dengan rute perjalan yang dilalui adalah komplek UMMY, Kelurahan Kajai, Kelurahan Bukit Kili Timur, Kelurahan Bukit Kili Barat, Komplek Perumnas, Komplek UMMY dengan kompleksitas waktu asimptotik $T(5) = O(5!)$ dengan $c = 1$ dan $n_0 \geq 3$. Untuk mempermudah penentuan solusi optimum dengan menggunakan algoritma *Brute Force* diharapkan peneliti selanjutnya dapat menerapkan algoritma *Brute Force* kedalam bentuk sebuah program.

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Dengan ini saya menyatakan bahwa tesis yang saya tulis ini dengan judul "**Penyelesaian Masalah Perjalanan Karyawan PDAM dengan Menggunakan Algoritma *Brute Force***" adalah hasil karya saya sendiri dan bukan merupakan ciplakan dari orang lain kecuali kutipan yang sumbernya dicantumkan.

Jika dikemudian hari pernyataan yang saya buat ini tidak benar maka status kelulusan dan gelar yang saya peroleh menjadi batal dengan sendirinya.

Padang, 14 Juli 2008

Yang membuat pernyataan

AISAL JAFNI

BP. 06215021

"Adakah sama orang-orang yang mengetahui
dengan orang-orang yang tidak mengetahui?"
Sesungguhnya orang yang berakallah
yang dapat menerima pelajaran.
(QS : Az Zumar ayat 9)

Terimalah karya ini sebagai baktiku
Kepadamu Ayah dan Bundaku
Kupersembahkan buat istriku tecinta Ezi Yova Rahmi, SE
dan anak-anakku tersayang : Fadhlan Nabil Azima,
Khalda Rahadatul Azima dan Naila Thahira Azima

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 6 April 1971 di Salimpat, sebagai anak ketiga dari ayah bernama Jalini dan ibu Sainun. Penulis menamatkan SD pada tahun 1984 di Tanjung Balit Alahan Panjang, SMP tahun 1987 di Alahan Panjang dan SPG pada tahun 1990 di Solok. Penulis memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada progam studi Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Maha Putra Muhamad Yamin Solok tahun 1996.

Sejak tahun 1997 penulis bertugas sebagai staf pengajar di SMAN 1 Pantai Cermin Kabupaten Solok, pada tahun 2006 memperoleh kesempatan meneruskan pendidikan pada program pascasarjana Universitas Andalas Padang dan tahun 2008 penulis dipindahtugaskan sebagai staf pengajar di SMAN 2 Gunung Talang Kabupaten Solok.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis aturkan kehadirat Allah SWT karena berkat rahmat dan hidayahNya penulis dapat menyelesaikan tesis ini. Tesis ini ditulis berdasarkan hasil penelitian yang berjudul, " PENYELESAIAN MASALAH RUTE PERJALANAN KARYAWAN PDAM DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA *BRUTE FORCE*".

Dalam menyelesaikan tesis ini, penulis mendapat bantuan dari banyak pihak. Karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Ibu Dr. Susila Bahri, M.Sc sebagai pembimbing I dan Bapak Budi Rudianto, M.Si sebagai pembimbing II, yang telah memberikan bimbingan dan saran yang sangat berharga untuk terwujudnya tesis ini.
2. Bapak Dr. I Made Arnawa, M.Sc dan Bapak Muhafzan, Ph.D sebagai penguji dalam tesis ini.
3. Bapak Jenizon, M.Si selaku ketua program studi Matematika Pascasarjana Universitas Andalas, yang telah memberikan bantuan dan saran dalam penyelesaian tesis ini.
4. Bapak Zulakmal, M.Si selaku koordinator program studi Matematika Pascasarjana Universitas Andalas, yang telah memberikan bantuan dan saran dalam penyelesaian tesis ini.
5. Seluruh staf pengajar Program Pascasarjana Jurusan Matematika Universitas Andalas Padang yang telah memberikan bekal ilmu pengetahuan kepada penulis.

6. Bapak Risman, SH selaku Direktur PDAM Kabupaten Solok yang telah memberikan bantuan dalam penyelesaian tesis ini.
7. Dinas Pendidikan Propinsi Sumatera Barat atas bantuan beasiswa selama pendidikan Program Magister.
8. Teman-teman seperjuangan dan semua pihak yang telah memberikan semangat dan dukungan kepada penulis yang tidak mungkin disebutkan satu persatu dalam tulisan ini.

Penulis menyadari bahwa tesis ini sangat jauh dari kesempurnaan oleh karena itu penulis sangat terbuka dalam menerima kritikan dan saran dari pembaca untuk kesempurnaannya. Mudah-mudahan tesis ini memberikan kontribusi yang sangat berharga bagi pembaca.

Padang, Juli 2008

Aisal Jafni

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

Nomor Halaman

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Masalah penugasan oleh seorang Direktur PDAM Koto Baru Solok terhadap beberapa orang karyawannya untuk memeriksa sambungan pipa induk yang tersebar pada *n* buah lokasi disuatu wilayah merupakan salah satu masalah pedagang keliling *(Traveling Salesman Problem – TSP)* Persoalan ini dapat digambarkan ke dalam bentuk graf, dimana salah satu titik menyatakan lokasi karyawan PDAM mulai berangkat. Sisi *(i,j)* diberi bobot yang sama dengan jarak perjalanan karyawan dari sambungan pipa *i* ke sambungan pipa *j*. Rute yang dilalui oleh karyawan tersebut adalah sebuah perjalanan mengunjungi setiap sambungan pipa hanya satu kali dan kembali lagi ke sambungan awal.Pada masalah diatas karyawan PDAM ingin mengefisienkan waktu dalam perjalanan untuk memeriksa sambungan pipa induk. Untuk itu karyawan tersebut harus memilih rute dengan total jarak yang minimum.

Banyaknya rute yang dapat dilalui oleh karyawan, membuat karyawan tersebut harus menemukan rute dengan total jarak minimum. Dalam menentukan rute tersebut, biasanya karyawan hanya memprediksi jarak tempuh pada setiap jalan yang akan dilaluinya. Total jarak yang diperoleh oleh karyawan tersebut belum tentu merupakan total jarak yang minimum. Untuk mempermudah dalam menentukan rute dengan total jarak minimum, maka perlu digunakan sebuah algoritma.

Ada beberapa algoritma yang dapat digunakan untuk menyelesaikan TSP, diantaranya Algoritma Tetangga Terdekat, Algoritma *Greedy*, Algoritma *Brute Force*. Algoritma Tetangga Terdekat dan algoritma *Greedy* termasuk algoritma perkiraan *(approximate algorithm)* yang berarti solusi yang dihasilkan hanya akan mendekati solusi optimal, sedangkan Algoritma *Brute Force* adalah salah satu algoritma eksak, yang selalu menghasilkan solusi optimum. (Munir,2004).

1.2. Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, maka perumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana menentukan rute dengan total jarak minimum perjalanan karyawan PDAM Kabupaten Solok di wilayah Koto Baru dalam memperbaiki sambungan pipa induk dengan menggunakan Algoritma *Brute Force*.

1.3. Tujuan Penelitian.

Adapun tujuan penelitian ini adalah untuk :

1. menentukan solusi optimal untuk kasus TSP pada perjalanan karyawan dalam memperbaiki sambungan pipa induk PDAM.
2. mengetahui kompleksitas waktu asimptotik dari pemakaian Algoritma *Brute Force* pada kasus TSP.

1.4. Manfaat Penelitian.

Hasil penelitian ini diharapkan dapat :

1. menambah pengetahuan penulis atau pembaca tentang TS.
2. memberi gambaran penyelesaian permasalahan yang berhubungan dengan penggunaan algoritma *Brute Force* pada kasus TSP, khususnya pada perjalanan karyawan dalam memperbaiki sambungan pipa induk PDAM.
3. menjadi bahan acuan dalam menyelesaikan masalah-masalah lainnya yang berkaitan dengan TSP.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas konsep-konsep dasar dan teorema penting yang akan digunakan dalam pembahasan. Konsep-konsep dasar dan teorema tersebut adalah sebagai beikut :

2.1. Terminologi dalam Graf

Beberapa kejadian dapat digambarkan dengan graf yang terdiri dari himpunan titik bersama-sama dengan garis yang menghubungkan titik tersebut. Sebagai contoh, titik dapat mewakili sebagai kota dan garis yang menghubungkan titik tersebut menyatakan adanya hubungan kerjasama antar kota tersebut.

Definisi 2.1.1 (Chartrand, 1979)

Sebuah graf G adalah himpunan berhingga yang tidak kosong dari objek-objek yang disebut titik bersama dengan himpunan dari pasangan tak berurut dari titik G yang disebut sisi. Himpunan titik-titik G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisinya dinotasikan dengan $E(G)$.

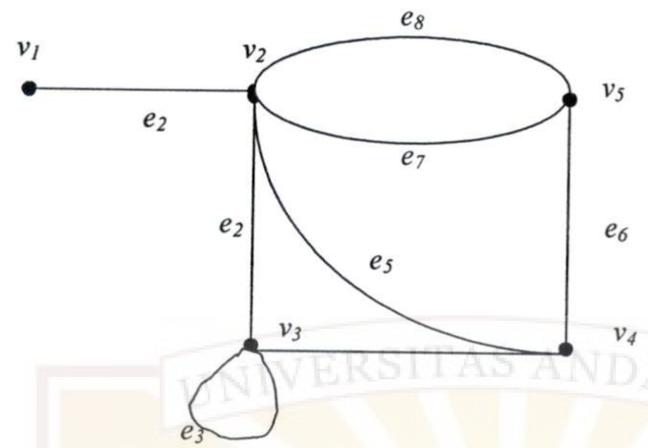
Definisi 2.1.2 (Clark, 1991)

Jika dua buah titik pada graf dihubungkan dengan dua buah sisi, maka sisi tersebut dinamakan sisi rangkap.

Definisi 2.1.3 (Clark, 1991)

Jika sebuah titik dihubungkan dengan titik itu sendiri oleh sebuah sisi, maka sisi tersebut dinamakan dengan loop.

Contoh :



Gambar 1: Graf yang Memiliki Sisi Rangkap dan Loop.

Sisi rangkap dari Gambar 1 adalah sisi-sisi yang menghubungkan titik v_2 dan v_5. Sedangkan loop pada Gambar 1 adalah sisi e_3.

Definisi 2.1.4 (Clark, 1991)

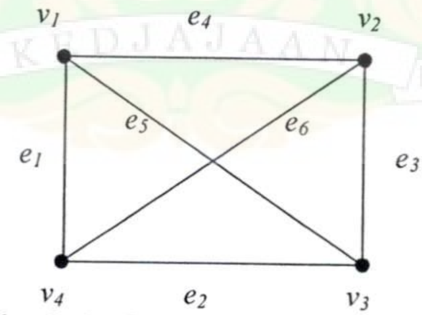
Graf yang tidak memiliki sisi rangkap dan loop disebut dengan graf sederhana.

Definisi 2.1.5 (Clark, 1991)

Graf lengkap adalah sebuah graf yang setiap dua titiknya saling berhubungan.

Menurut Munir (2005) derajat suatu titik pada graf yang tak-berarah adalah jumlah sisi yang berada pada titik tersebut. Dari definisi graf lengkap, maka setiap titik pada graf lengkap dengan n titik mempunya derajat n-1.

Contoh :



Gambar 2: Graf Sederhana dan Graf Lengkap

Definisi 2.1.6 (Deo, 1987)

Jalan (walk) adalah sebuah barisan berhingga dari titik dan sisi secara bergantian dalam sebuah graf G yang diawali dan diakhiri oleh titik sedemikian sehingga setiap sisi terkait dengan titik yang mendahuluinya dan titik yang mengikutinya.

Definisi 2.1.7 (Deo, 1987)

Lintasan adalah sebuah jalan yang titik awal dan titik akhirnya tidak sama dan semua titiknya berbeda.

Definisi 2.1.8 (Munir, 2005)

Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut sirkuit.

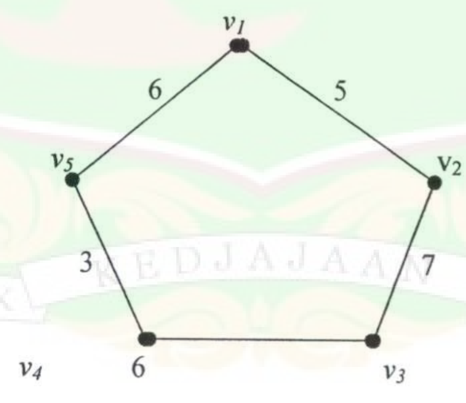
Definisi 2.1.9 (Bona, 1989)

Graf G dikatakan terhubung jika untuk semua v_1, v_2 berada di G ada lintasan yang menghubungkan v_1 dan v_2.

Definisi 2.1.10 (Munir, 2005)

Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot).

Contoh :



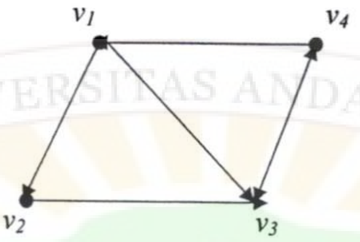
Gambar 3: Graf Berbobot dan Terhubung

Munir (2005) menyatakan pada graf berarah, derajat titik v dinyatakan dengan $d_{in}(v)$ dan $d_{out}(v)$, yang dalam hal ini :

$d_{in}(v)$ adalah derajat–masuk = jumlah sisi yang masuk ke titik v.

$d_{out}(v)$ adalah derajat-keluar = jumlah sisi yang keluar dari v.

Contoh :

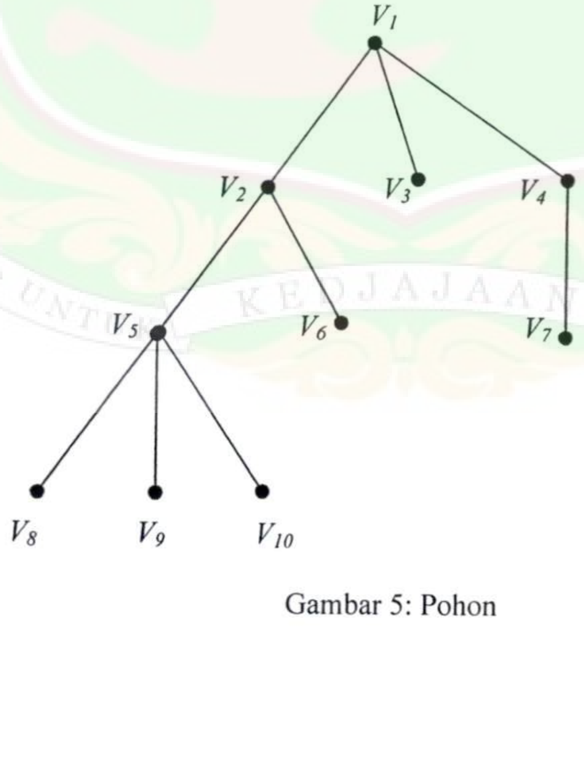


Gambar 4: Graf Berarah

2.2. Pohon

Menurut Munir (2005) pohon adalah graf tak berarah terhubung yang tidak memiliki sirkuit.

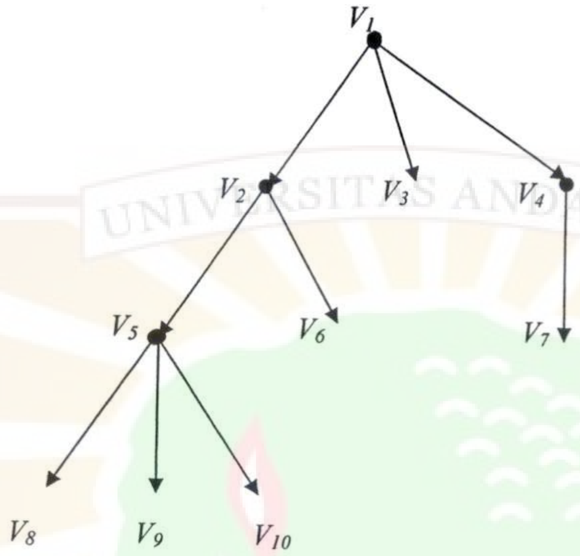
Contoh :



Gambar 5: Pohon

Pohon berakar menurut Munir (2005) adalah pohon yang sebuah titiknya diperlakukan sebagai akar dan sisi-sisinya diberi tanda panah menjauh dari akar.

Contoh :



Gambar 6: Pohon Berakar

Gambar 6 adalah contoh pohon berakar dengan V_1 adalah titik akarnya. Setiap titik dipohon harus dicapai dari akar, maka lintasan didalam pohon berakar selalu dari atas ke bawah.

Menurut Munir (2005), terdapat beberapa istilah didalam pohon berakar, diantaranya sebagai berikut:

- Anak dan Orang Tua

  Misalkan x adalah sebuah titik di dalam pohon berakar. Titik y dikatakan anak dari titik x jika ada sisi yang menghubungkan titik x ke titik y. Dalam hal ini, x dikatakan orang tua y. Pada Gambar 6, titik V_2, V_3, V_4 adalah anak dari titik V_1, sedangkan titik V_5 dan V_6 adalah anak dari titik V_2, dan V_2 adalah orang tua dari titik V_5 dan V_6.

- Lintasan

  Lintasan dari titik v_1 ke titik v_k adalah deretan titik-titik $v_1, v_2, \ldots, v_k$, sedemikian sehingga v_i adalah orang tua dari v_{i+1} untuk $1 \leq i \leq k$. Dari Gambar 6, lintasan dari titik V_1 ke titik V_{10} adalah V_1, V_2, V_5, V_{10}. Panjang lintasan dari titik V_1 ke titik V_{10} adalah 3.

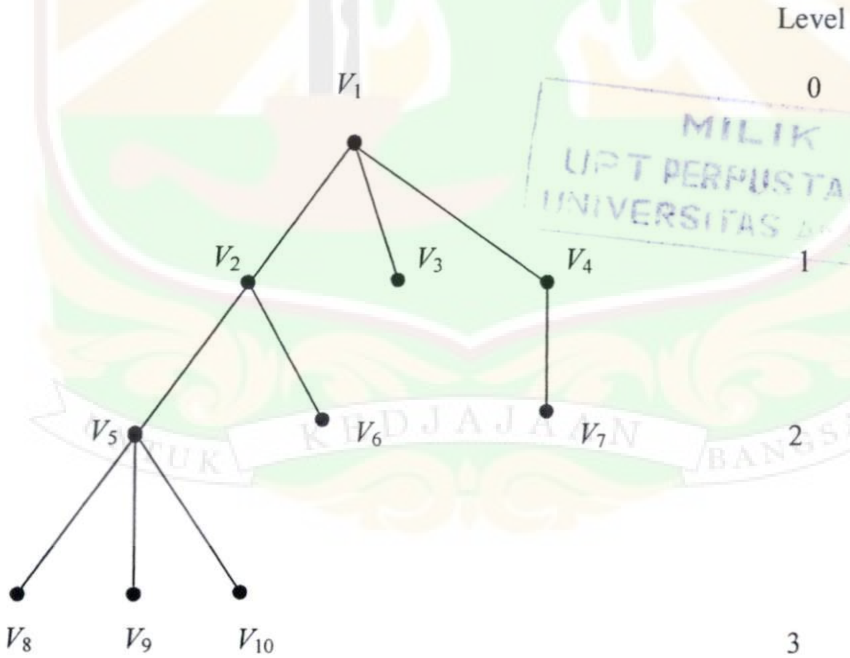
- Keturunan dan Leluhur

  Jika terdapat lintasan dari titik x ke titik y di dalam pohon, maka x adalah leluhur dari y, dan y adalah keturunan simpul x. Pada Gambar 6, V_2 adalah leluhur titik V_8. Dengan demikian V_8 adalah keturunan V_2.

- Level atau tingkat

  Akar mempunyai level sama dengan 0, sedangkan level titik lainnya sama dengan 1 ditambah panjang lintasan dari akar ke titik tersebut.

  Contoh :



Gambar 7. Pohon dengan Panjang Lintasan 3

2.3. Graf Hamilton

Pada tahun 1857 Sir Wiliam Rowan Hamilton seorang ahli matematika berkebangsaan Irlandia memperkenalkan sebuah permainan yang disebut dengan "mengelilingi dunia". Permainan ini menggunakan dodekahedron padat beraturan yang terdiri dari 20 simpul, 30 sisi dan 12 permukaan. Setiap simpul pada dodekahedron diberi nama kota-kota penting di dunia pada saat itu.

Permainannya adalah mencari suatu rute perjalanan mengunjungi ke 20 kota dengan syarat setiap kota hanya dapat dikunjungi sekali saja dan berakhir pada kota keberangkatan pertama. Dalam teori graf, rute perjalanan yang dicari pada permainan diatas tidak lain adalah mencari sirkuit dari graf. Sirkuit ini dikenal dengan sirkuit Hamilton.

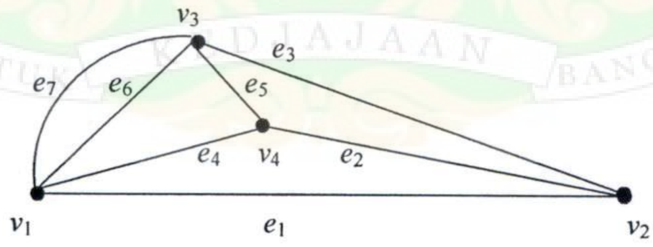
Definisi 2.3.1 (Munir, 2005)

Sirkuit Hamilton adalah sirkuit yang melalui setiap titik di dalam graf tepat satu kali, kecuali titik awal (sekaligus titik akhir) yang dilalui dua kali.

Definisi 2.3.2 (Clark, 1991)

Sebuah graf dikatakan graf Hamilton jika graf tersebut mempunyai sirkuit Hamilton.

Contoh :



Gambar 8. Graf dengan 4 titik

Salah satu sirkuit Hamilton yang terbentuk pada graf diatas adalah $v_1\, e_1\, v_2\, e_2\, v_4\, e_5\, v_3\, e_6\, v_1$.

Terdapat beberapa teorema yang menjelaskan tentang karakteristik graf Hamilton, diantaranya :

Teorema 2.3.3 (Michael, 1988)

Jika graf G mempunyai $v \geq 3$ titik dan setiap titik mempunyai derajat paling sedikit $^{V}/_{2}$, maka graf G adalah Hamilton.

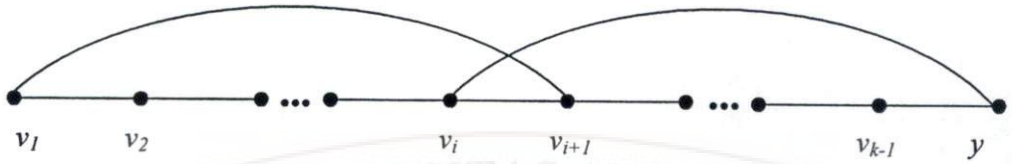
Bukti :

Langkah pertama :

Terdapat lintasan maksimum yang berisi lebih dari setengah himpunan titik di graf G. Misalkan ($v = v_1, v_2, \ldots, v_k = y$) lintasan maksimum dalam graf G. Karena lintasannya maksimum, maka v tidak dapat dihubungkan dengan titik lain pada lintasan. Lintasan v mempunyai paling banyak $k - 1$ yang berdekatan. Karena derajat v paling sedikit $^{V}/_{2}$, maka $k - 1 \geq {}^{V}/_{2}$ atau $k \geq 1 + {}^{V}/_{2}$

Jika ada titik v_i dan v_{i+1}, dimana v berhubungan dengan v_{i+1} dan y berhubungan dengan v_i, maka $(v, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, y, v_i, v_{i-1}, \ldots, v_2, v)$ adalah lintasan tutup (sirkuit) yang berisi semua titik pada graf G. Jika v_i dan v_{i+1} tidak berpasangan, maka sewaktu-waktu v akan berhubungan dengan v_{i+1}, y tidak berhubungan dengan v_i. Karena lintasan yang ada adalah maksimum, maka v dan y tidak akan berhubungan dengan sebarang titik diluar lintasan. Jika $d(v) = s$, maka $d(y) \leq k - 1 - s$. Karena $d(v) = d(y) = {}^{V}/_{2}$, maka $v \leq d(v) + d(y) \leq s + (k - 1 - s) = k - 1 \leq v$ sebuah kontradiksi

Maka dapat dibuat sebuah lintasan tutup (sirkuit) dalam suatu himpunan titik dari lintasan maksimum. Kemudian diberi pelabelan baru pada titik-titik tersebut sehingga menghasilkan lintasan tutup (sirkuit) $[v_1, v_2, \ldots, v_k, v_i]$.



Gambar 9. Lintasan Maksimum

Langkah kedua :

Misalkan z titik yang terdapat dalam lintasan tutup $[v_1, v_2, \ldots, v_k, v_i]$. Karena $k \geq 1 + {}^{V}/_{2}$ dan $d(z) \geq {}^{V}/_{2}$, maka z harus dihubungkan paling sedikit satu titik pada lintasan tutup. Jika z berhubungan dengan v_i, maka

$[z, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k, v_1, \ldots, v_{i-1}]$, membentuk lintasan pada G dengan $k + 1$ titik, sehingga terbentuk lintasan maksimum.

Teorema 2.3.4 (Munir, 2005)

Suatu graf lengkap adalah graf Hamilton.

Bukti

Misalkan G graf lengkap dengan n titik. Setiap titik pada graf lengkap memiliki derajat n -1. Karena $n - 1 \geq {}^{n}/_{2}$, maka berdasarkan Teorema 2.3.3, dapat disimpulkan bahwa graf lengkap adalah graf Hamilton.

2.4. Algoritma *Brute Force* dalam menyelesaikan *Traveling Salesman Problem*

Menurut Munir (2004) arti dari *Brute Force* adalah sebuah pendekatan yang sederhana untuk memecahkan suatu masalah, yang biasanya didasarkan pada pernyataan masalah dan definisi konsep yang dilibatkan. Adapun algoritma *Brute*

Force pada dasarnya adalah alur penyelesaian suatu masalah dengan cara berfikir yang sederhana, tidak membutuhkan suatu pemikiran yang cukup lama untuk menyelesaikan suatu permasalahan.

Dalam menyelesaikan TSP, hal yang pertama kali dilakukan adalah merumuskan permasalahan yang dihadapi ke dalam bentuk graf. Kemudian menyelesaikannya menggunakan algoritma *Brute Force*. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam perumusan tersebut adalah sebagai berikut :

Langkah 1

Memodelkan permasalahan yang diperoleh kedalam bentuk graf, dimana kota-kota yang akan dikunjungi disimbolkan dengan titik dan jalan yang akan dilalui disimbolkan dengan sisi. Dalam memodelkan permasalahan tersebut terdapat dua buah kemungkinan graf yang diperoleh yaitu graf tak berarah dan graf berarah. Graf tak berarah adalah jika bobot pada sisi $(i,,j)$ = bobot pada sisi (j, i), sedangkan suatu graf dikatakan berarah jika bobot pada sisi $(i, j) \neq (j, i)$. Untuk menentukan graf yang diperoleh memiliki sirkuit Hamilton atau tidak dapat digunakan Teorema 1 dan Teorema 2.

Langkah 2

Buatlah sebuah pohon yang cabang-cabangnya berupa titik pada graf.

Langkah 3

Ekspansi titik-titik pada tiap cabang sampai semua titik telah dipilih (tidak ada titik yang dipilih dua kali).

Langkah 4

Hitung total jaraknya.

Langkah 5

Ulangi langkah ketiga dan keempat sampai seluruh titik telah dipilih. Apabila pada waktu membangkitkan, titik anak ternyata tidak lebih kecil dari solusi sebelumnya maka titik tersebut dimatikan atau tidak diekspansikan lebih lanjut.

Langkah 6

Tentukan sirkuit Hamilton yang mempunyai total jarak terpendek.

2.5. Metode *Breadth-First Search*

Terdapat dua metode yang dapat digunakan dalam menyelesaikan suatu permasalahan yang grafnya berbentuk sebuah pohon, yaitu *Depth-First Search* dan *Breadth- First Search.* Dalam penelitian ini, hanya digunakan metode *Breadth-First Search.* Menurut Rosen (2003), metode *Breadth-First Search* dimulai dari pemilihan titik akar dari sebuah graf, kemudian menambahkan semua sisi yang berhubungan dengan titik akar, sehingga diperoleh titik-titik yang berhubungan dengan titik akar, titik-titik tersebut berada pada level 1. Titik-titik yang berada pada level 1 diekspansi dengan cara menambahkan semua sisi yang berhubungan dengan titik-titik pada level 1, maka titik yang diperoleh berada pada level 2. Proses ini dilakukan sampai semua titik telah terpilih dan diperoleh sebuah pohon berakar.

2.6. Kompleksitas Waktu Asimptotik dari Algoritma *Brute Force*

Menurut Munir (2005) kompleksitas algoritma adalah besaran yang dipakai untuk menerangkan model abstrak pengukuran waktu atau ruang. Model abstrak pengukuran waktu atau ruang harus independen dari pertimbangan mesin. Model abstrak seperti ini dapat dipakai untuk membandingkan algoritma yang berbeda. Kompleksitas algoritma dibagi menjadi dua macam, salah satunya adalah kompleksitas waktu.

Kompleksitas waktu yang dilambangkan dengan *T(n)* adalah jumlah operasi yang dilakukan untuk melaksanakan algoritma sebagai fungsi dari ukuran masukan *n*. Keakuratan waktu eksekusi algoritma dapat diperoleh dengan tidak menghitung waktu untuk menampilkan setiap program, operasi masukan/keluaran, dan sebagainya. Jadi, keakuratan waktu eksekusi yang dihitung adalah kebutuhan waktu untuk bagian inti programnya saja. Menurut Munir (2005) kompleksitas waktu dapat dibedakan atas tiga yaitu :

a. $T_{\max}(n)$: Kompleksitas waktu untuk kasus terburuk, yaitu kebutuhan waktu maksimum yang diperlukan sebuah algoritma sebagai fungsi dari *n*.

b. $T_{\min}(n)$: Kompleksitas waktu untuk kasus terbaik, yaitu kebutuhan waktu minimum yang diperlukan sebuah algoritma sebagai fungsi dari *n*.

c. $T_{\text{avg}}(n)$: Kompleksitas waktu untuk kasus rata-rata, yaitu kebutuhan waktu rata-rata yang diperlukan algoritma sebagai fungsi dari *n*. Untuk kasus rata-rata ini, biasanya dibuat asumsi bahwa semua barisan masukan bersifat sama.

Jika waktu terbaik dan terburuk dari kompleksitas waktu suatu algoritma tumbuh bersamaan dengan meningkatnya ukuran masukan n maka kompleksitas waktu tersebut dinamakan dengan kompleksitas waktu asimptotik.

Kompleksitas waktu asimptotik tidak terlalu membutuhkan informasi seberapa tepat operasi dari suatu algoritma. Yang dibutuhkan adalah perkiraan kasar kebutuhan waktu algoritma dan seberapa cepat fungsi kebutuhan waktu itu tumbuh. Hal ini perlu untuk mengetahui kinerja algoritma. Notasi kompleksitas waktu asimptotik dilambangkan dengan "O"

Definisi 2.6.1 (Munir, 2005)

$T(n) = O(f(n))$ (dibaca "$T(n)$ adalah $Of(n)$)" yang artinya $T(n)$ berorde paling tinggi $f(n)$ bila terdapat konstanta C dan n_0 sedemikian sehingga $T(n) \leq C(f(n))$ untuk $n \geq n_0$.

Definisi ini menyatakan bahwa O-besar adalah jika sebuah algoritma mempunyai waktu asimptotik $Of(n)$), maka jika n dibuat semakin besar, waktu yang dibutuhkannya tidak akan pernah melebihi suatu konstanta C dikali dengan f(n). Jadi, $f(n)$ adalah batas lebih atas dari $T(n)$ untuk n yang besar. Oleh karena itu $T(n)$ berorde paling besar $f(n)$.

Menurut Munir (2005) terdapat aturan-aturan dalam menghitung kompleksitas waktu asimptotik, yaitu :

Misalkan $T_1(n) = O(f(n))$ dan $T_2(n) = O(g(n))$, maka :

a. $f(n) = O(f(n))$

b. $O(cf(n)) = O(f(n))$, c adalah konstanta

c. $T_1(n)\, T_2(n) = O(f(n))\, O(g(n)) = O(f(n)\, g(n))$

Sebelum menentukan kompleksitas waktu asimptotik dari algoritma *Brute Force*, maka terlebih dahulu perlu ditentukan kompleksitas waktu dari algoritma *Brute Force*. Jika banyaknya kota dalam *Traveling Salesman Problem* dimisalkan dengan n dan setiap dua kota saling dihubungkan dengan satu sisi maka kompleksitas waktu dari algoritma *Brute Force* adalah sebagai berikut :Untuk menentukan banyak sirkuit Hamilton yang mungkin terbentuk dari sebuah graf dapat digunakan teorema tentang permutasi. Hal ini didasarkan pada pembentukan sebuah sirkuit Hamilton, dimana semua titik dalam graf digunakan tepat satu kali kecuali titik awal sama dengan titik akhir, sehingga titik-titik tersebut akan membentuk lingkaran. Oleh karena itu jumlah sirkuit Hamilton yang terbentuk dari sebuah graf adalah $(n\text{-}1)!$ buah sirkuit Hamilton. Kompleksitas waktu yang dibutuhkan untuk mendaftarkan semua kemungkinan sirkuit Hamilton adalah $T_1(n) = O(n\text{-}1)!$. Sedangkan jumlah operasi yang dilakukan untuk menghitung total jarak pada setiap sirkuit Hamilton adalah n, sehingga kompleksitas waktunya adalah $T_2(n) = O(n)$.

Berdasarkan teorema tentang kompleksitas waktu asimptotik, maka kompleksitas waktu asimptotik dari algoritma *Brute Force* untuk penyelesaian TSP adalah :

$$\begin{aligned} T(n) &= T_1(n).\ T_2(n). \\ &= O((n\text{-}1)!).\ O(n). \\ &= O((n\text{-}1)!.n) \\ &= O(n!), \text{ dengan } c = 1 \text{ dan } n_0 \geq 3. \end{aligned}$$

Dimana n_0 adalah banyaknya titik dalam sebuah graf, dan c adalah konstanta.

Jumlah operasi yang dilakukan untuk menentukan sirkuit Hamilton dengan total jarak minimum pada TSP bergantung kepada banyaknya kota yang dikunjungi. Semakin banyak kota yang akan dikunjungi semakin banyak iterasi yang dilakukan sehingga ditemukan solusi minimumnya. Pada algoritma *Brute Force* jumlah operasi yang dilakukan dalam menentukan sirkuit terpendek pada TSP adalah $T(n) = O(n!)$ dengan c = 1 dan $n_0 \geq 3$. Kompleksitas waktu asimptotik berguna untuk melihat kinerja algoritma dalam menyelesaikan suatu permasalahan TSP.

2.7. Permutasi

Dalam menentukan banyaknya sirkuit Hamilton pada sebuah graf lengkap dapat digunakan permutasi, sehingga perlu diketahui konsep tentang permutasi.

Definisi 2.7.1 (Dudewicz, 1987)

Permutasi adalah banyaknya susunan yang berlainan dari n objek dalam suatu urutan tertentu.

Definisi 2.7.2 (Munir, 2005)

Permutasi melingkar dari n objek adalah penyusunan objek-objek yang mengelilingi sebuah lingkaran (atau kurva tertutup sederhana). Jumlah susunan yang mengelilingi lingkaran adalah $(n-1)!$.

BAB III

METODOLOGI

3.2. Waktu dan Tempat Penelitian.

Penelitian ini dilakukan dari bulan Januari hingga bulan Mei 2008. Penelitian ini dilakukan di perpustakaan jurusan Matematika Universitas Andalas.

3.2. Metode Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah :

1. mengumpulkan data jarak antar lokasi sambungan pipa indu.
2. membuat graf lengkap untuk data jarak tersebut.
3. merubah graf lengkap ke dalam graf Hamilton.
4. merubah graf Hamilton ke dalam bentuk pohon berakar dengan salah satu titik sebagai akarnya.
5. menentukan total jarak berdasarkan pohon berakar yang terbentuk.
6. menentukan rute total jarak yang paling minimum.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas bagaimana menentukan rute dengan total jarak minimum perjalanan karyawan PDAM dalam memperbaiki sambungan pipa induk dengan menggunakan algoritma *Brute Force* dan kompleksitas waktu asimptotik.

4.1. Hasil Penelitian

PDAM Kabupaten Solok akan melakukan perbaikan sambungan pipa induk pada lima daerah yang berada di wilayah Kotobaru. Berdasarkan pengamatan, lokasi sambungan pipa induk adalah sebagai berikut :

1. Komplek UMMY
2. Jorong Kajai
3. Jorong Bukit Kili Timur
4. Jorong Bukit Kili Barat
5. Komplek Perumnas

Berdasarkan perbandingan skala pada Nagari Kotobaru, diperkirakan jarak yang menghubungkan pipa induk yang satu dengan yang lainnya adalah sebagai berikut :

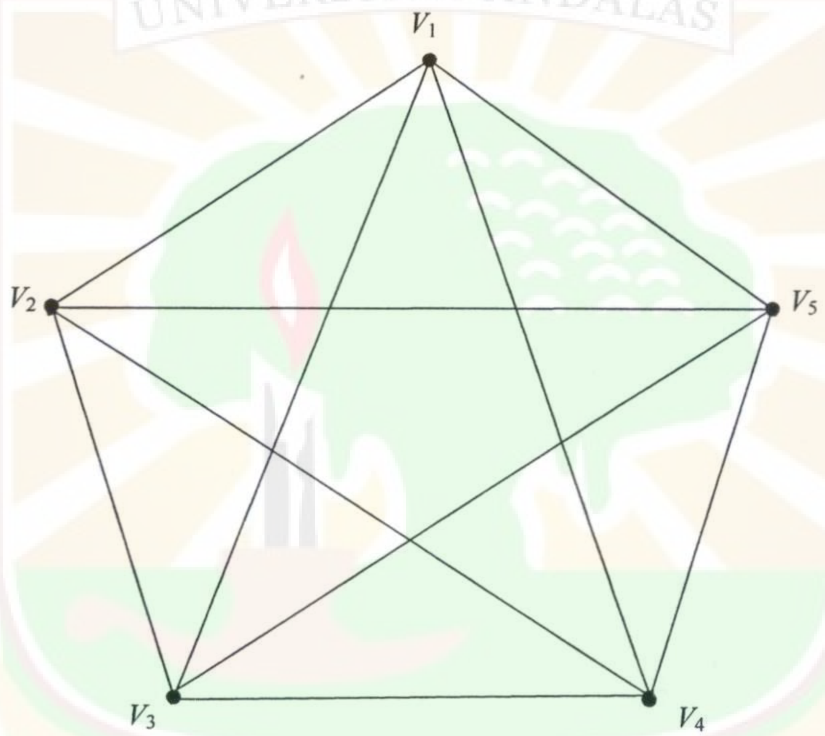
Tabel. 1 Jarak Antar Sambungan Pipa Induk (dalam satuan km)

Lokasi samb. pipa induk	Komplek UMMY	Jrg.Kajai	Jrg. Bkt. Kili Timur	Jrg. Bkt. Kili Barat	Komp. Perumnas
Komplek UMMY	~	1.25	2.50	4.25	3.75
Jrg.Kajai	1.50	~	2	3.25	4
Jrg. Bkt. Kili Timur	2.75	2.25	~	1.75	4.50
Jrg. Bkt. Kili Barat	4.50	3	2	~	2.50
Komp. Perumnas	3.75	4.50	4	2.50	~

4.2. Pembahasan

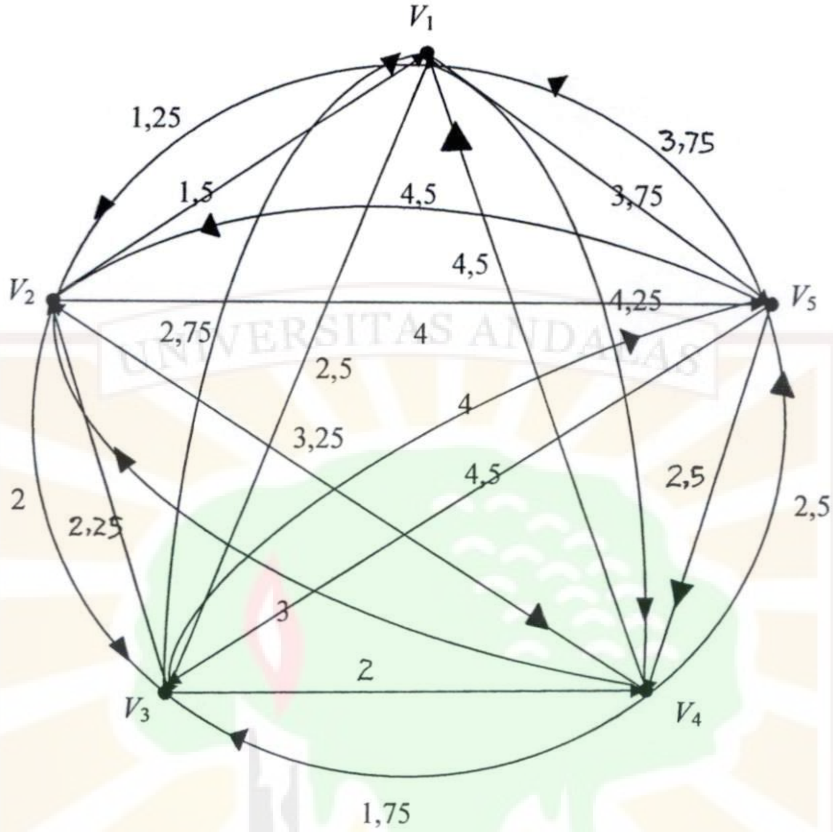
Dari permasalahan yang diketahui diatas, akan ditentukan sirkuit terpendek rute perjalanan karyawan PDAM dalam memperbaiki sambungan pipa induk pada lima lokasi di wilayah Kotobaru dan diasumsikan jalan yang dilalui oleh karyawan tersebut datar. Jika karyawan PDAM memulai perjalanan dari Kantor PDAM yang berlokasi di komplek UMMY, maka setelah karyawan tersebut selesai memperbaiki sambungan pipa induk pada lima lokasi tersebut karyawan akan kembali ke kantor PDAM di komplek UMMY.

Dalam menentukan sirkuit terpendek untuk memperbaiki sambungan pipa induk pada lima lokasi di wilayah Kotobaru, maka permasalahan yang diketahui dimodelkan ke dalam suatu graf berarah yang bobotnya adalah jarak yang menghubungkan antar sambungan pipa induk. Misalkan, lokasi saluran pipa induk yang akan diperbaiki berada di komplek UMMY disimbolkan dengan titik V_1, sambungan pipa induk di jorong Kajai disimbolkan dengan titik V_2, sambungan pipa induk di jorong Bukit Kili Timur disimbolkan dengan titik V_3, sambungan pipa induk di jorong Bukit Kili Barat disimbolkan dengan titik V_4, dan sambungan pipa induk di komplek Perumnas disimbolkan dengan titik V_5. Berikut ini merupakan graf lengkap dari permasalahan yang diketahui :



Gambar 10. Graf Lengkap

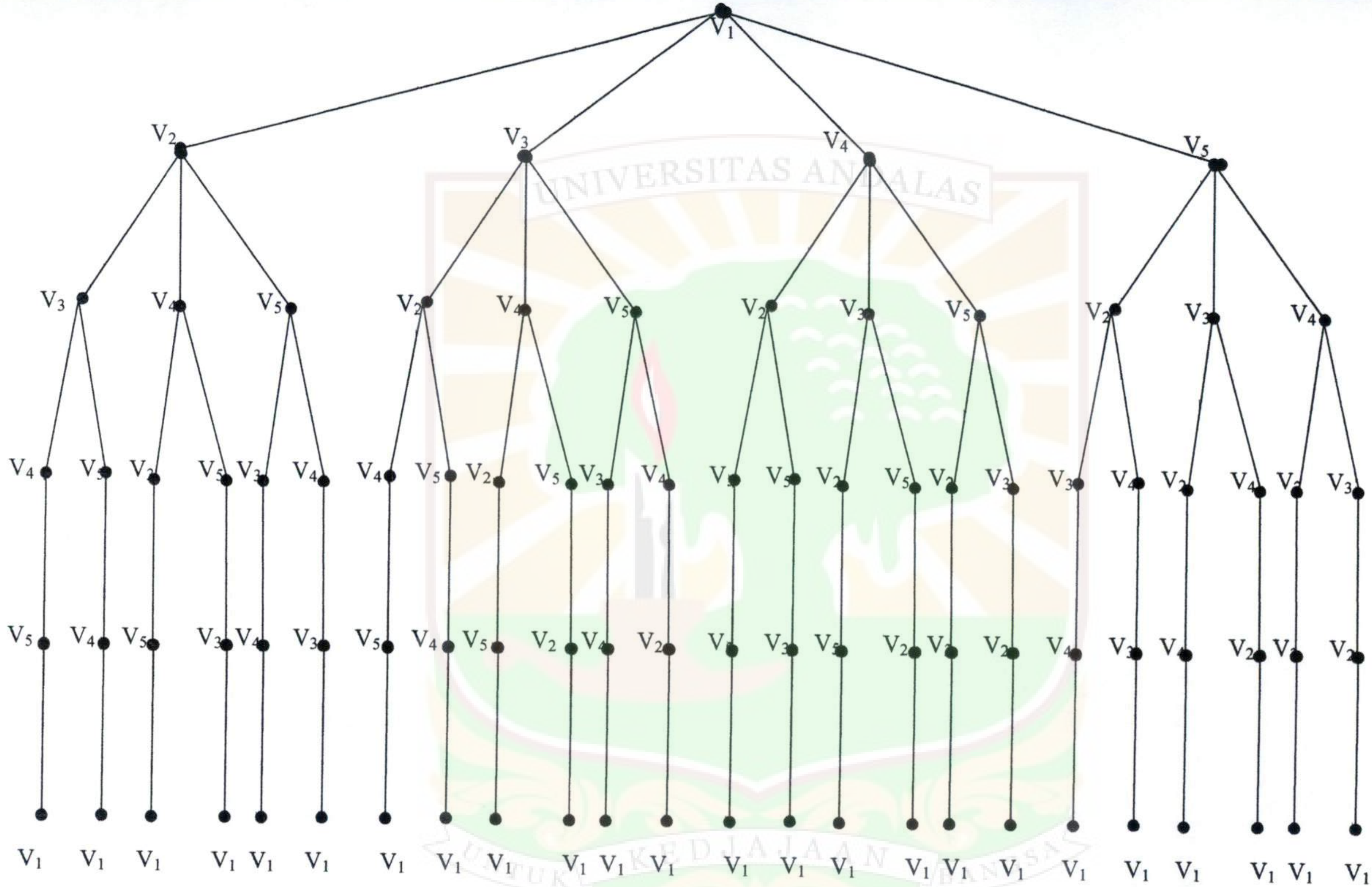
Dari graf lengkap dibuat graf berarah dimana jalan yang menghubungkan antar sambungan pipa induk dianggap sebagai sisi dan jarak tempuh antara suatu sambungan pipa induk ke sambungan pipa induk lainnya adalah bobot dari sisi pada graf. Dalam hal ini diasumsikan rute yang dilalui karyawan adalah jalan dua jalur. Berikut ini adalah Sirkuit Hamilton dari permasalahan tersebut.



Gambar 11. Sirkuit Hamilton

Graf yang terbentuk dari permasalahan diatas merupakan graf berarah. Derajat setiap titik pada graf diatas adalah $d_{in}(v) = 4$ dan $d_{out}(v) = 4$. Berdasarkan Teorema 3, maka graf diatas memiliki sirkuit Hamilton. Selanjutnya akan digunakan algoritma *Brute Force* untuk menemukan sirkuit Hamilton dengan total jarak minimum.

Terdapat 5 buah sambungan pipa induk yang akan diperbaiki, maka banyaknya sirkuit Hamilton yang terbentuk adalah (5-1)! = 24 buah. Untuk mempermudah dalam mendaftarkan semua kemungkinan sirkuit Hamilton yang terbentuk, graf diatas diubah menjadi pohon berakar. Karena sebuah pohon berakar tidak memiliki sirkuit, sedangkan pada TSP akan dicari sirkuit dengan total jarak minimum, maka keturunan terakhir pada pohon berakar dihubungkan dengan titik akar dimana titik V_1 sebagai titik akarnya. Sehingga bentuk graf diatas menjadi seperti gambar berikut ini :



Gambar 11. Pohon Sirkuit Hamilton

Pohon diatas menunjukkan banyaknya sirkuit Hamilton yang terbentuk pada TSP. Untuk menghitung total jarak pada setiap sirkuit Hamilton, dapat digunakan metode *Breadth-first Search.* Misalkan jarak yang ditempuh dari titik i ke titik j didefinisikan sebagai $c(i, j)$ dan $T_k(i, j)$ adalah total jarak pada level k. Level k adalah level pada pohon, dimana $k = 0, 1, 2, ..., n$.

Langkah pertama adalah menghitung total jarak pada

Level 1

- $T_1(V_1, V_2) = c(V_1, V_2) = 1{,}25$.
- $T_1(V_1, V_3) = c(V_1, V_3) = 2{,}50$.
- $T_1(V_1, V_4) = c(V_1, V_4) = 4{,}25$.
- $T_1(V_1, V_5) = c(V_1, V_5) = 3{,}75$.

Oleh karena solusi minimum pada level 1 adalah $T_1(V_1, V_2)$, maka pencarian solusi pada level 2 dilakukan pada cabang-cabang pada titik V_2.

Level 2

- $T_2(V_1, V_2, V_3) = T_1(V_1, V_2) + c(V_2, V_3) = 1{,}25 + 2 = 3{,}25$.
- $T_2(V_1, V_2, V_4) = T_1(V_1, V_2) + c(V_2, V_4) = 1{,}25 + 3{,}25 = 4{,}.50$
- $T_2(V_1, V_2, V_5) = T_1(V_1, V_2) + c(V_2, V_5) = 1{,}25 + 4 = 5{,}25$.

Oleh karena solusi minimum pada level 2 adalah $T_2(V_1, V_2, V_3)$, maka ekspansi selanjutnya adalah titik V_3.

Level 3

- $T_3(V_1, V_2, V_3, V_4) = T_2(V_1, V_2, V_3) + c(V_3, V_4) = 3{,}25 + 1{,}75 = 5$.
- $T_3(V_1, V_2, V_3, V_5) = T_2(V_1, V_2, V_3) + c(V_3, V_5) = 3{,}25 + 4{,}5 = 7{,}75$.

Oleh karena solusi minimum pada level 3 adalah $T_3(V_1, V_2, V_3, V_4)$, maka ekspansi selanjutnya adalah titik V_4.

Level 4

- $T_4(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5) = T_3(V_1, V_2, V_3, V_4) + c(V_4, V_5) = 5 + 2,5 = 7,5$.

Oleh karena solusi minimum pada level 4 adalah $T_4(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5)$, maka ekspansi selanjutnya adalah titik V_5.

Level 5

- $T_5(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\ V_1) = T_4(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5) + c(V_5, V_1) = 7,5 + 3,75 = 11,25$.

Setelah mencapai level 5, maka diperoleh sirkuit Hamilton yang pertama dengan total jarak minimum adalah 11, 25, selanjutnya kembali ke level terakhir dimana terdapat cabang yang belum diekspansi.

Level 4

- $T_4(V_1, V_2, V_3, V_5, V_4) = T_3(V_1, V_2, V_3, V_5) + c(V_5, V_4) = 7,75 + 2,5 = 10,25$.

Oleh karena solusi minimum pada level 4 adalah $T_4(V_1, V_2, V_3, V_5, V_4)$, maka ekspansi selanjutnya adalah titik V_4.

Level 5

- $T_5(V_1, V_2, V_3, V_5, V_4, V_1) = T_4(V_1, V_2, V_3, V_5, V_4) + c(V_4, V_1) = 10,25 + 4,5 = 14,75$.

Setelah mencapai level 5, maka diperoleh sirkuit Hamilton yang kedua dengan total jarak minimumnya adalah 14,75. Karena total jarak sirkuit Hamilton yang kedua lebih besar dari sirkuit Hamilton yang pertama, maka sirkuit Hamilton yang kedua bukan merupakan solusi minimum. Selanjutnya kembali ke level terakhir dimana terdapat cabang yang belum diekspansi.

Level 3

- $T_3(V_1, V_2, V_4, V_3) = T_2(V_1, V_2, V_4) + c(V_4, V_3) = 4{,}5 + 2 = 6{,}5$.
- $T_3(V_1, V_2, V_4, V_5) = T_2(V_1, V_2, V_4) + c(V_4, V_5) = 4{,}5 + 2{,}5 = 7$.

Oleh karena solusi minimum pada level 3 adalah $T_3(V_1, V_2, V_4, V_3)$, maka ekspansi selanjutnya adalah titik V_3.

Level 4

- $T_4(V_1, V_2, V_4, V_3, V_5) = T_3(V_1, V_2, V_4, V_3) + c(V_3, V_5) = 6{,}5 + 4{,}5 = 11$.

Oleh karena solusi minimum pada level 4 adalah $T_4(V_1, V_2, V_4, V_3, V_5)$, maka ekspansi selanjutnya adalah titik V_5.

Level 5

- $T_5\,(V_1, V_2, V_4, V_3, V_5, V_1) = T_4(V_1, V_2, V_4, V_3, V_5) + c(V_5, V_1) = 11 + 3{,}75 = 14{,}75$.

Setelah mencapai level 5, maka diperoleh sirkuit Hamilton yang ketiga dengan total jarak minimum adalah 14,75, karena total jarak sirkuit Hamilton yang ketiga lebih besar dari sirkuit Hamilton yang pertama, maka sirkuit Hamilton yang ketiga bukan merupakan solusi minimum. Selanjutnya kembali ke level terakhir dimana terdapat cabang yang belum diekspansi.

Level 4

- $T_4(V_1, V_2, V_4, V_5, V_3) = T_3(V_1, V_2, V_4, V_5) + c(V_5, V_3) = 7 + 4 = 11$.

Oleh karena solusi minimum pada level 4 adalah $T_4(V_1, V_2, V_4, V_5, V_3)$, maka ekspansi selanjutnya adalah titik V_3.

Level 5

- $T_5(V_1, V_2, V_4, V_5, V_3, V_1) = T_4(V_1, V_2, V_4, V_5, V_3) + c(V_3, V_1) = 11 + 2{,}25 = 13{,}25$.

Setelah mencapai level 5, maka diperoleh sirkuit Hamilton yang keempat dengan total jarak minimum adalah 13,25. Karena total jarak sirkuit Hamilton yang keempat lebih besar dari sirkuit Hamilton yang pertama, maka sirkuit Hamilton yang keempat bukan merupakan solusi minimum. Selanjutnya kembali ke level terakhir dimana terdapat cabang yang belum diekspansi.

Level 3

- $T_3(V_1, V_2, V_5, V_3) = T_2(V_1, V_2, V_5) + c(V_5, V_3) = 5{,}25 + 4 = 9{,}25.$
- $T_3(V_1, V_2, V_5, V_4) = T_2(V_1, V_2, V_5) + c(V_5, V_4) = 5{,}25 + 2{,}5 = 7{,}75.$

Oleh karena solusi minimum pada level 3 adalah $T_3(V_1, V_2, V_5, V_4)$, maka ekspansi selanjutnya adalah titik V_4.

Level 4

- $T_4(V_1, V_2, V_5, V_4, V_3) = T_3(V_1, V_2, V_5, V_4) + c(V_4, V_3) = 7{,}75 + 2 = 9{,}75.$

Oleh karena solusi minimum pada level 4 adalah $T_4(V_1, V_2, V_5, V_{4,} V_3)$, maka ekspansi selanjutnya adalah titik V_3.

Level 5

- $T_5(V_1, V_2, V_5, V_4, V_3, V_1) = T_4(V_1\ V_2, V_5, V_4, V_3) + c(V_3, V_1) = 9{,}75 + 2{,}25 = 12.$

Setelah mencapai level 5, maka diperoleh sirkuit Hamilton yang kelima dengan total jarak minimum adalah 12. Karena total jarak sirkuit Hamilton yang kelima lebih besar dari sirkuit Hamilton yang pertama, maka sirkuit Hamilton yang kelima bukan merupakan solusi minimum. Selanjutnya kembali ke level terakhir dimana terdapat cabang yang belum diekspansi.

Level 4

- $T_4(V_1, V_2, V_5, V_3, V_4) = T_3(V_1, V_2, V_5, V_3) + c(V_3, V_4) = 9{,}25 + 1{,}75 = 11$.

Oleh karena solusi minimum pada level 4 adalah $T_4(V_1, V_2, V_5, V_3, V_4)$, maka ekspansi selanjutnya adalah titik V_4.

Level 5

- $T_5(V_1, V_2, V_5, V_3, V_4, V_1) = T_4(V_1, V_2, V_5, V_3, V_4) + c(V_4, V_1) = 11 + 4{,}5 = 15{,}5$.

Setelah mencapai level 5, maka diperoleh sirkuit Hamilton yang keenam dengan total jarak minimum adalah 15,5. Karena total jarak sirkuit Hamilton yang keenam lebih besar dari sirkuit Hamilton yang pertama, maka sirkuit Hamilton yang keenam bukan merupakan solusi minimum. Selanjutnya kembali ke level terakhir dimana terdapat cabang yang belum diekspansi.

Level 2

- $T_2(V_1, V_3, V_2) = T_1(V_1, V_3) + c(V_3, V_2) = 2{,}5 + 2{,}25 = 4{,}75$.
- $T_2(V_1, V_3, V_4) = T_1(V_1, V_3) + c(V_3, V_4) = 2{,}5 + 1{,}75 = 4{,}25$.
- $T_2(V_1, V_3, V_5) = T_1(V_1, V_3) + c(V_3, V_5) = 2{,}5 + 4{,}5 = 7$.

Oleh karena solusi minimum pada level 2 adalah $T_2(V_1, V_3, V_4)$, maka ekspansi selanjutnya adalah titk V_4.

Level 3

- $T_3(V_1, V_3, V_4, V_2) = T_2(V_1, V_3, V_4) + c(V_4, V_2) = 4{,}25 + 3 = 7{,}25$.
- $T_3(V_1, V_3, V_4, V_5) = T_2(V_1, V_3, V_4) + c(V_4, V_5) = 4{,}25 + 2{,}5 = 6{,}75$.

Oleh karena solusi minimum pada level 3 adalah $T_3(V_1, V_3, V_4, V_5)$, maka ekspansi selanjutnya adalah titik V_5.

Level 4

- $T_4(V_1, V_3, V_4, V_5, V_2) = T_3(V_1, V_3, V_4, V_5) + c(V_5, V_2) = 6{,}75 + 4{,}5 = 11{,}25$.

Oleh karena solusi $T_4(V_1, V_3, V_4, V_5, V_2)$ sama dengan sirkuit Hamilton yang pertama, maka cabang berikutnya tidak diekspansi lagi, kembali ke level 3, titik yang akan diekspansi adalah titik V_2.

Level 4

- $T_4(V_1, V_3, V_4, V_2, V_5) = T_3(V_1, V_3, V_4, V_2) + c(V_2, V_5) = 7{,}25 + 4{,}25 = 11{,}5$.

Oleh karena solusi $T_4(V_1, V_3, V_4, V_2, V_5)$ lebih besar dari solusi minimum pada sirkuit Hamilton pertama, maka titik V_5 tidak diekspansi lagi. Setelah semua cabang pada level 3 diekspansi maka ekspansi selanjutnya adalah cabang pada level 2.

Level 3

- $T_3(V_1, V_3, V_2, V_4) = T_2(V_1, V_3, V_2) + c(V_2, V_4) = 4{,}75 + 3{,}25 = 8$.
- $T_3(V_1, V_3, V_2, V_5) = T_2(V_1, V_3, V_2) + c(V_2, V_5) = 4{,}75 + 4{,}25 = 9$.

Oleh karena solusi minimum pada level 3 adalah $T_3(V_1, V_3, V_2, V_4)$, maka ekspansi selanjutnya adalah titik V_4.

Level 4

- $T_4(V_1, V_3, V_2, V_4, V_5) = T_3(V_1, V_3, V_2, V_4) + c(V_4, V_5) = 8 + 2{,}5 = 10{,}5$.

Oleh karena solusi minimum pada level 4 adalah $T_4(V_1, V_3, V_2, V_4, V_5)$, maka ekspansi selanjutnya adalah titik V_5.

Level 5

- $T_5(V_1, V_3, V_2, V_4, V_5, V_1) = T_4(V_1, V_3, V_2, V_4, V_5) + c(V_5, V_1) = 10{,}5 + 3{,}75 = 14{,}25$.

Oleh karena $T_5(V_1, V_3, V_2, V_4, V_5, V_1)$ lebih besar dari solusi minimum pada sirkuit Hamilton pertama, maka $T_5(V_1, V_3, V_2, V_4, V_5, V_1)$ bukanlah solusi minimum. Kembali ke titik yang belum diekspansi pada level 3.

Level 4

- $T_4(V_1, V_3, V_2, V_5, V_4) = T_3(V_1, V_3, V_2, V_5) + c(V_5, V_4) = 9 + 2,5 = 11,5.$

Oleh karena $T_4(V_1, V_3, V_2, V_5, V_4)$ lebih besar dari solusi minimum pada sirkuit Hamilton pertama, maka titik selanjutnya tidak diekspansi lagi. Kembali ke level 2 titik yang akan diekspansi adalah T_2 (V_1, V_3, V_5).

Level 3

- $T_3(V_1, V_3, V_5, V_2) = T_2(V_1, V_3, V_5) + c(V_5, V_2) = 7 + 4,5 = 11,5.$
- $T_3(V_1, V_3, V_5, V_4) = T_2(V_1, V_3, V_5) + c(V_5, V_4) = 7 + 2,5 = 9,5.$

Oleh karena solusi minimum pada level 3 adalah $T_3(V_1, V_3, V_5, V_4)$, maka ekspansi selanjutnya adalah titik V_3.

Level 4

- $T_4(V_1, V_3, V_5, V_4, V_2) = T_3(V_1, V_3, V_5, V_4) + c(V_4, V_2) = 9,5 + 3 = 12,5.$

Oleh karena $T_4(V_1, V_3, V_5, V_4, V_2)$ lebih besar dari solusi minimum pada sirkuit Hamilton pertama, maka titik V_2 tidak diekspansi lagi.

$T_3(V_1, V_3, V_5, V_2)$ lebih besar dari solusi minimum pada sirkuit Hamilton pertama, maka kembali ke level 2, dimana terdapat cabang yang belum diekspansi.

Level 2

- $T_2(V_1, V_4, V_2) = T_1(V_1, V_4) + c(V_4, V_2) = 4,25 + 3 = 7,25.$
- $T_2(V_1, V_4, V_3) = T_1(V_1, V_4) + c(V_4, V_3) = 4,25 + 2 = 6,25.$
- $T_2(V_1, V_4, V_5) = T_1(V_1, V_4) + c(V_4, V_5) = 4,25 + 2,5 = 6,75.$

Oleh karena solusi minimum pada level 2 adalah $T_2(V_1, V_4, V_3)$, maka ekspansi selanjutnya adalah titik V_3.

Level 3

- $T_3(V_1, V_4, V_3, V_2) = T_2(V_1, V_4, V_3) + c(V_3, V_2) = 6{,}25 + 2{,}25 = 8{,}5$.
- $T_3(V_1, V_4, V_3, V_5) = T_2(V_1, V_4, V_3) + c(V_3, V_5) = 6{,}25 + 4{,}5 = 10{,}75$.

Oleh karena solusi minimum pada level 3 adalah $T_3(V_1, V_4, V_3, V_2)$, maka ekspansi selanjutnya adalah titik V_2.

Level 4

- $T_4(V_1, V_4, V_3, V_2, V_5) = T_3(V_1, V_4, V_3, V_2) + c(V_2, V_5) = 8{,}5 + 4{,}25 = 12{,}75$.

Oleh karena $T_4(V_1, V_4, V_3, V_2, V_5)$ lebih besar dari solusi minimum pada sirkuit Hamilton pertama, maka titik V_5 tidak diekspansi lagi, kembali ke level 3.

Level 4

- $T_4(V_1, V_4, V_3, V_5, V_2) = T_3(V_1, V_4, V_3, V_5) + c(V_5, V_2) = 10{,}75 + 4{,}5 = 15{,}25$.

Oleh karena $T_4(V_1, V_4, V_3, V_5, V_2)$ lebih besar dari solusi minimum pada sirkuit Hamilton pertama, maka titik V_2 tidak diekspansi lagi, kembali ke level 2 titik yang akan diekspansi adalah $T_2(V_1, V_4, V_5)$.

Level 3

- $T_3(V_1, V_4, V_5,V_2) = T_2(V_1, V_4,V_5) + c(V_5,V_2) = 6{,}75 + 4{,}5 = 11{,}25$.
- $T_3(V_1, V_4, V_5,V_3) = T_2(V_1, V_4,V_5) + c(V_5,V_3) = 6{,}75 + 4 = 10{,}75$.

Oleh karena solusi minimum pada level 3 adalah $T_3(V_1, V_4, V_5, V_3)$, maka ekspansi selanjutnya adalah titik V_3.

Level 4

- $T_4(V_1, V_4, V_5, V_3, V_2 = T_3(V_1, V_4, V_5, V_3) + c(V_3, V_2) = 10{,}75 + 2.25 = 13$.

Oleh karena $T_4(V_1, V_4, V_5, V_3, V_2)$ lebih besar dari solusi minimum pada sirkuit Hamilton pertama, maka titik V_2 tidak diekspansi lagi, kembali ke level 3. Dan $T_3(V_1, V_4, V_5, V_2)$ sama dengan solusi minimum pada sirkuit Hamilton pertama maka kembali ke level 2 dimana titik yang belum diekspansi.

Level 3

- $T_3(V_1, V_4, V_2, V_3) = T_2(V_1, V_4, V_2) + c(V_2, V_3) = 7{,}25 + 2 = 9{,}25$.
- $T_3(V_1, V_4, V_2, V_5) = T_2(V_1, V_4, V_2) + c(V_2, V_5) = 7{,}25 + 4 = 11{,}25$.

Oleh karena solusi minimum pada level 3 adalah $T_3(V_1, V_4, V_2, V_3)$, maka ekspansi selanjutnya adalah titik V_3.

Level 4

- $T_4(V_1, V_4, V_2, V_3, V_5) = T_3(V_1, V_4, V_2, V_3) + c(V_3, V_5) = 9{,}25 + 4{,}5 = 13{,}75$.

Oleh karena $T_4(V_1, V_4, V_2, V_3, V_5)$ lebih besar dari solusi minimum pada sirkuit Hamilton pertama, maka titik V_5 tidak diekspansi lagi, kembali ke level 3. Dan $T_3(V_1, V_4, V_2, V_5)$ sama dengan solusi minimum pada sirkuit Hamilton pertama maka kembali ke level terakhir dimana terdapat cabang yang belum diekspansi.

Level 2

- $T_2(V_1, V_5, V_2) = T_1(V_1, V_5) + c(V_5, V_2) = 3{,}75 + 4{,}5 = 8{,}25$.
- $T_2(V_1, V_5, V_3) = T_1(V_1, V_5) + c(V_5, V_3) = 3{,}75 + 4 = 7{,}75$.
- $T_2(V_1, V_5, V_4) = T_1(V_1, V_5) + c(V_5, V_4) = 3{,}75 + 2{,}5 = 6{,}25$.

Oleh karena solusi minimum pada level 2 adalah $T_2(V_1, V_5, V_4)$, maka ekspansi selanjutnya adalah titik V_4.

Level 3

- $T_3(V_1, V_5, V_4, V_2) = T_2(V_1, V_5, V_4) + c(V_4, V_2) = 6,25 + 3 = 9,25$.
- $T_3(V_1, E, V_4, V_3) = T_2(V_1, V_5, V_4) + c(V_4, V_3) = 6,25 + 2 = 8,25$.

Oleh karena solusi minimum pada level 3 adalah $T_3(V_1, V_5, V_4, V_3)$, maka ekspansi selanjutnya adalah titik V_3.

Level 4

- $T_4(V_1, V_5, V_4, V_3, V_2) = T_3(V_1, V_5, V_4, V_3) + c(V_3, V_2) = 8,25 + 2,25 = 10,5$.

Oleh karena solusi minimum pada level 4 adalah $T_4(V_1, V_5, V_4, V_3, V_2)$, maka ekspansi selanjutnya adalah titik V_2.

Level 5

- $T_5(V_1, V_5, V_4, V_3, V_2, V_1) = T_4(V_1, V_5, V_4, V_3, V_2) + c(V_2, V_1) = 10,5 + 1,5 = 12$.

Oleh karena $T_5(V_1, V_5, V_4, V_3, V_2, V_1)$ lebih besar dari solusi minimum pada sirkuit Hamilton pertama, maka $T_5(V_1, V_5, V_4, V_3, V_2, V_1)$ bukanlah solusi minimum. Kembali ke titik yang belum diekspansi pada level 3.

Level 4

- $T_4(V_1, V_5, V_4, V_2, V_3) = T_3(V_1, V_5, V_4, V_2) + c(V_2,V_3) = 9,25 + 2 = 11,25$.

Oleh karena $T_4(V_1, V_5, V_4, V_2, V_3)$ sama dengan sirkuit Hamilton yang pertama, maka cabang berikutnya tidak diekspansi lagi, kembali ke level 2, dimana terdapat titik yang belum diekspansi.

Level 3

- $T_3(V_1, V_5, V_3, V_2) = T_2(V_1, V_5, V_3) + c(V_3, V_2) = 7.75 + 2.25 = 10$.
- $T_3(V_1, V_5, V_3, V_4) = T_2(V_1, V_5, V_3) + c(V_3, V_4) = 7.75 + 1.75 = 9,5$.

Oleh karena solusi minimum pada level 3 adalah $T_3(V_1, V_5, V_3, V_4)$, maka ekspansi selanjutnya adalah titik V_4.

Level 4

- $T_4(V_1, V_5, V_3, V_4, V_2) = T_3(V_1, V_5, V_3, V_4) + c(V_4,V_2) = 9,5 + 3 = 12.5$.

Oleh karena $T_4(V_1, V_5, V_3, V_4, V_2)$ lebih besar dari sirkuit Hamilton yang pertama, maka cabang berikutnya tidak diekspansi lagi, kembali ke level 3, dimana terdapat titik yang belum diekspansi.

Level 4

- $T_4(V_1, V_5, V_3, V_2, V_4) = T_3(V_1, V_5, V_3, V_2) + c(V_2,V_4) = 10 + 3.25 = 13.25$.

Oleh karena $T_4(V_1, V_5, V_3, V_2, V_4)$ lebih besar dari sirkuit Hamilton yang pertama, maka cabang berikutnya tidak diekspansi lagi, kembali ke level 2, dimana terdapat titik yang belum diekspansi.

Level 3

- $T_3(V_1, V_5, V_2, V_3) = T_2(V_1, V_5, V_2) + c(V_2, V_3) = 8.25 + 2 = 10.25$.
- $T_3(V_1, V_5, V_2, V_4) = T_2(V_1, V_5, V_2) + c(V_2, V_4) = 8.25 + 3.25 = 13.50$.

Oleh karena solusi minimum pada level 3 adalah $T_3(V_1, V_5, V_2, V_3)$, maka ekspansi selanjutnya adalah titik V_3.

Level 4

- $T_4(V_1, V_5, V_2, V_3, V_4) = T_3(V_1, V_5, V_2, V_3) + c(V_3, V_4) = 10.25 + 1.75 = 12$.

Oleh karena $T_4(V_1, V_5, V_2, V_3, V_4)$ lebih besar dari sirkuit Hamilton yang pertama, maka cabang berikutnya tidak diekspansi lagi, kembali ke level 3, dimana terdapat titik yang belum diekspansi.

Oleh karena $T_3(V_1, V_5, V_2, V_4)$ lebih besar dari solusi minimum pada sirkuit Hamilton pertama maka $T_3(V_1, V_5, V_2, V_4)$ tidak diekspansi lagi.

Setelah semua titik diekspansi dan solusi yang didapat tidak melebihi solusi minimum pada sirkuit Hamilton pertama yaitu 11,25, maka total jarak minimum dalam masalah ini adalah 11,25. Akibatnya rute yang akan ditempuh oleh karyawan PDAM adalah V_1 - V_2 – V_3 – V_4 - V_5 - V_1. Lokasi yang dilalui oleh karyawan PDAM adalah komplek UMMY, Kelurahan Kajai, Kelurahan Bukit Kili Timur, Kelurahan Bukit Kili Barat, Komplek Perumnas, Komplek UMMY. Berdasarkan contoh penerapan diatas, banyaknya sirkuit Hamilton dari lima lokasi sambungan pipa induk PDAM adalah (5-1)! = 24 sirkuit Hamilton.

Jumlah operasi yang dilakukan untuk menentukan sirkuit Hamilton dengan total jarak minimum pada untuk TSP khususnya pada menentukan rute dengan total jarak minimum perjalanan karyawan PDAM dalam memperbaiki sambungan pipa induk bergantung dengan banyaknya lokasi yang dikunjungi. Semakin banyak lokasi yang akan dikunjungi semakin banyak iterasi yang dilakukan untuk menemukan solusi minimumnya. Pada algoritma *Brute Force* jumlah operasi yang dilakukan dalam menentukan sirkuit terpendek pada TSP adalah $T(5) = O(5!)$ dengan $c = 1$ dan $n_0 \geq 3$.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya untuk masalah TSP dalam menentukan rute perjalanan karyawan PDAM adalah :

1. Solusi optimum atau total jarak minimum rute perjalanan karyawan PDAM dalam memperbaiki sambungan pipa induk adalah 11,25 km dengan rute perjalanan yang dilalui adalah Solusi optimum atau total jarak minimum rute perjalanan karyawan PDAM dalam memperbaiki sambungan pipa induk adalah 11,25 km dengan rute perjalan yang dilalui adalah komplek UMMY, Kelurahan Kajai, Kelurahan Bukit Kili Timur, Kelurahan Bukit Kili Barat, Komplek Perumnas, Komplek UMMY.
2. Kompleksitas waktu asimptotik dari menentukan rute dengan total jarak minimum perjalanan karyawan PDAM memperbaiki sambungan pipa induk adalah $T(5) = O(5!)$ dengan $c = 1$ dan $n_0 \geq 3$.
3. Pada kasus TSP untuk n kecil pemakaian algoritma *Brute Force* sangat efektif.

5.2. Saran

Untuk mempermudah proses penentuan solusi optimum dengan menggunakan algoritma *Brute Force* secara mudah dan cepat maka diharapkan peneliti selanjutnya dapat menerapkan algoritma *Brute Force* kedalam bentuk sebuah program.

DAFTAR PUSTAKA

Albertson, M., 1988. *Discrete Mathematics with Algorithm.* Jhon Wiley & Son. Canada

Bona, M. 1989 *An Introduction Enumeration and Graph Theory.* Word Scientific. New Jersey. London. Singapore. Hongkong.

Buckley, F. Lewinter, M. 2003. *A Friendly Introduction to Graph Teory.* Prentice Hall, New Jersey.

Chartrand, G. 1979. *Graf and Digraf.* Monterey California : Wadworth and Brooks Cole Advanced Books and Software.

Clark, J. 1991. *A First Look at Graph Theory.* Departement of Mathematics and Statistics University of Otago New Zealand. World Scientific Publising CO, Pte, Itd. Singapura.

Deo, N. 1987. *Graph Theory With Application To Engineering and Computer Science.* New Delhi. Pretice Hall of India.

Dudewicz, E. 1987 *Modern Mathematical Statistics*. ITB. Bandung

Munir, R. 2004. *http://kur2003.if.itb.ac.id/file/trans-Bahan%20 Kuliah%20ke-1.doc* diakses tanggal 12 Desember 2007

Munir, R. 2005. *Matematika Diskrit*. Edisi III. Bandung: Informatika.

Rosen, H. 2003. *Discrete and Its Applications.* Fifth Edition. McGrow Hill. Singapura.


BPT
Elf = 187
HU
Elf = 206
KOMPLEX PERUMNAS 246 SR
KELURAHAN BUKIT KILI BARAT
Elf = 153
KELURAHAN Bukit KILI TIMUR
HU
Elf = 132
Elf = 105
KOMPLEX PEMDA KAB. SOLOK
Elf = 100
KELURAHAN KAJAI
Keterangan:
SAMBUNG RUMAH = 194 BUAH
HIDRAN UMUM = 5 BUAH
GATE VALVE (Dalam Keadaan Los)
Elf ELEFASI
PERUSAHAAN DAERAH A
MINUM·KAB DATI II SOL
Gambar.
DAERAH PELAYANAN. KELURAHAN KAJA
SAMBUNG RUMAH, HIDRAN UMUM & JARI-
NGAN PIPA DAN KATUPNYA.
DIGAMBAR : DIPERIKSA : DISETUJUI TANGGAL NO.