NOWHERE-ZERO 3-FLOW PADA PERKALIAN CIRCUIT TREE DENGAN LINTASAN

SKRIPSI

YULIA RESTI FAUZI
0810432033

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2012

Ya Allah!

Jadikanlah ilmuku syafa'at aku di akhirat kelak

Bukan melaknat aku

Jadikanlah ilmuku sebagai penerang kehidupanku

dan kehidupan orang lain

Mampu menerangkan hatiku dan hati orang lain

Jadikanlah ilmuku senantiasa memberi manfaat dan syafa'at

Amin

UCAPAN TERIMA KASIH

Dengan kerendahan hati kupersembahkan karya kecilku ini untuk :

Orangtua-Qu:

Bapak dan Mamak Tersayang

Berjuta-juta terima kasih untuk segala do'a, kasih sayang, perhatian dan dukungan selama ini. Siang malam tak putus-putusnya bermunajat pada Allah SWT agarku menjadi anak yg soleh, yg bisa brbakti.Semoga ku dapat menjadi kebanggaan keluarga dan selalu terucap do'a yang tulusku untuk keselamatan dan kebahagiaan dunia dan akhirat. Terimakasih mak.terimakasih pak. I love u so much.

Keluarga Besar Tercinta:

Abangku Briptu Riki Muharta Fauzi. Terima kasih untuk segala do'a, kasih sayang, perhatian dan dukungan selama ini buat adek bungsu abang. Buat kakak ipar ku,Afrilia Suci, S.Pd,terimaksih do'anya,sebentar lagi uli jadi tantenya si dedek dalam peyut kk,,hehe, smoga proses persalinan kelak dimudahkan oleh Allah,Amiin. Buat Tek Pau, Pak Wali, ne2k, mbah, yahwo,paetek fauzul,tek mes, angku, amay, trims do'a dan dukungannya. Bwt adik2 sepu2, Dio, rjin2 kuliah. buat uda falfi, dedek ifan, ika, arief, fitri, rajin2 belajar, biar bisa sprti kak uli n smoga kelak menjadi kebanggaan kluarga, amin. Tak lupa buat Thoriq dan Erik,meskipun blum bisa baca tulisan kk ini.

Pembimbing-Qu:

Pak Syafrizal Sy (mkasi ats waktu, tempat, bimbingan n ilmu yg bpk berikan bt yuli, maaf sudah banyak ngerepotin bpk. terimakasih wejangan-wejangannya

pak,motivasinya luar biasa).

Penguji-Qu:

Buk Lyra(terimakasih atas saran dan kritikannya bu. coret2an ibu di bahan TA yl begitu berharga, salut buat ketelitian ibu). Pak Dodi(terimakasih pak kritik dan sarannya, meskipun ketika diuji takut banget karena di tantang trus sm bpak). Pak Iqbal (terimakasih kritik dan saran dari bpk).

Dosen-Dosen Qu:

Pak Budi, Pak Efendi,Pak Muhafzan, Pak Werman, Pak Admi, Pak Made, Pak Yudi, Pak Jon, Pak Zulakmal, Pak Syafruddin, Bu Yozza, Bu Ayu, Bu Iza, Bu Monik, Bu Sil, Bu Nova, Bu Riri, dan Bu Maiyastri. Terima kasih atas ilmunya yang berharga.

Pegawai Jurusan Matematika:

Bu Eli, Mama Cun, Pak Syamsir,Kak Opi, Ibu pustaka, dan uni Nur CS.Terimakasih atas bantuannya selama yl studi di jurusan matematika.Ramenya jurusan ketika mau seminar dan kompre tidak akan terlupakan :).

Asisten Laboratorium Statistika dan Komputasi:

Kk Nurul, Da Paul, Kak Putri, Hasan, Ed, Mimi, Kevan, Dedet, Iin, Nela, Maul, Ami 1, Ami 2, Rendy, Devis. Terimakasih atas kerjasamanya.Serta terima kasih kepada Pak Dedi M. Daris sebagai koordinator Labor.

Keluarga besar HIMATIKA:

Semangat n perjuangan bersama2 selalu menjadi kenangan di kemudian hari yang tak terhingga nilainya. Selalu bangga menjadi bagian dari kalian.

Keluarga BP Qu (033):

Buat uni Befi yang udah lulus :).Sobep Qu "Rika", cepat menyusul y, maaf sring dicubitin :)..Buat Anggi (adek BP q), ka2k do'akan cepat menyusul, rajin2 belajar, smngat organisasi dan kuliahnya harus balance.

Teman-Teman Angkatan 2008 (O'Laplace):

Ivone (suaranya yg khas), Liza, Via (Smangat ya bWt ngolah datanya), Virza S.Si (perdana S.Si 08), Nurma, Vebby, Elza, iin (sama SMA, smngat In), Tika Y., Ed, Ica, Rere, Elin, Mimi (semangat uni gesit,azee), Tika S.Si (beyadang bareng dmi

skripsi), Sari (sgra y sari), Manda, Kk Su, Anggi, Oji(ibu aljabar), Icel(ibu aljabar jga), Cinta (Fitri), Erik (pacapek tamek rik), Shanda(udah pindah ke FK), Kak Ade, Tere, Hasan(pak Gub ni), Welly, Desi, Helcy, Lindo, Opa (lanjutkn novel2x), Ana (adek pak Dodi,hee), Mia (Ibu Yose), Mezi (mlanglang cri tmpat krsus mbil,pulkam k sangka pke mtor breng mezi), Dinny S.Si(sehidup semati diprkuliahan, Alhamdulillah S.Si jg), Willy, Elvi, Enid, Eris(smangat Yis), Ciphie S.Si(azzee,sarjana kt mbak), Rika (sobep q), Dina Yelni (tmnx sobep q), Dina Irawati, Ririn, Rara, Sarli, Nely, Ica, Oni, Cesa, Wiwik, Mela, Winalia (ndak ado wak braja sampling lai ya), Uthe, Putri, Yolwi (Pak Ketum HIMATIKA), Tama (Ketua PSB 8), Bayu,.

Uda-Uda,Uni-Uni dan adik-adik junior ku:

Buat uda2 dan uni2 yang barengan komprenya dgn yl, uni Nurul 07, uni Dewi 06, uni Oce 06, uni Suci 06, uni Sari 06, Uni Novi 04, Uni Anne 07,Uni Acha 07, uni Dya 07, uni Nilam 06, uni Opi 06, uni Ika 06, da Berkah Fajar 05, da Irfan 06, uni Ami semoga cepat menyusul, dan senior-senior yang lain, maaf tidak disebutkan satu per satu. Buat junior-junior ku angkatan 09 Dian PS, Zikra, Desi, Rafika, Rahmat, Vira, Suci, Lusi, Devi, dan adik-adik 2010 (praktikan PK2), trims ats semangatnya.

Sahabatku:

Bwt De2k (Ratih), sllu bersama dari SMP, SMA, hingga kuliah, senasib di rautau orang. Kemana2 bareng de2k, smga cepat mnyusul,amiin. Bwt bu bidan Erni, skses sllu bwt karierx. Hesty, cepat menyusul y, bank Riau menunggu,:). Resti, segera mnyusul y, jgn diporsir blajarnya :). Bwt anak2 "KAMSUT" (Konco Arek Tembilahan) yg sama2 jauh dari ortu, trims tas kbersamaannya, jalan2, tawa canda bareng kalian g kan trlupakan, kapan kita jalan2 lagi?. Semoga cepat kelar kuliahnya bwt kalian smua.

Akhirnya terima kasih untuk semua pihak yang terlibat sehingga skripsi ini dapat diselesaikan.

Yulia Resti Fauzi

KATA PENGANTAR

Syukur alhamdulillah, segala puji Penulis haturkan atas kehadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul "***Nowhere-Zero 3-Flow* pada Perkalian *Circuit Tree* dengan Lintasan**". Shalawat dan salam semoga selalu tercurahkan kepada Baginda Rasulullah SAW yang telah menebarkan ilmu dan iman dalam cahaya Islam yang beliau bawa. Penulis menyampaikan ungkapan terima kasih dan penghargaan yang tulus kepada yang terhormat :

1. Bapak Dr. Syafrizal Sy, sebagai ketua jurusan pada jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas sekaligus pembimbing yang telah telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, pengarahan, dan saran kepada penulis sampai selesainya skripsi ini.

2. Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Dr. Ahmad Iqbal Baqi, dan Bapak Dr. Dodi Devianto, M.Sc sebagai penguji yang telah memberikan pengarahan dan saran untuk perbaikan penulisan skripsi ini.

3. Bapak Budi Rudianto, M.Si selaku pembimbing akademis yang telah memberikan nasehat, motivasi, dan merancang penyelesaian studi hingga selesai kepada penulis.

4. Seluruh Bapak/Ibu dosen jurusan Matematika Universitas Andalas yang telah banyak memberikan ilmu yang bermanfaat bagi penulis dan seluruh staf tata usaha jurusan Matematika yang telah banyak membantu selama penulis melaksanakan studi di jurusan Matematika Universitas Andalas.

5. Seluruh teman-teman yang telah mendukung dan memberikan semangat kepada penulis terutama teman-teman angkatan 2008 (O'laplace), teman-teman asisten Laboratorium Statistika dan Komputasi, Da Au, Kak Nurul, Kak Putri, Hasan, Ed, dan Mimi, terimakasih atas kerjasamanya. Buat Dinny, teman satu kamar sekaligus satu jurusan, yang selalu bersama dari awal hingga kuliah selesai, buat Tika dan Ciphic yang sama-sama berjuang

dari awal penulisan skripsi hingga selesai, serta kakak-kakak senior dan adik-adik junior yang tidak bisa disebutkan satu persatu di Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) jurusan Matematika Universitas Andalas.

6. Semua pihak yang telah membantu penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Selesainya skripsi ini tidak lepas dari do'a yang tulus, motivasi, dorongan semangat, dan bantuan yang senantiasa diberikan oleh kedua orang tua, yang mulia ayahanda M. Fauzi, S. Pd dan yang terkasih ibunda Umawidayani, yang tercinta kakanda Briptu Riki Muharta Fauzi, kakanda Afrilia Suci, S.Pd di Tembilahan, Riau. Tidak lupa kepada Tek Pau, Pak Wali, Paetek Fauzul, Tante Mes, Yahwo, Mbah, Nenek, dan seluruh keluarga besar penulis.

Penulis menyadari penulisan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis mengharapkan kritik dan saran agar kelak diperoleh hasil yang lebih baik. Penulis berharap agar skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang memerlukannya. Amin.

Padang, Januari 2012

Yulia Resti Fauzi

ABSTRAK

Suatu graf terhubung G adalah *circuit-tree* jika setiap *block* dari G adalah suatu sirkuit dan graf H adalah suatu lintasan. Perkalian dari G dan H (dinotasikan dengan $G \times H$) adalah graf dengan himpunan titik $V(G) \times V(H)$, dan dua titik (g, h) dan (g', h') bertetangga jika salah satu g dan $g' \in V(G)$ bertetangga di G, atau h dan $h' \in V(H)$ bertetangga di H. Pada skripsi ini akan dikaji eksistensi *nowhere-zero 3-flow* pada $G \times H$.

Kata Kunci: *circuit-tree*, *nowhere-zero* 3-*flow*, *perkalian graf*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Salah satu topik yang dipelajari dalam teori graf adalah *nowhere-zero k-flow* dengan $k > 1$, dimana k adalah bilangan bulat. Topik mengenai *nowhere-zero k-flow* merupakan topik yang sangat luas dalam perkembangan teori graf. Konsep *nowhere-zero k-flow* diperkenalkan oleh W. T. Tutte pada tahun 1954. Tutte membuktikan bahwa terdapat suatu hubungan antara *k-flow* dan $\mathbb{Z}_k - flow$, yaitu dengan menunjukkan bahwa suatu graf G merupakan suatu *nowhere-zero k-flow* jika dan hanya jika G merupakan suatu *nowhere-zero* $\mathbb{Z}_k$*-flow.*

Dalam kajian ini, kajian *nowhere-zero k-flow* dibatasi untuk $k = 3$. Pada tahun 1972, Tutte [**1**] mengemukakan konjektur bahwa setiap graf *2-edge-connected* yang tidak memuat *3-edge cut* merupakan suatu *nowhere-zero 3-flow.* Pada tahun 1976, Tutte [**1**] mengemukakan konjektur bahwa setiap graf *4-edge-connected* merupakan suatu *nowhere-zero 3-flow*, yang sering disebut dengan "konjektur *3-flow* Tutte".

Dalam [**5**] dinyatakan bahwa kajian mengenai *nowhere-zero* 3-*flow* juga dilakukan oleh Imrich dan Skrekovski pada paper yang berjudul *A Theorem on Integer Flows on Cartesian Product of Graphs*, dimana Imrich dan Skrekovski membuktikan bahwa jika dua graf G dan H adalah graf bipartit maka $G \times H$

merupakan suatu *nowhere-zero* 3-*flow*.

Dari paparan di atas, dapat dilihat bahwa konjektur *3-flow* Tutte merupakan suatu kajian yang menarik untuk dikaji. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengkaji *nowhere-zero 3-flow* pada graf yang berasal dari perkalian *circuit tree* dengan lintasan.

1.2 Perumusan Masalah

Masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana eksistensi *nowhere-zero 3-flow* pada perkalian *circuit tree* dengan lintasan.

1.3 Pembatasan Masalah

Agar penulisan ini terarah, maka penulis hanya memfokuskan untuk membahas tentang eksistensi *nowhere-zero 3-flow* pada perkalian *circuit tree* yang terdiri dari dua sirkuit genap dengan lintasan.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan penulisan ini adalah untuk mengkaji eksistensi *nowhere-zero 3-flow* pada perkalian *circuit tree* yang terdiri dari dua sirkuit genap dengan lintasan.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini dibagi menjadi empat bab. Bab I berisi latar belakang masalah, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan. Pada Bab II dijelaskan mengenai definisi dan terminologi dalam teori graf, konsep tentang perkalian graf, dan konsep tentang *nowhere-zero k-flow*. Bab III memuat pembahasan mengenai eksistensi *nowhere-zero 3-flow* pada perkalian *circuit tree* yang terdiri dari dua sirkuit genap dengan lintasan. Kesimpulan dan saran dari hasil pembahasan terdapat pada Bab IV.

BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam bab ini akan diberikan beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan permasalahan yang telah dikemukakan di Bab I. Definisi dan terminologi dalam teori graf disajikan pada Subbab 2.1. Kemudian pada Subbab 2.2 diuraikan tentang konsep perkalian graf, dan terakhir pada Subbab 2.3 diuraikan tentang konsep *nowhere-zero k-flow.*

2.1 Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf

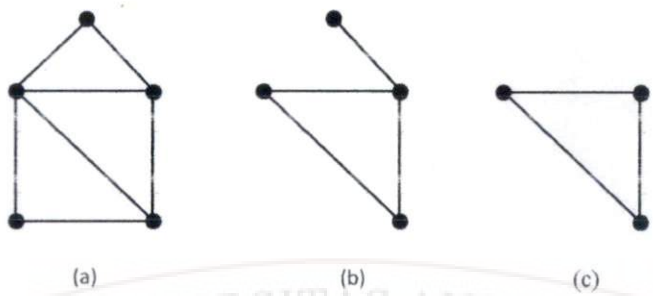
Suatu **graf** G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ adalah himpunan titik tak kosong dan $E(G)$ adalah himpunan sisi yang menghubungkan titik-titik pada G. **Derajat** (***degree***) dari sebuah titik v di G adalah banyaknya sisi di G yang terkait dengan v, dinotasikan dengan $d(v)$. Jika untuk setiap $v \in V(G)$ berlaku $d(v) = r$, maka graf G disebut **graf r-reguler**. Secara khusus, graf 3-reguler disebut graf kubik. Himpunan titik dari G dengan derajat μ dinotasikan dengan V_{μ}. Jika terdapat sisi $e = uv$ dengan $u, v \in V(G)$, maka titik u disebut **bertetangga** (***adjacent***) dengan titik v, dan demikian sebaliknya. Dalam hal ini, sisi e dikatakan **terkait** (***incident***) dengan titik u dan v. Sebaliknya, titik u dan v juga dikatakan terkait dengan sisi e. Misalkan $x \in V(G)$, **lingkungan** (***neighbourhood***) dari x adalah himpunan sisi yang terkait dengan titik x, dinotasikan dengan $N(x)$.

Jalan (***walk***) dari titik v_0 ke titik v_n di G adalah barisan titik dan sisi berturut-turut $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \cdots, e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $v_{i-1}v_i \in E(G)$ untuk $i = 1, 2, \cdots, n$. Jika sisi-sisi $e_1, e_2, \ldots, e_k$ dari suatu jalan W berbeda, maka W disebut suatu ***trail***. Suatu ***trail*** **Euler** dari graf G adalah suatu *trail* yang melewati setiap sisi di G. **Graf Euler** adalah graf terhubung G yang memiliki suatu *trail* tertutup yang memuat setiap sisi di G. *Trail* yang demikian disebut suatu **perjalanan** (***tour***) **Euler**. Jika titik-titik $v_0, v_1, \ldots, v_k$ dari suatu jalan W berbeda, maka W dikatakan suatu **lintasan** (***path***). Lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n, seperti terlihat pada Gambar 2.1. **Panjang** (***length***) dari suatu lintasan adalah banyaknya sisi yang terdapat pada lintasan tersebut. Panjang lintasan P_n adalah $n-1$, untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

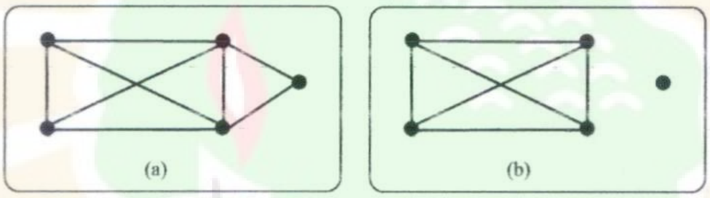
Gambar 2.1. (a) Graf P_2, (b) graf P_3

Suatu graf H disebut **subgraf** dari G jika $E(H) \subseteq E(G)$ dan $V(H) \subseteq V(G)$. Jika $E(H) = \{xy \in E(G) | x, y \in V(H)\}$, maka H dikatakan **subgraf yang diinduksi** (***induced subgraph***) oleh $V(H)$ dari G, seperti terlihat pada Gambar 2.2.

Suatu graf G dikatakan **terhubung** (***connected graph***) jika untuk setiap pasang titik $u, v \in V(G)$ terdapat suatu lintasan yang menghubungkan u dan v tersebut, seperti terlihat pada Gambar 2.3.

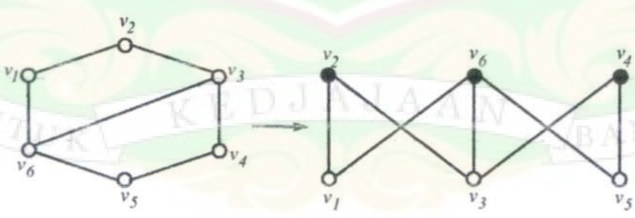


Gambar 2.2. (a) Graf G, (b) Subgraf dari graf G, (c) Subgraf yang diinduksi dari graf G



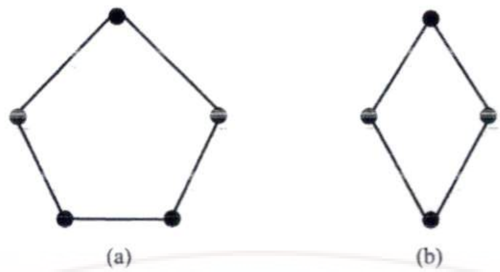
Gambar 2.3. (a) Graf terhubung, (b) graf tidak terhubung

Graf G dikatakan **graf bipartit** jika $V(G)$ dapat dipartisi menjadi dua himpunan X dan Y sedemikian sehingga untuk setiap sisi $e = uv \in E(G)$ berlaku $u \in X$ dan $v \in Y$, seperti terlihat pada Gambar 2.4.



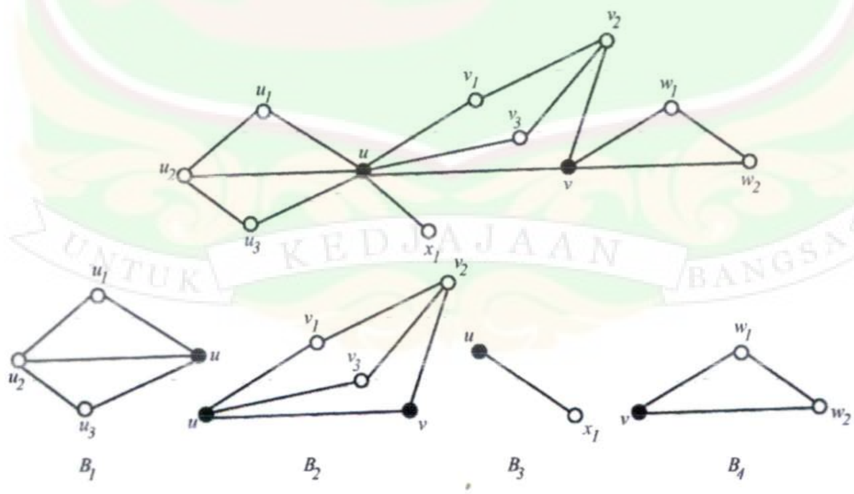
Gambar 2.4. Graf bipartit

Jika G merupakan graf terhubung 2-reguler maka G disebut **sirkuit**. Suatu sirkuit dengan panjang genap disebut **sirkuit genap**, dan sirkuit dengan panjang ganjil disebut **sirkuit ganjil**, dapat dilihat pada Gambar 2.5.



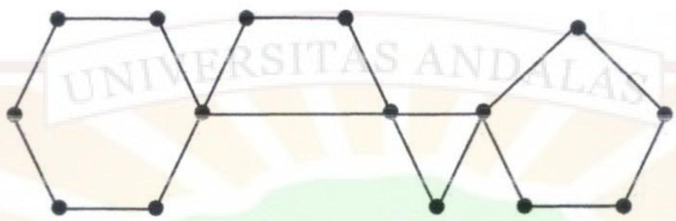
Gambar 2.5. (a) Sirkuit ganjil, (b) Sirkuit genap

Pohon *(tree)* adalah graf terhubung yang tidak memuat sirkuit. Suatu subgraf terhubung maksimal disebut suatu **komponen** dari G. Apabila suatu sisi e dihapus dari G mengakibatkan banyaknya komponen $G - e$ lebih besar dari banyaknya komponen G, maka sisi e tersebut dikatakan sebagai **jembatan**. Suatu ***edge-cut*** (***vertex-cut***) adalah himpunan sisi (titik) yang dihapus sedemikian sehingga banyaknya komponen dari graf tersebut bertambah. ***Block*** adalah suatu graf terhubung yang tidak memuat *vertex-cut*.



Gambar 2.6. Graf terhubung dan *block-block*nya

Definisi 2.1. [5] *Suatu graf terhubung G adalah circuit-tree jika setiap block dari G adalah suatu sirkuit. Suatu circuit-tree G adalah ganjil jika setiap block dari G memiliki panjang ganjil.*

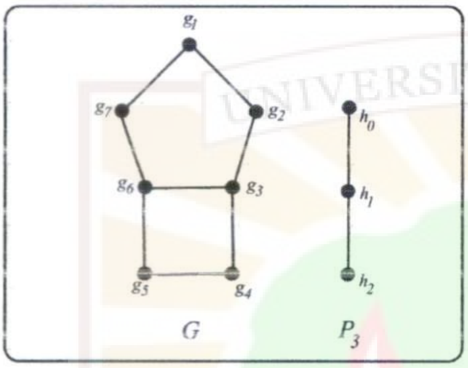


Gambar 2.7. Graf G adalah *circuit tree*

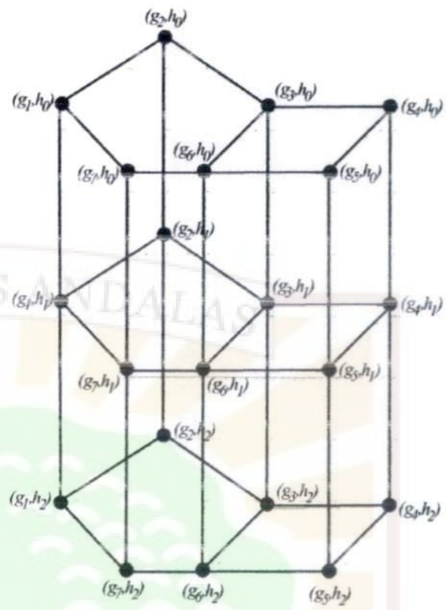
2.2 Perkalian Graf

Misalkan terdapat dua buah graf G dan H. **Perkalian dari G dan H** (dinotasikan dengan $G \times H$) adalah graf dengan himpunan titik $V(G) \times V(H)$, dan dua titik (g, h) dan (g', h') bertetangga jika salah satu g dan $g' \in V(G)$ bertetangga di G, atau h dan $h' \in V(H)$ bertetangga di H, seperti terlihat pada Gambar 2.8.

Misalkan $g_0 \in V(G)$ dan $h_0 \in V(H)$. Subgraf dari $G \times H$ yang diinduksi oleh semua titik $\{(g_0, h) : h \in V(H)\}$ disebut suatu ***H-layer***, dan subgraf $G \times H$ yang diinduksi oleh semua titik $\{(g, h_0) : g \in V(G)\}$ disebut suatu ***G-layer***, seperti terlihat pada Gambar 2.9.

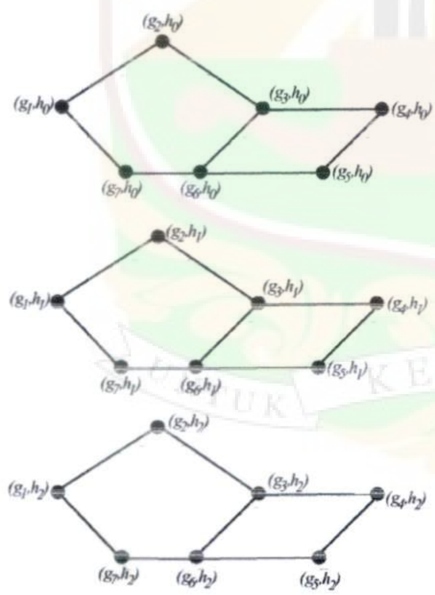


(a)

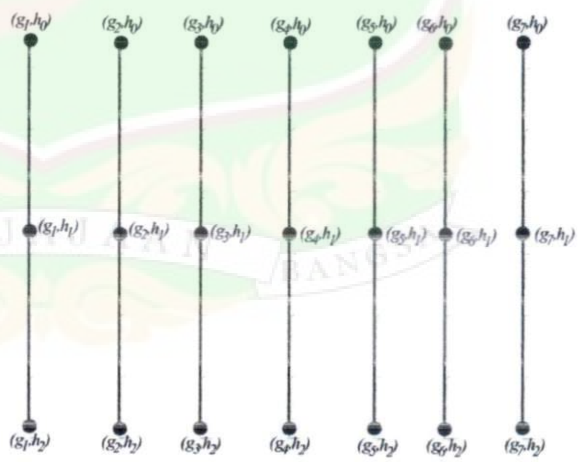


(b)

Gambar 2.8. (a) Graf G dan P_3, (b) graf $G \times P_3$



(a)



(b)

Gambar 2.9. (a) Tiga G-layer dari graf $G \times P_3$, (b) tujuh P_3-layer dari graf $G \times P_3$

2.3 *Nowhere-Zero k-Flow*

Misalkan D adalah **orientasi** di G. Himpunan sisi yang berarah menuju titik v, dinotasikan dengan $E^{+}(v)$ dan himpunan sisi yang berarah meninggalkan titik v, dinotasikan dengan $E^{-}(v)$. Misalkan terdapat lintasan $P_3 = u, v, w$ pada graf berarah G. Maka titik v dikatakan **didominasi** oleh titik u dan w.

Suatu $\mathbb{Z}$ − ***flow*** dari graf G adalah pasangan terurut (D, f) dengan D adalah orientasi dari $E(G)$ dan f adalah pemetaan

$$f : E(G) \mapsto \mathbb{Z}$$

dengan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat sedemikian sehingga untuk setiap titik $v \in V(G)$ berlaku

$$\textstyle\sum_{e \in E^{+}(v)} f(e) - \sum_{e \in E^{-}(v)} f(e) = 0.$$

Pemetaan f tersebut dinamakan ***nowhere-zero Z-flow*** jika $f(e) \neq 0$ untuk setiap $e \in E(G)$.

Untuk $k \geq 2$, definisikan ***k-flow*** sebagai

$$f : E(G) \to Z_k$$

sedemikian sehingga untuk setiap titik $v \in V(G)$ berlaku

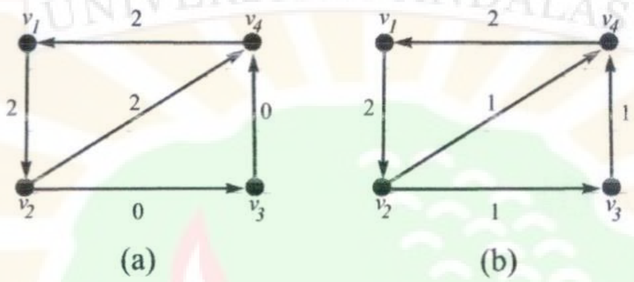
$$\textstyle\sum_{e \in E^{+}(v)} f(e) \equiv \sum_{e \in E^{-}(v)} f(e) \ (mod\ k).$$

Selanjutnya, penulisan "$\equiv 0$ mod k" disingkat dengan "0". Sehingga dapat ditulis

$$\textstyle\sum_{e \in E^{+}(v)} f(e) - \sum_{e \in E^{-}(v)} f(e) = 0.$$

Definisi 2.2. [7] *Orientasi D dari suatu graf G disebut mod-3-orientasi jika* $|E^{+}(v)| \equiv |E^{-}(v)|$ *mod (3).*

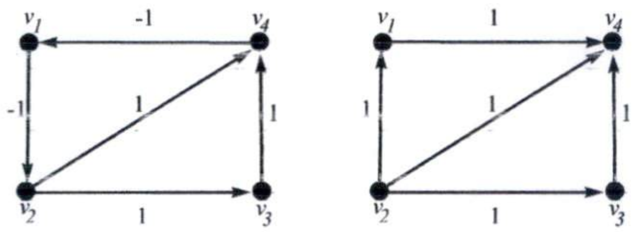
Definisi 2.3. [7] *Support dari suatu k-flow f adalah supp(f) $= \{e \in E(G) : f(e) \not\equiv 0 \text{ mod } k\}$. Suatu k-flow disebut nowhere-zero k-flow jika supp(f)=E(G).*



Gambar 2.10. (a) G merupakan suatu *3-flow*, (b) G merupakan suatu *nowhere-zero 3-flow*

Contoh dari graf yang merupakan suatu *3-flow* dan graf yang merupakan suatu *nowhere-zero 3-flow* dapat dilihat pada Gambar 2.10.

Perhatikan Gambar 2.10, *supp*(f) dari graf pada (a) adalah $\{v_1v_2, v_2v_4, v_4v_1\}$ sementara *supp*(f) dari graf pada (b) adalah $E(G)$. Perhatikan (b) pada Gambar 2.10. Karena $2 \equiv -1$ mod 3, maka graf G mempunyai nilai flow 1 atau -1. Dengan membalikkan arah semua *flow* yang bernilai -1, maka diperoleh graf G yang merupakan *nowhere-zero 3-flow* dengan *flow*-nya bernilai 1, seperti terlihat pada Gambar 2.11.



Gambar 2.11. Penggantian nilai *flow* di G yang merupakan *nowhere-zero 3-flow*

Lema 2.4. [6] *Untuk setiap $k \geq 2$, pernyataan berikut ekivalen*

1. *G merupakan nowhere-zero k-flow*
2. *G merupakan nowhere-zero Z-flow dengan semua nilai flow terletak pada selang* $[1-k, k-1]$.

Bukti.

Dengan membalikkan arah semua sisi yang nilai *flow*-nya negatif, diperoleh G yang merupakan *nowhere-zero k-flow* dengan semua nilai *flow*-nya terletak pada selang $[1-k, k-1]$. ■

Lema 2.5. [6] *Jika graf* G *merupakan nowhere-zero k-flow, maka G merupakan nowhere-zero s-flow untuk sebarang $s \geq k$ dengan $s \in N$.*

Bukti.

Misalkan G merupakan *nowhere-zero k-flow.* Maka berdasarkan Lema 2.4, G merupakan *nowhere-zero Z-flow* dengan semua nilai *flow*-nya terletak pada selang $[1-k, k-1]$. Dengan mengganti semua *flow* bernilai negatif g dengan $s+g$, maka diperoleh G yang merupakan suatu *nowhere-zero s-flow.* ■

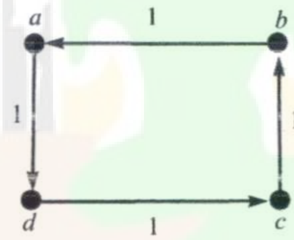
Lema 2.6. [6] *Graf G merupakan nowhere-zero 2-flow jika dan hanya jika G adalah graf Euler.*

Bukti.

Jika G merupakan *nowhere-zero 2-flow* maka nilai *flow* pada setiap sisi adalah 1. Ini mengakibatkan derajat di setiap titik haruslah genap. Berdasarkan definisi graf Euler pada halaman 5, dapat dilihat bahwa graf Euler merupakan graf yang setiap titiknya berderajat genap.

Sebaliknya, misalkan G adalah graf Euler. Maka perjalanan Euler dapat diuraikan menjadi *cycle-cycle*. Dengan mengirimkan *flow* bernilai 1 melewati setiap *cycle*, maka diperoleh *nowhere-zero 2-flow* untuk graf G. ■

Contoh dari graf G yang merupakan *nowhere-zero 2-flow* dapat dilihat pada Gambar 2.12 berikut ini.



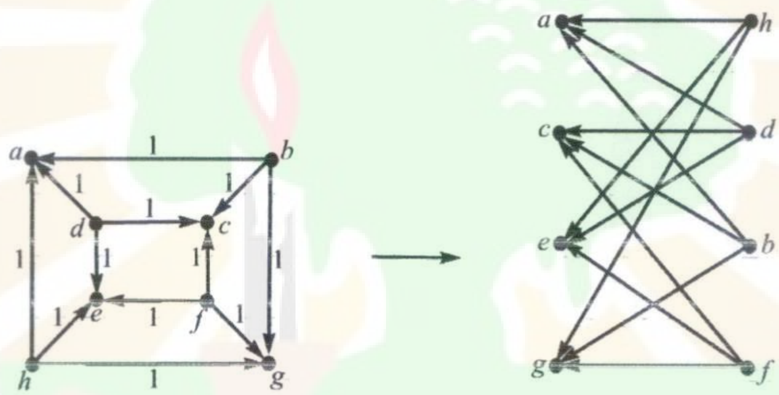
Gambar 2.12. Graf yang merupakan *nowhere-zero 2-flow*

Lema 2.7. [6] *Suatu graf kubik G merupakan nowhere-zero 3-flow jika dan hanya jika G adalah graf bipartit.*

Bukti.

Misalkan graf kubik G merupakan *nowhere-zero 3-flow*. Karena $2 \equiv -1 \bmod 3$, dan $-2 \equiv 1 \bmod 3$, maka dengan membalikkan arah *flow* yang bernilai negatif, diperoleh G yang merupakan *nowhere-zero 3-flow* dengan nilai *flow* 1. Pada setiap titik, arah ketiga sisi masuk semua atau keluar semua. Titik yang arah *flow*nya masuk semua disebut sebagai *sink* dan titik yang arah *flow*nya keluar semua disebut sebagai *source*. Dengan mengelompokkan semua *sink* menjadi satu kelompok dan semua *source* menjadi satu kelompok yang lain, diperoleh G yang merupakan graf bipartit.

Sebaliknya, misalkan graf kubik G adalah bipartit. Dengan memberi arah semua sisi dari satu kelas titik ke kelas titik yang lain dan memberi nilai *flow* 1 diperoleh suatu graf G yang merupakan *nowhere-zero 3-flow*. ■



Gambar 2.13. Graf kubik yang merupakan *nowhere-zero 3-flow* adalah graf bipartit

Lema 2.8. [5] *Misalkan G adalah suatu graf. Jika subgraf dari G yang diinduksi oleh V_3 bukan bipartit, maka G bukan merupakan nowhere-zero 3-flow.*

Bukti.

Misalkan G merupakan suatu *nowhere-zero 3-flow*. Maka berdasarkan Lema 2.7, subgraf dari G yang diinduksi oleh V_3 adalah graf bipartit.■

Lema 2.9. [7] *Misalkan* (D, f) *suatu modular k-flow di* G *dan* E_0 *adalah suatu subhimpunan dari* $E(G)$. *Maka* (D_{E0}, f_{E0}) *juga dikatakan suatu modular k-flow di* G.

BAB III

NOWHERE-ZERO 3-FLOW PADA PERKALIAN *CIRCUIT TREE* DENGAN LINTASAN

Untuk mengkaji eksistensi *nowhere-zero 3-flow* pada perkalian *circuit tree* yang terdiri dari dua sirkuit genap dengan lintasan, akan digunakan lema-lema berikut.

Lema 3.1. *Graf G merupakan suatu nowhere-zero 3-flow jika dan hanya jika G memuat mod-3-orientasi.*

Bukti.

Pertama-tama misalkan G suatu graf yang merupakan *nowhere-zero 3-flow*. Akan ditunjukkan bahwa G mempunyai suatu mod-3-orientasi D. Misalkan (D, f) merupakan suatu *3-flow* dengan fungsi $f(e)$ bernilai positif di G. Misalkan $E_2 = e \in E(G)$, dengan $f(e) = 2$. Berdasarkan Lema 2.9, (D_{E2}, f_{E2}) adalah *nowhere-zero modular 3-flow* dengan $f_{E2} = 1$ untuk setiap sisi $e \in E(G)$. Jadi jelas bahwa D_{E2} juga merupakan mod-3-orientasi di G.

Selanjutnya misalkan G mempunyai suatu mod-3-orientasi. Akan ditunjukkan bahwa G merupakan suatu *nowhere-zero 3-flow*. Jika G mempunyai suatu mod-3-orientasi D, maka berdasarkan Definisi 2.2 diperoleh $|E^+(v)| \equiv |E^-(v)| \; mod\,(3)$ untuk setiap $v \in V(G)$. Kemudian berikan suatu fungsi $f(e) = 1$ untuk setiap sisi $e \in E(G)$. Jadi, diperoleh (D, f) merupakan *nowhere-zero 3-flow* di G. ■

Lema 3.2. *Misalkan G adalah suatu sirkuit dan H adalah suatu lintasan, maka*

- *graf $G \times H$ merupakan suatu nowhere-zero $\mathbb{Z}_3$-flow jika dan hanya jika G adalah suatu sirkuit genap,*

- *jika G merupakan sirkuit genap maka untuk setiap titik $v \in V(G)$, graf $G \times H$ merupakan suatu nowhere-zero 3-flow (D, f) sedemikian sehingga H-layer $\{v\} \times H$ diorientasikan sebagai lintasan berarah dengan $f(e) = 1$ untuk setiap sisi e dari $\{v\} \times H$.*

Bukti.

Misalkan $G = g_0 \cdots g_{2k-1} g_0$ adalah sirkuit genap dan $H = h_0 \cdots h_t$ adalah lintasan. Akan ditunjukkan bahwa $G \times H$ mempunyai suatu mod-3 orientasi D dengan cara sebagai berikut:

1. Pada *G-layer* $G \times \{h_0\}$, titik $(g_{2\mu}, h_0)$ didominasi oleh kedua titik $(g_{2\mu-1}, h_0)$ dan $(g_{2\mu+1}, h_0)$ untuk setiap $\mu = 0, \cdots, (k-1) mod\ 2k$;

2. Pada *G-layer* $G \times \{h_t\}$, titik $(g_{2\mu}, h_t)$ didominasi oleh kedua titik $(g_{2\mu-1}, h_t)$ dan $(g_{2\mu+1}, h_t)$ untuk setiap $\mu = 0, \cdots, (k-1) mod\ 2k$;

3. Setiap *G-layer* $G \times \{h_r\}$ selain ($r \neq 0$ atau t) diorientasikan sebagai sirkuit berarah;

4. Untuk setiap $\mu = 0, \cdots, k-1$, *H-layer* $\{g_{2\mu}\} \times H$ diorientasikan sebagai lintasan berarah dari titik $(g_{2\mu}, h_0)$ ke titik $(g_{2\mu}, h_t)$;

5. Untuk setiap $\mu = 0, \cdots, k-1$, *H-layer* $\{g_{2\mu+1}\} \times H$ diorientasikan sebagai lintasan berarah dari titik $(g_{2\mu+1}, h_t)$ ke titik $(g_{2\mu+1}, h_0)$.

Untuk melihat bahwa D adalah mod-3-orientasi, misalkan $f : E(G \times H) \mapsto \{1\}$. Jadi jelas bahwa (D, f) merupakan mod-3-orientasi. Berdasarkan Lema 3.1, maka (D, f) merupakan suatu *nowhere-zero 3-flow*.

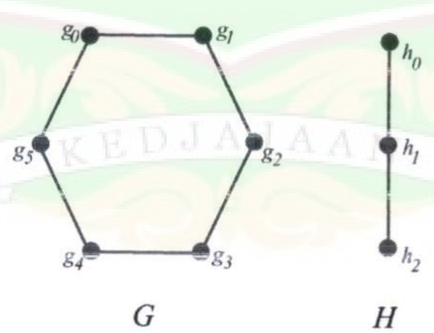
Sebaliknya, berdasarkan Lema 2.8, jika G adalah suatu sirkuit dengan panjang ganjil, maka $G \times H$ memuat sirkuit genap yang terdiri dari titik-titik berderajat 3 yang bukan merupakan suatu *nowhere-zero 3-flow*. ■

Untuk lebih jelasnya, perhatikan ilustrasi berikut.

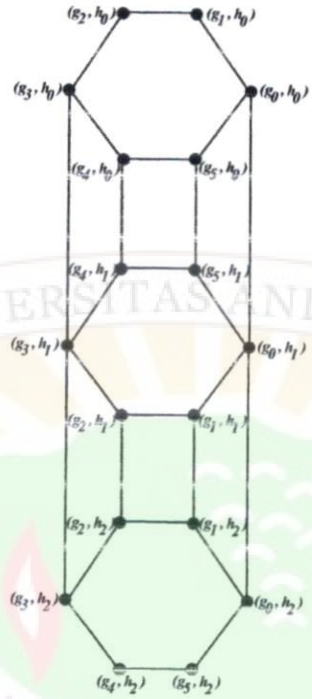
Ilustrasi 1.

Diberikan sirkuit genap G dengan titik-titik $g_0g_1g_2g_3g_4g_{2.3-1}g_0$ dan lintasan P_3 dengan titik-titik $h_0h_1h_2$, seperti pada Gambar 3.1. Akan diselidiki *nowhere-zero 3-flow* pada $G \times P_3$.

Berdasarkan bukti Lema 3.2, maka nilai k pada sirkuit G adalah 3, dan nilai t pada lintasan P_3 adalah 2. Selanjutnya diberikan mod-3-orientasi pada graf $G \times P_3$, seperti terlihat pada Gambar 3.2.



Gambar 3.1. Graf G adalah sirkuit genap dan H adalah lintasan P_3



Gambar 3.2. Perkalian sirkuit genap dengan lintasan P_3

Akan diselidiki bahwa $G \times H$ merupakan mod-3-orientasi D dengan cara sebagai berikut:

1. Dalam *G-layer* $G \times \{h_0\}$, titik $(g_{2\mu}, h_0)$ didominasi oleh kedua titik $(g_{2\mu-1}, h_0)$ dan titik $(g_{2\mu+1}, h_0)$ untuk setiap $\mu = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$;

   Ilustrasi :

   - Untuk kasus $\mu = 0$

     Pada *G-layer* $G \times \{h_0\}$, titik (g_0, h_0) didominasi oleh kedua titik (g_5, h_0) dan titik (g_1, h_0) ;

   - Untuk kasus $\mu = \frac{1}{2}$

     Pada *G-layer* $G \times \{h_0\}$, titik (g_1, h_0) didominasi oleh kedua titik (g_0, h_0) dan titik (g_2, h_0) ;

- Untuk kasus $\mu = 1$

  Pada *G-layer* $G\times\{h_0\}$, titik (g_2, h_0) didominasi oleh kedua titik (g_1, h_0) dan titik (g_3, h_0) ;

- Untuk kasus $\mu = \frac{3}{2}$

  Pada *G-layer* $G\times\{h_0\}$, titik (g_3, h_0) didominasi oleh kedua titik (g_2, h_0) dan titik (g_4, h_0) ;

- Untuk kasus $\mu = 2$

  Pada *G-layer* $G\times\{h_0\}$, titik (g_4, h_0) didominasi oleh kedua titik (g_3, h_0) dan titik (g_5, h_0).

2. Dalam *G-layer* $G\times\{h_2\}$, titik $(g_{2\mu}, h_2)$ didominasi oleh kedua titik $(g_{2\mu-1}, h_2)$ dan titik $(g_{2\mu+1}, h_2)$ untuk setiap $\mu = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$;

   Ilustrasi :

   - Untuk kasus $\mu = 0$

     Pada *G-layer* $G\times\{h_2\}$, titik (g_0, h_2) didominasi oleh kedua titik (g_5, h_2) dan titik (g_1, h_2) ;

   - Untuk kasus $\mu = \frac{1}{2}$

     Pada *G-layer* $G\times\{h_2\}$, titik (g_1, h_2) didominasi oleh kedua titik (g_0, h_2) dan titik (g_2, h_2) ;

   - Untuk kasus $\mu = 1$

     Pada *G-layer* $G\times\{h_2\}$, titik (g_2, h_2) didominasi oleh kedua titik (g_1, h_2) dan titik (g_3, h_2) ;

   - Untuk kasus $\mu = \frac{3}{2}$

Pada *G-layer* $G \times \{h_2\}$, titik (g_3, h_2) didominasi oleh kedua titik (g_2, h_2) dan titik (g_4, h_2) ;

- Untuk kasus $\mu = 2$

  Pada *G-layer* $G \times \{h_2\}$, titik (g_4, h_0) didominasi oleh kedua titik (g_3, h_2) dan titik (g_5, h_2).

3. Setiap *G-layer* $G \times \{h_r\}$ selain ($r \neq 0$ atau 2) diarahkan sebagai sirkuit berarah;

   Ilustrasi :

   Karena $r \neq 0$ atau t, maka r yang dimaksud dalam hal ini adalah $r = 1$. Sehingga $G \times \{h_1\}$ diarahkan sebagai sirkuit berarah.

4. Untuk setiap $\mu = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$, *H-layer* $\{g_{2\mu}\} \times H$ diarahkan sebagai lintasan berarah dari titik $(g_{2\mu}, h_0)$ ke titik $(g_{2\mu}, h_2)$;

   Ilustrasi :

   - Untuk kasus $\mu = 0$

     H-layer $\{g_0\} \times H$ diorientasikan sebagai lintasan berarah dari titik (g_0, h_0) ke titik (g_0, h_2);

   - Untuk kasus $\mu = \frac{1}{2}$

     H-layer $\{g_0\} \times H$ diorientasikan sebagai lintasan berarah dari titik (g_1, h_0) ke titik (g_1, h_2);

   - Untuk kasus $\mu = 1$

     H-layer $\{g_2\} \times H$ diorientasikan sebagai lintasan berarah dari titik (g_2, h_0) ke titik (g_2, h_2);

- Untuk kasus $\mu = \frac{3}{2}$

  H-layer $\{g_0\} \times H$ diorientasikan sebagai lintasan berarah dari titik (g_3, h_0) ke titik (g_3, h_2);

- Untuk kasus $\mu = 2$

  H-layer $\{g_4\} \times H$ diorientasikan sebagai lintasan berarah dari titik (g_4, h_0) ke titik (g_4, h_2).

5. Untuk setiap $\mu = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$, *H-layer* $\{g_{2\mu+1}\} \times H$ diorientasikan sebagai lintasan berarah dari titik $(g_{2\mu+1}, h_t)$ ke titik $(g_{2\mu+1}, h_0)$;

   Ilustrasi :

   - Untuk kasus $\mu = 0$

     H-layer $\{g_1\} \times H$ diorientasikan sebagai lintasan berarah dari titik (g_1, h_2) ke titik (g_1, h_0);

   - Untuk kasus $\mu = \frac{1}{2}$

     H-layer $\{g_2\} \times H$ diorientasikan sebagai lintasan berarah dari titik (g_2, h_2) ke titik (g_2, h_0);

   - Untuk kasus $\mu = 1$

     H-layer $\{g_3\} \times H$ diorientasikan sebagai lintasan berarah dari titik (g_3, h_2) ke titik (g_3, h_0);

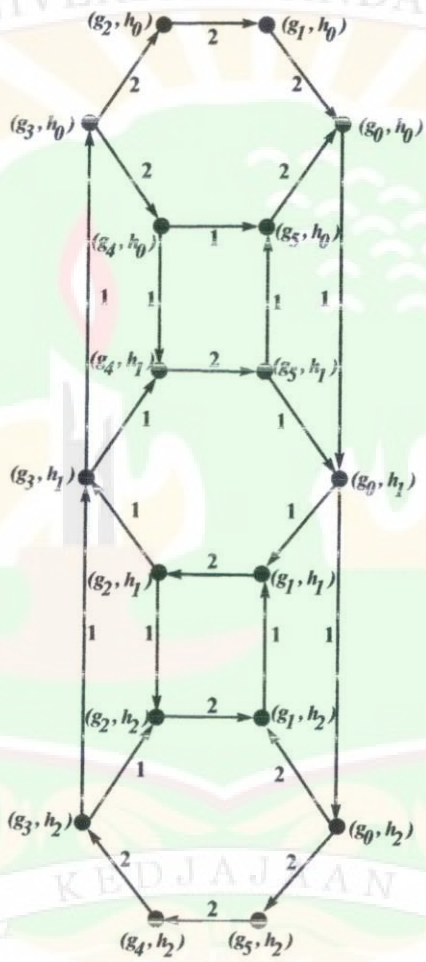
   - Untuk kasus $\mu = \frac{3}{2}$

     H-layer $\{g_4\} \times H$ diorientasikan sebagai lintasan berarah dari titik (g_4, h_2) ke titik (g_4, h_0);

   - Untuk kasus $\mu = 2$

H-layer $\{g_5\} \times H$ diorientasikan sebagai lintasan berarah dari titik (g_5, h_2) ke titik (g_5, h_0).

Berdasarkan ilustrasi-ilustrasi di atas, mod-3-orientasi untuk graf $G \times H$ dapat dilihat pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3. Perkalian sirkuit genap dengan lintasan P_3 yang merupakan *nowhere-zero 3-flow*

Adapun teorema utama yang akan dikaji pada skripsi ini adalah sebagai berikut.

Teorema 3.3. *Misalkan G adalah suatu circuit tree yang terdiri dari dua sirkuit genap dan H adalah suatu lintasan. Maka $G \times H$ merupakan suatu nowhere-zero 3-flow.*

Bukti.

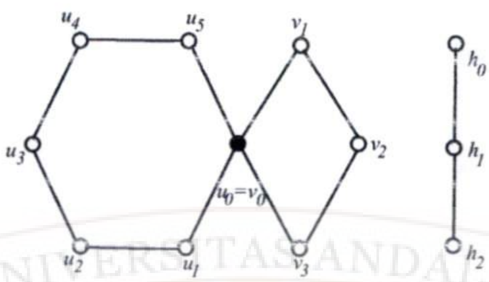
Misalkan $C_1 = u_0u_1 \cdots u_au_0$ dan $C_2 = v_0v_1 \cdots v_bv_0$ adalah sirkuit dari G dengan *cut-vertex* $x = u_0 = v_0$. Berdasarkan Lema 3.2, $C_i \times H$ merupakan *nowhere-zero* $\mathbb{Z}_3$-flow (D, f_i) untuk setiap $i = 1$ dan $i = 2$ sedemikian sehingga $\{u_0\} \times H$ dan $\{v_0\} \times H$ diorientasikan sebagai lintasan berarah dengan nilai *flow* yang sama yaitu 1. Oleh karena itu (D, f_1) dan (D, f_2) merupakan *nowhere-zero $\mathbb{Z}_3$-flow* dari $G \times H$ dan karenanya (D, f_1) dan (D, f_2) merupakan *nowhere-zero 3-flow* dari $G \times H$. ■

Untuk lebih jelasnya, perhatikan ilustrasi berikut.

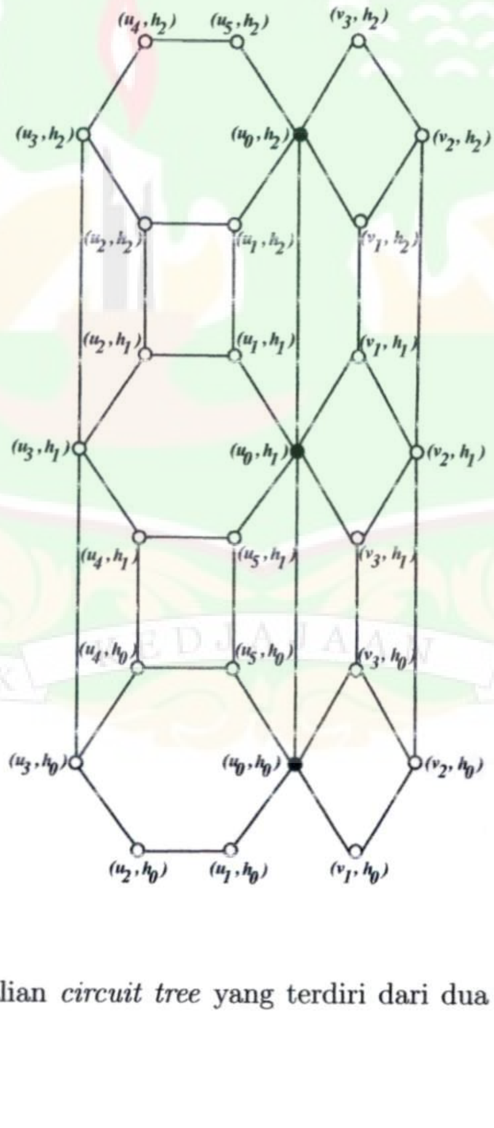
Ilustrasi 1.

Diberikan *circuit tree* yang terdiri dari dua sirkuit genap dengan titik-titik $u_0u_1u_2u_3u_4u_5u_0$ dan lintasan P_3 dengan titik-titik $h_0h_1h_2$. *Cut-vertex* dari kedua sirkuit genap tersebut adalah $x = u_0 = v_0$, seperti pada Gambar 3.4. Akan diselidiki *nowhere-zero 3-flow* pada perkalian dari dua graf tersebut.

Selanjutnya, perkalian dari dua graf di atas dapat dilihat pada Gambar 3.5.

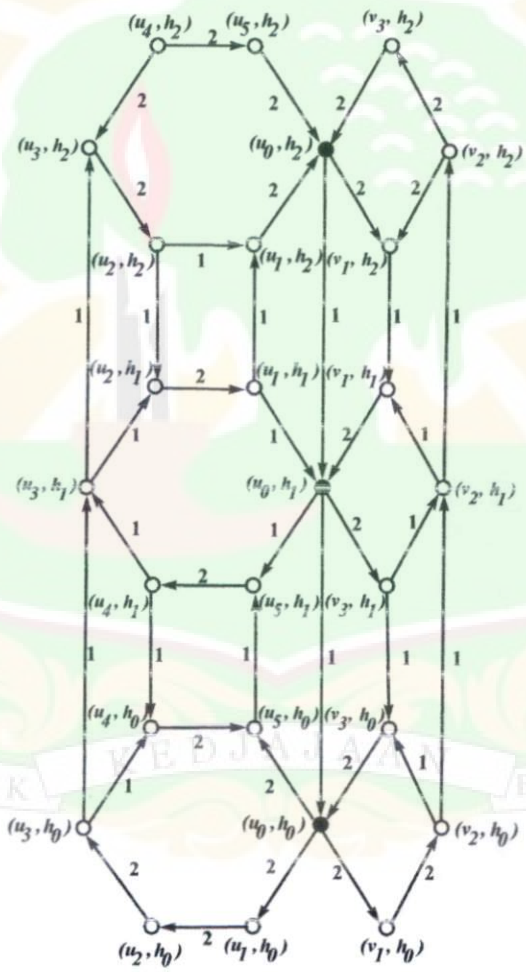


Gambar 3.4. *Circuit tree* yang terdiri dari dua sirkuit genap dan lintasan P_3



Gambar 3.5. Perkalian *circuit tree* yang terdiri dari dua sirkuit genap dengan lintasan

Pemberian mod-3-orientasi untuk perkalian dua graf ini sama halnya dengan ilustrasi pada Lema 3.2. $C_i \times H$ merupakan *nowhere-zero* $\mathbb{Z}_3$-flow (D, f_i) untuk setiap $i = 1$ dan $i = 2$ sedemikian sehingga $\{u_0\} \times H$ dan $\{v_0\} \times H$ diorientasikan sebagai lintasan berarah dengan nilai *flow* yang sama yaitu 1. Oleh karena itu, (D, f_1) dan (D, f_2) merupakan *nowhere-zero* $\mathbb{Z}_3$-flow dari $G \times H$ dan karenanya (D, f_1) dan (D, f_2) merupakan *nowhere-zero 3-flow* dari $G \times H$.



Gambar 3.6. Perkalian *circuit tree* yang terdiri dari dua sirkuit genap dengan lintasan yang merupakan *nowhere-zero 3-flow*

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan dapat disimpulkan bahwa graf yang berasal dari perkalian *circuit tree* yang terdiri dari dua sirkuit genap dengan lintasan merupakan suatu *nowhere zero 3-flow*.

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya penulis menyarankan untuk mengkaji eksistensi *nowhere zero 3-flow* pada perkalian *circuit tree* yang terdiri dari beberapa sirkuit ganjil dengan lintasan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bondy, J. A. dan U. S. R. Murty. 1976. *Graph Theory with Applications.* Macmillan, London.

[2] Chartrand, G. dan P. Zhang. 2005. *Introduction to Graph Theory.* McGraw-Hill International Editions, Singapore.

[3] Holton, D. A. dan J. Sheehan. 1993. *The Petersen Graph.* Cambridge University Press, Cambridge.

[4] Imrich, W. dan S. Klavzar. 2000. *Product Graphs: Structure and Recognition.* John Wiley and Sons, Inc., Canada.

[5] Shu, J. dan C. Q. Zhang. 2005. Nowhere-Zero 3-Flows in Product of Graphs. *J Graph Teory* **50**: 79-89.

[6] Uttunggadewa, S. 2000. Indonesian Graphs: An Investigation of the Nowhere-Zero Five-Flow Conjecture and the Cycle Double Cover Conjecture. *Dissertation, unpublished.*

[7] Zhang, C. Q. 1997. *Integer Flows and Cycle Covers of Graphs.* Marcel Dekker, New York.

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Yulia Resti Fauzi, dilahirkan di Tembilahan pada tanggal 22 Juli 1990. Penulis merupakan anak kedua dari dua bersaudara dari pasangan M. Fauzi, S.Pd dan Umawidayani. Penulis mengikuti pendidikan di SD Negeri 002 Tembilahan pada tahun 1996-2002, SMPN 02 Tembilahan pada tahun 2002-2005, SMAN 1 Tembilahan Hulu pada tahun 2005-2008, dan jurusan Matematika Universitas Andalas pada tahun 2008-2012 melalui jalur SNMPTN (Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Nasional). Selama menjadi mahasiswa di jurusan Matematika FMIPA Unand, penulis aktif dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) dan Asisten Laboratorium Statistika dan Komputasi jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas. Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) pada tahun 2011 di Jorong Koto Baru, Kenagarian Sungai Tunu Barat, Kabupaten Pesisir Selatan dalam rangka menyelesaikan salah satu mata kuliah wajib fakultas.