ANALISIS KESTABILAN MODEL SIAR PENYEBARAN PENYAKIT AIDS

SKRIPSI

CHITRA WAHYUANA
06934030

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2012

KATA PENGANTAR

Pertama-tama penulis memanjatkan puji syukur Alhamdulillah kehadirat Allah SWT atas karunia, rahmat, dan hidayah-Nya, sehingga penulis berhasil menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul "Analisis Kestabilan Penyebaran Penyakit AIDS".

Penyusunan tugas akhir ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar kesarjanaan, serta sebagai wujud nyata dari disiplin ilmu yang telah penulis dapatkan selama mengikuti perkuliahan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas. Dalam proses penyusunan skripsi ini tidak lepas dari hambatan dan kesulitan. Namun berkat bantuan dari berbagai pihak akhirnya skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik. Untuk itu, penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Muhafzan selaku Pembimbing Utama dan pembimbing akademik yang dengan sabar telah memberikan bimbingan, pengarahan, saran, dan masukan yang berguna sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.
2. Bapak Dr. Ahmad Iqbal Baqi selaku Pembimbing Kedua yang telah memberikan bimbingan, saran, dan bantuan literatur sehingga penulis dapat memperbaiki dan menyelesaikan penyusunan skripsi ini dengan lancar.
3. Tim Penguji: Bapak Dr. Syafrizal Sy, Bapak Narwen M.Si, dan Bapak Efendi M.Si, terima kasih atas waktu, saran, dan bantuannya sehingga

penulis mendapatkan tambahan ilmu yang sangat berharga untuk menyempurnakan penulisan skripsi ini.

4. Segenap dosen pengajar pada Program Studi Matematika FMIPA UNAND, yang telah memberikan bekal ilmu kepada penulis selama menjalani studi.
5. Segenap staff dan karyawan di Program Studi Matematika FMIPA UNAND atas semua fasilitas, pelayanan, dan dukungan yang telah diberikan kepada penulis selama kuliah.
6. Sahabat-sahabat seperjuangan matematika angkatan 2006 :Dedi, Riri, Ika, Heru, Arif, Rido, Oce, Uchy putih, Uchy ndut, Tari, Ni riza, Khaindra, mamak qu daben. Terima kasih atas segala bantuan dan doanya.
7. Sahabat-sahabatku: Vinda(cowok), ari mantuik, jero, isan, Qink,Sitti, Vichya yang senantiasa memberi semangat, dorongan, dan doa. Kalian telah menjadi bagian dari kebahagiaanku.
8. Adif Laksana M.Si yang telah banyak memberi bantuan dalam menyusun skripsi ini.
9. Feri Adnadi S.T yang telah banyak memberikan semangat, doa, dan bantuannya.
10. Semua pihak yang telah membantu, baik secara langsung maupun tidak langsung, yang tidak bisa penulis sebutkan satu-persatu.

Tidak lupa untuk kedua orang tua penulis Syofyan dan Nensi Herimulyani serta adik-adik tercinta Nessya Fitriyona, Gemia Orenda, dan Gema Orfian yang telah memberikan semangat, dorongan dan doa kepada penulis dengan penuh kesabaran dan keikhlasannya. Semoga Allah SWT membalas dengan pahala yang sempurna.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan dan penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan dan masih jauh dari sempurna. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun dan dapat menyempurnakan penyusunan skripsi ini di masa mendatang. Akhir kata penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis dan pembaca pada umumnya.

Padang, Januari 2012

Penulis,

Chitra Wahyuana

ABSTRAK

Virus merupakan salah satu organisme yang mengganggu pertumbuhan sel. Akhir-akhir ini penyebaran virus sangat mengganggu kehidupan manusia, diantaranya adalah virus HIV. Tujuan penelitian ini adalah menganalisis kestabilan penyebaran penyakit AIDS. Model yang dibahas adalah *Susceptible Infectious AIDS Recovered* (SIAR) penyakit HIV/AIDS. Pembahasan tersebut meliputi syarat yang diperlukan model agar bersifat tertutup dan terjadinya epidemi. Selain itu juga dibahas analisis kestabilan titik ekuilibrium.

Kata Kunci: model SIAR HIV/AIDS,persamaan diferensial, titik ekuilibrium.

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Sel tumbuh dan berkembang seiring dengan bertambahnya waktu. Pertumbuhan sel merupakan suatu peristiwa biologis untuk mempertahankan kelangsungan hidupnya. Untuk tumbuh dan berkembang serta menjalankan fungsinya, sel dapat mengalami gangguan. Salah satu dari gangguan itu adalah virus. Virus yang wujudnya lebih kecil daripada sel sering merusak dan menghancurkan pertumbuhan sel dari dalam, karena virus hidup dan berkembang di dalam sel.

Berkembang dan ditemukan beberapa jenis virus akhir-akhir ini, sangat mengganggu kehidupan manusia. Penyebaran virus dalam ruang yang luas sangat menakutkan bagi kehidupan manusia. Apalagi penyebaran virus itu melalui interaksi antar manusia. Hal ini disebabkan karena virus dapat mengambil alih fungsi sel dalam waktu relatif cepat, sedang interaksi manusia antar wilayah, negara, dan benua tidak dapat dibatasi.

Serangan virus pada tubuh manusia, tepatnya dalam sel tubuh manusia, sering berakibat fatal sehingga menyebabkan kematian. Karena penyebaran virus sangat cepat maka menyebabkan jumlah kematian massal pada manusia di suatu tempat tertentu dalam jangka waktu tertentu pula. Pada saat ini di beberapa negara, terutama di benua Afrika, lebih dari 35 persen populasi penduduk yang berumur 15 hingga 50 tahun telah terinfeksi kuman *Human Immunodeficiency Virus* (HIV), dan secara global telah menyebabkan kematian hingga 16 juta jiwa manusia. Kematian ini disebabkan oleh virus HIV yang belum ditemukan vaksin dan berkembang menjadi virus *Acquired Immunodeficiency Syndrome* (AIDS).

Penyakit AIDS yang diawali oleh virus HIV disebabkan oleh kontak seksual manusia secara bebas dengan bertukar-tukar pasangan. Awalnya, virus ini muncul dari kalangan homoseksual, dan kemudian menyebar di kalangan manusia penganut seks bebas heteroseksual. Selain itu, virus ini dapat berpindah di antara manusia melalui jarum suntik yang digunakan berulang-ulang, terutama di kalangan pecandu narkoba, transfusi darah, air liur, pendarahan, dan lain sebagainya. Karena belum ada obat yang dapat mengatisipasi penyakit AIDS ini, maka penyebaran penyakit tersebut hanya dapat dikendalikan. Salah satu kendali itu adalah kendali perilaku hidup manusia dalam tatanan pencegahan, bukan pengobatan.

Ada empat karakteristik yang dikaji yang terkait dengan penyebaran penyakit AIDS ini, yakni populasi dengan individu yang rentan (*susceptible*), individu yang terinfeksi (*infection*), individu yang terjangkit AIDS *(Aids*), dan individu yang bebas dari virus HIV (*recovery*). Kemudian, dengan adanya imigran yang masuk konstan ke dalam kelas rentan di mana imigran tersebut terdiri dari individu-individu rentan. Berdasarkan keadaan tersebut, maka akan dibahas kestabilan model epidemi SIAR dengan tingkat laju imigrasi konstan.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, maka perumusan masalah yang akan di bahas adalah bagaimanakah menganalisis model penyebaran penyakit AIDS untuk mencari titik kesetimbangan (ekuilibrium) dari model tersebut.

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian yang dikaji adalah untuk menganalisis model dinamika penyebaran penyakit AIDS di antara populasi manusia dan mencari titik kesetimbangan (ekuilibrium) dari model tersebut.

1.4 Batasan Masalah

Agar masalah lebih fokus untuk dibahas dan dianalisis maka masalah model penyebaran penyakit AIDS dibatasi pada mencari titik ekuilibrium dari model yang diperoleh.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan skripsi ini, disusun dengan sistematika berikut ini :

BAB I Pendahuluan. Berisikan uraian tentang latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori. Berisikan tentang teori-teori yang digunakan dalam menganalisis model SIAR, yakni tentang matriks, sistem persamaan diferensial dan kestabilan sistem non linier.

BAB III	Analisis kestabilan model penyebaran penyakit AIDS. Bab ini menganalisis model penyebaran penyakit melalui hubungan seksual AIDS, terutama kestabilan asimtotiknya.
BAB IV	Kesimpulan. Kesimpulan diambil berdasarkan hasil analisis yang telah di bahas dalam bab-bab sebelumnya.

BAB II

LANDASAN TEORI

Berikut disajikan beberapa definisi dan fakta-fakta yang diperlukan untuk mendukung danmenganalisis model SIAR, di antaranya matriks, sistem persamaan diferensial dan kestabilan non-linier.

2.1 Matriks

Definisi 2.1.1 [1] *Diberikan suatu matriks A berukuran $n \times n$. Skalar λ disebut nilai eigen dari A jika terdapat vektor tak nol $\mathbf{x}$ di dalam $\Re^n$ sehingga berlaku*

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Selanjutnya vektor $\mathbf{x}$ disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Teorema 2.1.2 [1] *Jika A matriks berukuran $n \times n$, I_n matriks identitas berukuran $n \times n$ dan λ suatu bilangan real, maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen :*

(i) *λ adalah suatu nilai eigen dari A.*

(ii) *Sistem persamaan $(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = 0$ mempunyai penyelesaian tak trivial.*

(iii) *Ada suatu vektor tak nol $\mathbf{x}$ pada $\Re^n$ sedemikian sehingga $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.*

(iv) *λ merupakan suatu penyelesaian dari persamaan karakteristik $\det(A - \lambda I_n) = 0$.*

2.2 Sistem Persamaan Diferensial

Berikut disajikan beberapa materi dasar teori sistem persamaan diferensial, yaitu mengenai sistem non linier, pengertian matriks Jacobian. Suatu sistem persamaan diferensial biasa non linier adalah suatu persamaan yang berbentuk

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}(\mathrm{x}(t)) \text{ , } \mathbf{x}(t_0) \text{ , } t_0 \in \Re \tag{2.2.1}$$

Dengan $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)^T \in \Re^n$ $\mathbf{f}(\mathrm{x})=(f_1(x),f_2(x),...,f_n(x))^T$ dan syarat awal $\mathbf{x}(t_0)=(x_{10},x_{20},...,x_{n0})^T$.

Secara umum, kestabilan sistem (2.2.1) dapat dimaknai sebagai solusi $x(t)$ dari sistem (2.2.1) yang pada mulanya cukup dekat dari suatu titik tertentu, maka $x(t)$ akan lebih dekat lagi dari titik tersebut dengan berlalunya waktu.

Definisi 2.2.2[5]

Misalkan $f:\Re^n \to \Re^n$ *adalah fungsi yang diferensiabel secara kontinu pada himpunan* $D \subset \Re^n$ *dan* $\hat{x} \in \Re^n$. ***Matriks Jacobian*** *dari f di* $\hat{x}$ *, ditulis* $J_{f(\hat{x})}$ *dan didefinisikan sebagai*

$$J_{f(\hat{x})}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

2.3 Kestabilan Sistem Non Linier

Berikut disajikan beberapa definisi dan teorema yang berkaitan dengan kestabilan sistem nonlinier, diantaranya : titik ekuilibrium, stabil asimtotik, serta teorema penting tentang kestabilan dan Kriteria Routh-Hurtwiz.

Definisi 2.3.1 [2]

Titik $x_0 \in \Re$ *dikatakan* ***titik ekuilibrium*** *sistem* (2.2.1) *jika* $f(x_0)=0$.

Definisi 2.3.2 [8]

Suatu titik $\mathbf{x}_0 \in \Re^n$ *dikatakan titik ekuilibrium persamaan diferensial orde satu* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(x)$ *jika*

$$\mathbf{f}(\mathrm{x}_0) = 0 .$$

Khusus untuk sistem persamaan diferensial linier orde satu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) \qquad (2.3.1)$$

maka (0,0) adalah *titik tetapnya. Jika* det(A) $\neq 0$, *maka titik tetap* (2.3.1) *hanyalah* (0,0).

Definisi 2.3.3 [8]

Suatu titik tetap $\mathbf{x}_0$ *dari sistem* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(x)$ *dikatakan stabil asimtotik jika untuk setiap keadaan awal berlaku*

$$\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}_0 \text{ bila } t \to \infty .$$

Sistem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(x)$ *dikatakan stabil asimtotik jika titik tetapnya stabil asimtotik.*

Teorema 2.3.4 [6]

Misalkan $\mathbf{x}_0 \in \Re^n$ *adalah titik ekuilibrium dari persamaan diferensial non linier*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathrm{x}(t)) \qquad (2.3.2)$$

dan semua turunan parsial dari f *adalah kontinu, jika semua bagian riil dari matriks* Jacobian $J_f(\mathbf{x}_0)$ *untuk sistem* (2.3.2) *adalah negatif, maka sistem* (2.3.1) *adalah stabil asimtotik.*

Teorema 2.3.5 [4]

(Teorema Kestabilan) *Jika semua nilai eigen dari matriks Jacobian* $J_{f(\hat{x})}$ *mempunyai bagian real negatif, maka titik ekuilibrium* $\hat{x}$ *dari Sistem* (1) *stabil asimtotik, dan jika terdapat nilai eigen dari matriks Jacobian* $J_{f(\hat{x})}$ *mempunyai bagian real positif, maka titik ekuilibrium* $\hat{x}$ *dari Sistem* (2.3.1) *tidak stabil.*

Teorema 2.3.6 [7] (Kriteria Routh-Hurwitz) *Diberikan polinomial derajat* n ,

$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n$ *dengan koefisien bilangan real* $a_1 > 0$, $i = 1,2,...,n$.

Jika $D_1 = |a_1| > 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0$, $D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, ...,$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix} > 0$$

maka semua bagian real dari akar-akar polinomial $P(\lambda)$ *bernilai negatif*.

Definisi 2.3.4 [3]

Populasi tidak tertutup artinya banyaknya populasi tergantung pada t.

Definisi 2.3.5 [3]

Epidemi adalah suatu kondisi yang terjadi jika individu kelas terinfeksi selalu terjadi kenaikan dari sebelumnya.

Definisi 2.3.6 [3]

Populasi adalah jumlah individu di suatu wilayah tertentu.

BAB III

ANALISIS KESTABILAN MODEL *SIAR* PENYEBARAN PENYAKIT AIDS

Virus *Human Immunodeficiency Virus* (HIV) berperan penting dalam penyebaran penyakit *Acquired Immunodeficiency Syndrome* (AIDS). Seorang pasien dikatakan **positif HIV** (*HIV positive*) jika terdeteksi antibodi terhadap HIV di dalam tubuh pasien yang terinfeksi. Bahaya penyakit AIDS dan tingkat penyebarannya sangat mengkhawatirkan. Diramalkan wabah penyakit ini akan menjadi kekacauan paling serius dalam dunia epidemi abad ini.

Setelah antibodi terhadap virus HIV terdeteksi pada manusia, ada masa laten, yaitu masa ketika pasien belum menunjukkan tanda-tanda serius menderita penyakit AIDS. Lamanya masa laten ini pada kasus tiap individu tidak dapat diketahui secara pasti. Dari kasus-kasus yang sudah ada, lamanya masa laten mencapai bulanan hingga tahunan.

Di dalam Murray, pada tahun 1986 Anderson dkk. membuat sebuah model SIAR penyakit HIV/AIDS. Misalkan banyaknya populasi pada saat t adalah $N(t)$. $S(t)$, $I(t)$, $A(t)$, dan $R(t)$ berturut-turut menyatakan banyaknya individu yang rentan, terinfeksi, terjangkit AIDS, dan sembuh dari infeksi HIV pada saat t. Individu dikatakan sembuh dari infeksi HIV berarti pada tubuh individu terdapat antibodi yang mampu melawan virus HIV sehingga individu tersebut tidak masuk dalam kelas terjangkit AIDS. Populasi sebuah model dikatakan tutup jika banyaknya populasi keseluruhan pada setiap t konstan dan epidemik terjadi jika banyaknya kelas individu terinfeksi selalu terjadi kenaikan dari sebelumnya.

Misalkan parameter konstan B menyatakan laju imigrasi/pertambahan konstan ke dalam populasi individu rentan. Parameter μ menyatakan laju kematian alami, yaitu kematian yang disebabkan bukan karena penyakit AIDS yang sedang dibicarakan. Parameter d menyatakan laju kematian individu yang disebabkan penyakit AIDS. Parameter λ menyatakan probabilitas infeksi dari pengambilan kasus secara acak, yaitu $\lambda = \frac{\beta I}{N}$, dengan β adalah probabilitas penularan. Kemudian *konstanta c menyatakan rata-rata banyaknya hubungan seksual yang terjadi pertahun* dan p menyatakan proporsi dari individu terinfeksi HIV yang selanjutnya sembuh dari HIV. Parameter v menyatakan laju perpindahan individu dari kelas terinfeksi HIV menuju kelas terjangkit AIDS, sedangkan $\frac{1}{v}$ menyatakan rata-rata waktu inkubasi dari penyakit. Secara ringkas, model SIAR penyakit HIV/AIDS disajikan dalam diagram transfer pada Gambar 3.1 berikut:

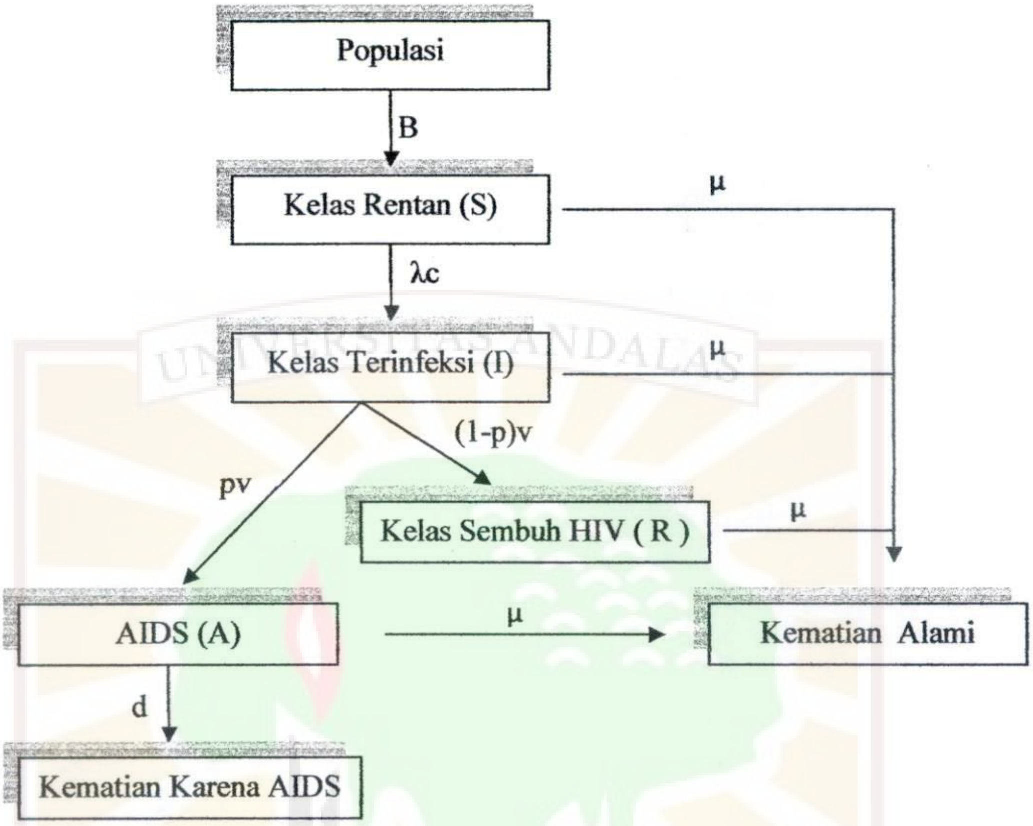

Diagram Model SIAR

Gambar 3.1

Berdasarkan diagram transfer pada gambar di atas dan asumsi-asumsi digunakan maka diperoleh model SIAR dalam bentuk persamaan diferensial berikut [8] :

$$\frac{dS}{dt} = B - \mu S - \lambda c S \;\; dengan \quad \lambda = \frac{\beta I}{N}$$

$$\frac{dI}{dt} = \lambda c S - (v + \mu)I$$

$$\frac{dA}{dt} = pvI - (d + \mu)A$$

$$\frac{dR}{dt} = (1-p)vI - \mu R \quad (3.1)$$

dan $N(t) = S(t) + I(t) + A(t) + R(t)$ (3.2)

Lemma 3.1 Jika $\mathbf{B} \neq \mu N + dA$, maka populasi model SIAR (3.1) tidak tutup.

Bukti:

Perhatikan bahwa populasi tidak tertutup artinya banyaknya populasi tergantung pada t. Berarti untuk menunjukkan populasi tidak tertutup tinggal ditunjukkan $\frac{dN}{dt} \neq 0$.

Dari persamaan (3.1) diperoleh :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d(S+I+A+R)}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dA}{dt} + \frac{dR}{dt}$$

$$= B - \mu S - \lambda cS + \lambda cS - (v+\mu)I + pvd - (d+\mu)A + (1-p)vI - \mu R$$

$$= B - \mu S - \mu I - (d+\mu)A - \mu R$$

$$= B - \mu N - dA$$

Jadi, didapat, $\frac{dN}{dt} = B - \mu N - dA$. (3.3)

Karena diketahui $\mathbf{B} \neq \mu N + dA$ maka $\frac{dN}{dt} \neq 0$. ■

Teorema 3.2 Jika $\frac{\beta c}{v} > 1$, $S \approx N$ dan $v > \mu$ maka terjadi epidemi.

Bukti :

Perhatikan nilai $\frac{dI}{dt}$ sebagai berikut

$$\frac{dI}{dt} = \lambda cS - (v+\mu)I = \frac{\beta IcS}{N} - (v+\mu)I\,.$$

Kemudian diketahui $S \approx N$, maka di dapat

$$\frac{dI}{dt} \approx \frac{\beta IcS}{S} - (v+\mu)I = (\beta c - v - \mu)I$$

Karena rata-rata waktu inkubasi penyakit (*1/v*) jauh lebih kecil dari pada rata-rata harapan hidup (*1/μ*) atau *v* jauh lebih besar dari μ, maka

$$\frac{dI}{dt} \approx (\beta c - v - \mu)I$$

$$\approx (\beta c - v)I$$

$$\approx v\left(\frac{\beta c}{v} - 1\right)I\,. \qquad (3.4)$$

Selanjutnya, jika $\frac{\beta c}{v}$>1 maka persamaan (3.4) akan bernilai positif, ini berarti $\frac{dI}{dt}$>0, atau terjadi epidemi. ∎

Lemma 3.3 Jika $B > \mu N^*$ dan $0 < p < 1$, maka Sistem persamaan (3.1) mempunyai dua titik ekuilibrium, yaitu : $(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R}) = \left(\frac{B}{\mu},0,0,0\right)$ dan $(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R}) = (S^*,I^*,A^*,R^*)$ dengan

$$S^* = \frac{(v+\mu)N^*}{c\beta},$$
$$I^* = \frac{(d+\mu)(B-\mu N^*)}{pvd},$$
$$A^* = \frac{B-\mu N^*}{d},$$
$$R^* = \frac{(1-p)(d+\mu)(B-\mu N^*)}{pd\mu}$$

dengan $N^* = \frac{B\beta c(pvd+(v+\mu)(d+\mu))}{\mu(v+\mu)(pvd+\beta c(d+\mu))}$.

Bukti :

Perhatikan bahwa syarat $B > \mu N^*$ dan $0 < p < 1$ diperlukan untuk eksistensi titik ekuilibrium yang bernilai positif. Ekuilibrium terjadi pada saat

$$\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dA}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0, dan \ \frac{dN}{dt} = 0$$

Karena $\frac{dS}{dt} = 0$ maka :

$$B - \mu S - \lambda c S = 0$$

Dengan mensubtitusikan $\lambda = \frac{\beta I}{N}$ kedalam persamaan (3.1), diperoleh :

$$B - \left(\mu - \frac{\beta c I}{N}\right)S = 0 \tag{3.5}$$

Selanjutnya, karena $\frac{dI}{dt} = 0$ maka

$$\lambda c S - (v+\mu)I = 0$$

$$\frac{\beta I}{N} c S - (v+\mu)I = 0$$

$$\left(\beta c I \frac{S}{N} - (v+\mu)\right) I = 0$$

$$S = \frac{(v+\mu)N}{\beta c} \text{ atau I =0.} \qquad (3.6)$$

Karena $\frac{dA}{dt} = 0$ maka

$$pvI - (d+\mu)A = 0$$

$$A = \frac{pv}{d+\mu} I \qquad (3.7)$$

Karena $\frac{dR}{dt} = 0$ maka

$$(1-p)vI - \mu R = 0$$

$$R = \frac{(1-p)v}{\mu} I \qquad (3.8)$$

Dengan menggunakan syarat $\frac{dN}{dt} = 0$ diperoleh

$$B - \mu N - dA = 0$$

$$A = \frac{B - \mu N}{d} \qquad (3.9)$$

Perhatikan bahwa dari persamaan (3.6), di dapat dua kemungkinan titik ekuilibrium, yaitu :

(i) Jika I = 0 maka dari persamaan (3.5), (3.7) dan (3.8) diperoleh :

$S = \frac{B}{\mu}$, A = 0 dan R = 0

Jadi titik ekuilibrium dari sistem (3.1) adalah $\left(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R}\right)=\left(\dfrac{B}{\mu},0,0,0\right)$.

(ii) Selanjutnya jika $S=\dfrac{(v+\mu)N}{\beta c}$ maka persamaan (3.9) diperoleh $A=\dfrac{B-\mu N}{d}$.

Dengan mensubtitusikan $S=\dfrac{(v+\mu)N}{\beta c}$ ke dalam persamaan (3.5) maka diperoleh

:

$$B-\left(\mu-\frac{\beta cI}{N}\right)\frac{(v+\mu)N}{\beta c}=0$$

yang memberikan, $I=\dfrac{\mu N}{\beta c}-\dfrac{B}{v+\mu}$.

Kemudian dari persamaan (3.7) dan (3.9) diperoleh :

$$\frac{B-\mu N}{d}=\frac{pv}{d+\mu}I$$

atau dapat ditulis :

$$I=\frac{(d+\mu)(B-\mu N)}{pvd}.$$

Akibatnya,

$$\frac{\mu N}{\beta c}-\frac{B}{v+\mu}=\frac{(d+\mu)(B-\mu N)}{pvd} \qquad (3.10)$$

Persamaan (3.10) ekivalen dengan :

$$\frac{\mu N(v+\mu)-B\beta cI}{\beta c(v+\mu)}=\frac{(d+\mu)(B-\mu N)}{pvd}$$

$$pvd(\mu N(v+\mu)-B\beta c)=\beta c(v+\mu)(d+\mu)(B+\mu N)$$

$$pvd\mu(v+\mu)N+\beta c\mu(v+\mu)(d+\mu)N=B\beta cpvd+B\beta c(v+\mu)(d+\mu)$$

$$\mu(v+\mu)(pvd+\beta c(d+\mu))N = B\beta c(pvd+(v+\mu)(d+\mu))$$

$$N = \frac{B\beta c(pvd+(v+\mu)(d+\mu))}{\mu(v+\mu)(pvd+\beta c(d+\mu))} \tag{3.11}$$

Dengan mensubstitusikan $I = \dfrac{(d+\mu)(B-\mu N)}{pvd}$ ke dalam persamaan (3.8) maka diperoleh:

$$R = \frac{(1-p)v}{\mu}\cdot\frac{(d+\mu)(B-\mu N)}{pvd} = \frac{(1-p)(d+\mu)(B-\mu N)}{pd\mu}$$

Jadi, titik $(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R}) = (S^*,I^*,A^*,R^*)$ dengan

$$S^* = \frac{(v+\mu)N^*}{c\beta},\ I^* = \frac{(d+\mu)(B-\mu N^*)}{pvd},\ A^* = \frac{B-\mu N^*}{d},\ R^* = \frac{(1-p)(d+\mu)(B-\mu N^*)}{pd\mu}$$

merupakan titik ekuilibrium dari sistem (3.1) ■

Misalkan : $f_1(S,I,A,R) = B-\mu S-\lambda cS = B-\mu S-\dfrac{\beta cSI}{N}$

$$f_2(S,I,A,R) = \frac{\beta cSI}{N}-(v+\mu)I$$

$$f_3(S,I,A,R) = pvI-(d+\mu)A$$

$$f_4(S,I,A,R) = (1-p)vI-\mu R$$

Maka matriks Jacobian dari sistem persamaan (3.1) di titik $(S,I,A,R) = (\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R})$ adalah

$$J_{f(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R})}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R})}{\partial S} & \frac{\partial f_1(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R})}{\partial I} & \frac{\partial f_1(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R})}{\partial A} & \frac{\partial f_1(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R})}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R})}{\partial S} & \frac{\partial f_2(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R})}{\partial I} & \frac{\partial f_2(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R})}{\partial A} & \frac{\partial f_2(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R})}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R})}{\partial S} & \frac{\partial f_3(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R})}{\partial I} & \frac{\partial f_3(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R})}{\partial A} & \frac{\partial f_3(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R})}{\partial R} \\ \frac{\partial f_4(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R})}{\partial S} & \frac{\partial f_4(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R})}{\partial I} & \frac{\partial f_4(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R})}{\partial A} & \frac{\partial f_4(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R})}{\partial R} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -\left(\mu+\frac{\beta cI(N^*-S^*)}{(N^*)^2}\right) & \frac{\beta cS(N^*-I^*)}{(N^*)^2} & \frac{\beta cS^*I^*}{(N^*)^2} & \frac{\beta cS^*I^*}{(N^*)^2} \\ \frac{\beta cI^*(N^*-S^*)}{(N^*)^2} & \frac{\beta cS^*(N^*-I^*)}{(N^*)^2}-(v+\mu) & \frac{\beta cS^*I^*}{(N^*)^2} & \frac{\beta cS^*I^*}{(N^*)^2} \\ 0 & pv & -(d+\mu) & 0 \\ 0 & (1-p)v & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

(3.12)

Teorema 3.5 *Jika* $v+\mu>\beta c$, *maka titik ekuilibrium* $(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R})=\left(\frac{B}{\mu},0,0,0\right)$ *adalah stabil asimtotik.*

Bukti :

Perhatikan saat $(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R})=\left(\frac{B}{\mu},0,0,0\right)$, matriks Jacobian pada persamaan (3.12) menjadi :

$$J_{f(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R})}=\begin{pmatrix} -\mu & -\beta c & 0 & 0 \\ 0 & \beta c-(v+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & pv & -(d+\mu) & 0 \\ 0 & (1-p)v & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristiknya adalah :

$$\det\left(J_{f(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R})}-\lambda I_{4\times a}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\mu-\lambda & -\beta c & 0 & 0 \\ 0 & \beta c-(v+\mu)-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & pv & -(d+\mu)-\lambda & 0 \\ 0 & (1-p)v & 0 & -\mu-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-\mu-\lambda)\begin{vmatrix} \beta c-(v+\mu)-\lambda & 0 & 0 \\ pv & -(d+\mu)-\lambda & 0 \\ (1-p) & 0 & -\mu-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-\mu-\lambda)(\beta c-(v+\mu)-\lambda)(-(d+\mu)-\lambda)(-\mu-\lambda)=0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu,\ \lambda_3 = \beta c-(v+\mu),\ \lambda_4 = -(d+\mu)$$

Jelas bahwa nilai eigen λ_1, λ_3 dan λ_4 bernilai negatif, sebab parameter-parameter μ dan d bernilai positif. Kemudian karena diketahui $v+\mu > \beta c$, maka nilai eigen λ_3 bernilai negatif. Karena semua nilai eigen dari matriks Jacobi $J_{f(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R})}$ adalah negatif, maka titik ekuilibrium $(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R}) = \left(\frac{B}{\mu},0,0,0\right)$ stabil asimtotik. ■

Teorema 3.6

Jika $B > \mu N^*$ *dan* $0<p<1$*, maka titik ekuilibrium* $(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R}) = (S^*,I^*,A^*,R^*)$ *adalah stabil asimtotik.*

Bukti :

Perhatikan saat $(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R}) = (S^*,I^*,A^*,R^*)$, matriks Jacobian pada Persamaan (3.12) menjadi :

$$J_{f(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R})} = \begin{pmatrix} -\left(\mu + \frac{\beta c I(N^* - S^*)}{(N^*)^2}\right) & \frac{\beta c S(N^* - I^*)}{(N^*)^2} & \frac{\beta c S^* I^*}{(N^*)^2} & \frac{\beta c S^* I^*}{(N^*)^2} \\ \frac{\beta c I^*(N^* - S^*)}{(N^*)^2} & \frac{\beta c S^*(N^* - I^*)}{(N^*)^2} - (v + \mu) & \frac{\beta c S^* I^*}{(N^*)^2} & \frac{\beta c S^* I^*}{(N^*)^2} \\ 0 & pv & -(d + \mu) & 0 \\ 0 & (1-p)v & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristiknya adalah :

$$\det\left(J_{f(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R})} - \lambda I_{4\times a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\left(\mu + \frac{\beta c I(N^* - S^*)}{(N^*)^2}\right) & \frac{\beta c S(N^* - I^*)}{(N^*)^2} & \frac{\beta c S^* I^*}{(N^*)^2} & \frac{\beta c S^* I^*}{(N^*)^2} \\ \frac{\beta c I^*(N^* - S^*)}{(N^*)^2} & \frac{\beta c S^*(N^* - I^*)}{(N^*)^2} - (v + \mu) & \frac{\beta c S^* I^*}{(N^*)^2} & \frac{\beta c S^* I^*}{(N^*)^2} \\ 0 & pv & -(d + \mu) - \lambda & 0 \\ 0 & (1-p)v & 0 & -\mu - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\left(\mu + \frac{\beta c I(N^* - S^*)}{(N^*)^2}\right) & -\frac{\beta c S(N^* - I^*)}{(N^*)^2} & \frac{\beta c S^* I^*}{(N^*)^2} & \frac{\beta c S^* I^*}{(N^*)^2} \\ -\mu - \lambda & -(v + \mu) - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & pv & -(d + \mu) - \lambda & 0 \\ 0 & (1-p)v & 0 & -\mu - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau dapat ditulis menjadi

$$\begin{vmatrix} \overline{A} - \lambda & \overline{B} & \overline{C} & \overline{C} \\ \overline{D} - \lambda & \overline{E} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \overline{F} & \overline{G} - \lambda & 0 \\ 0 & \overline{H} & 0 & \overline{D} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.13)$$

dengan

$\overline{A}=-\mu-\dfrac{\beta c I^*\left(N^*-S^*\right)}{\left(N^*\right)^2}$, $\quad\overline{B}=-\dfrac{\beta c S^* I^*\left(N^*-I^*\right)}{\left(N^*\right)^2}$, $\quad\overline{C}=\dfrac{\beta c S^* I^*}{\left(N^*\right)^2}$, $\quad\overline{D}=-\mu$,

$\overline{E}=-(v+\mu)$, $\overline{F}=pv$, $\overline{G}=-(d+\mu)$ dan $\overline{H}=(1-p)v$.

Persamaan (3.13) ekuivalen dengan :

$$\left(\overline{A}-\lambda\right)\left(\overline{E}-\lambda\right)\left(\overline{G}-\lambda\right)\left(\overline{D}-\lambda\right)-\left(\overline{D}-\lambda\right)\begin{vmatrix}\overline{B} & \overline{C} & \overline{C}\\ \overline{F} & \overline{G}-\lambda & 0\\ \overline{H} & 0 & \overline{D}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\left(\overline{D}-\lambda\right)\left\{\overline{B}\left(\overline{G}-\lambda\right)\left(\overline{D}-\lambda\right)-\overline{C}\overline{F}\left(\overline{D}-\lambda\right)-\overline{C}\overline{H}\left(\overline{G}-\lambda\right)\right\}=0$$

$$\lambda=\overline{D}\ \text{atau}\ \overline{B}\left(\overline{G}-\lambda\right)\left(\overline{D}-\lambda\right)-\overline{C}\overline{F}\left(\overline{D}-\lambda\right)-\overline{C}\overline{H}\left(\overline{G}-\lambda\right)=0$$

Untuk kasus $\lambda=\overline{D}=-\mu$, diperoleh bagian real nilai eigen bernilai negatif, sedangkan untuk kasus $\overline{B}\left(\overline{G}-\lambda\right)\left(\overline{D}-\lambda\right)-\overline{C}\overline{F}\left(\overline{D}-\lambda\right)-\overline{C}\overline{H}\left(\overline{G}-\lambda\right)=0$ diperoleh :

$$\left(\overline{G}-\lambda\right)\left\{\overline{E}\overline{A}-\left(\overline{E}+\overline{A}\right)\lambda+\lambda^2-\overline{B}\overline{D}+\overline{B}\lambda+\overline{C}\overline{H}\right\}+\overline{C}\overline{F}\overline{D}-\overline{C}\overline{F}\lambda=0$$

$$\left(\lambda-\overline{G}\right)\left\{\lambda^2+\left(\overline{B}-\overline{E}-\overline{A}\right)\lambda+\overline{C}\overline{H}+\overline{E}\overline{A}-\overline{B}\overline{D}\right\}+\overline{C}\overline{F}\overline{D}-\overline{C}\overline{F}\lambda=0. \quad (14)$$

Jelas Koefisien $\lambda^3=1>0$. Koefisien dari λ^2 yaitu :

$$-\overline{G}+\overline{B}-\overline{E}-\overline{A}=d+\mu-\frac{\beta c S^*\left(N^*-I^*\right)}{\left(N^*\right)^2}+v+\mu+\frac{\beta c I^*\left(N^*-S^*\right)}{\left(N^*\right)^2}$$

$$=v+d+3\mu+\frac{\beta c\left(I^*N^*-I^*S^*-S^*N^*+I^*S^*\right)}{\left(N^*\right)^2}$$

$$=v+d+3\mu+\frac{\beta c N^*(I^*-S^*)}{\left(N^*\right)^2}$$

$$= v + d + 3\mu + \frac{\beta c I^*}{N^*} - (v + \mu)$$

$$= d + 2\mu + \frac{\beta c I^*}{N^*} > 0$$

Koefisien dari λ^1 yaitu :

$$\overline{C} \cdot \overline{H} + \overline{E} \cdot \overline{A} - \overline{B} \cdot \overline{D} - \overline{G} \cdot \overline{B} + \overline{G} \cdot \overline{E} + \overline{G} \cdot \overline{A} + \overline{C} \cdot \overline{F} = \overline{C}(\overline{F} + \overline{H}) + \overline{A}(\overline{E} + \overline{G}) + \overline{G}(\overline{E} - \overline{B}) - \overline{B} \cdot \overline{D}$$

$$= \frac{\beta c S^* I^*}{(N^*)^2}(pv + (1-p)v) + \left(-\mu - \frac{\beta c I^*(N^* - S^*)}{(N^*)^2}\right)(-v - \mu - d - \mu)$$

$$+ (-d - \mu)\left(-v - \mu + \frac{\beta c S^*(N^* - I^*)}{(N^*)^2}\right) + \frac{\beta c S^*(N^* - I^*)}{(N^*)^2}(-\mu)$$

$$= \frac{\beta c S^* I^*}{(N^*)^2} v + \left(\mu + \frac{\beta c I^*(N^* - S^*)}{(N^*)^2}\right)(v + d + 2\mu) + (d + \mu)(v + \mu) - (d + 2\mu)\frac{\beta c S^*(N^* - I^*)}{(N^*)^2}$$

Perhatikan bahwa :

$$\frac{\beta c I^*(N^* - S^*)}{(N^*)^2} - \frac{\beta c S^*(N^* - I^*)}{(N^*)^2} = \frac{\beta c(I^* N^* - I^* S^* - S^* N^* + S^* I^*)}{(N^*)^2}$$

$$= \frac{\beta c N^*(I^* - S^*)}{(N^*)^2}$$

$$= \frac{\beta c I^*}{N^*} - \frac{\beta c}{N^*} \cdot \frac{(v + \mu)N^*}{c\beta}$$

$$= \frac{\beta c I^*}{N^*} - (v + \mu). \qquad (3.15)$$

Dengan menggunakan persamaan (3.15) didapat koefisien λ^1 ekuivalen dengan :

$$\frac{\beta cS^*I^*}{(N^*)^2}v+\mu(v+d+2\mu)+\frac{\beta cI^*(N^*-S^*)}{(N^*)^2}v+(d+\mu)(v+\mu)+(d+2\mu)\left(\frac{\beta cI^*}{N^*}-(v+\mu)\right)$$

$$=\frac{\beta cI^*(S^*+N^*-S^*)}{(N^*)^2}v+\mu(v+d+2\mu)+(d+2\mu)\frac{\beta cI^*}{N^*}-\mu(v+\mu)$$

$$=\frac{\beta cI^*}{N^*}v+(d+2\mu)\frac{\beta cI^*}{N^*}+\mu(d+\mu)$$

$$=\frac{\beta cI^*}{N^*}(v+d+2\mu)+\mu(d+\mu)>0$$

Koefisien dari λ^0 yaitu

$$-\overline{G}(\overline{CH}+\overline{EA}-\overline{BD})-\overline{CFD}$$

$$=(d+\mu)\left\{\frac{\beta cS^*I^*}{(N^*)^2}(1-p)v+(v+\mu)\left(\mu+\frac{\beta cI^*(N^*-S)}{(N^*)^2}\right)-\frac{\beta cI^*(N^*-S^*)}{(N^*)^2}\mu\right\}+\frac{\beta cS^*I^*}{(N^*)^2}pvd \tag{3.16}$$

Selanjutnya dari persamaan (3.16) didapat koefisien dari λ^0 ekuivalen dengan :

$$=(d+\mu)\left\{\frac{\beta cS^*I^*}{(N^*)^2}(1-p)v+(v+\mu)\left(\mu+\frac{\beta cI^*(N^*-S)}{(N^*)^2}\right)-\frac{\beta cI^*(N^*-S^*)}{(N^*)^2}\mu\right\}+\frac{\beta cS^*I^*}{(N^*)^2}pvd$$

$$=(d+\mu)\left\{\frac{\beta cS^*I^*}{(N^*)^2}(1-p)v+\frac{\beta cI^*(N^*-S^*)}{(N^*)^2}v+\mu\frac{\beta cI^*}{N^*}\right\}+\frac{\beta cS^*I^*}{(N^*)^2}pv\mu\ .$$

$$=\frac{(d+\mu)\beta cI^*}{N^*}\left\{\frac{S^*}{N^*}(1-p)v+\frac{(N^*-S^*)}{N^*}v+\mu\right\}+\frac{\beta cS^*I^*}{(N^*)^2}pv\mu$$

$$=\frac{(d+\mu)\beta cI^*}{N^*}\left\{\frac{S^*}{N^*}(1-p-1)v+v+\mu\right\}+\frac{\beta cS^*I^*}{(N^*)^2}pv\mu$$

$$=\frac{(d+\mu)\beta cI^*}{N^*}\left\{\frac{S^*pv}{N^*}+v+\mu\right\}+\frac{\beta cS^*I^*}{(N^*)^2}pv\mu$$

$$=\frac{(v+\mu)(d+\mu)\beta cI^*}{N^*}+\frac{(d+\mu)\beta cS^*I^*}{(N^*)^2}pv+\frac{\beta cS^*I^*}{(N^*)^2}pv\mu$$

$$=\frac{(v+\mu)(d+\mu)\beta cI^*}{N^*}+\frac{pv(d+2\mu)\beta cS^*I^*}{(N^*)^2}>0\,.$$

Berarti didapat semua koefisien dari polinomial pada persamaan (3.16) bernilai positif. Selanjutnya ditunjukan bahwa $Koef(\lambda^2)\cdot Koef(\lambda^1)-Koef(\lambda^0)>0.$

Oleh karena :

$$Koef(\lambda^2)\cdot Koef(\lambda^1)=\left(d+2\mu+\frac{\beta cI^*}{N^*}\right)\left(\frac{\beta cI^*}{N^*}(v+d+2\mu)+\mu(d+\mu)\right)$$

$$=\frac{(d+2\mu)(v+d+2\mu)\beta cI^*}{N^*}+\frac{\mu(d+\mu)\beta cI^*}{N^*}+\left(\frac{\beta cI^*}{N^*}\right)^2(v+d+2\mu)+(d+2\mu)\mu(d+\mu)$$

$$>\frac{(d+2\mu)(v+d+2\mu)\beta cI^*}{N^*}$$

$$=\frac{((d+2\mu)(v+\mu)+(d+2\mu)(v+\mu))\beta cI^*}{N^*}$$

$$> \frac{(d+\mu)(v+\mu)\beta c I^*}{N^*} + \frac{(d+2\mu)v\beta c N^* I^*}{(N^*)^2}$$

$$> \frac{(v+\mu)(d+\mu)\beta c I^*}{N^*} + \frac{pv(d+2\mu)\beta c S^* I^*}{(N^*)^2}, \text{ sebab } 0 < p < 1 \text{ dan } N^* > S^*$$

$$= \text{koef}(\lambda^0),$$

maka berakibat $Koef(\lambda^2)\cdot Koef(\lambda^1) - Koef(\lambda^0) > 0$.

Jadi berdasarkan Teorema 2.3.6 [7] (Kriteria Routh-Hurwitz) berakibat titik ekuilibrium $(\hat{S},\hat{I},\hat{A},\hat{R}) = (S^*, I^*, A^*, R^*)$ stabil asimtotik. ∎

BAB IV

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan bahwa :

1. Jika laju perpindahan kelas individu terinfeksi HIV menuju AIDS yang dipengaruhi oleh laju kematian alami lebih besar dari probabilitas infeksi maka model SIAR akan stabil asimtotik.
2. Jika laju imigrasi konstan lebih besar daripada laju kematian alami dan $0 < p < 1$, maka sistem persamaan dari :

   laju perubahan kelas terangkit terhadap waktu adalah $\frac{dS}{dt} = B - \mu S - \lambda c S$,

   laju perubahan kelas terinfeksi terhadap waktu adalah $\frac{dI}{dt} = \lambda c S - (v + \mu)I$,

   laju perubahan kelas AIDS terhadap waktu adalah $\frac{dA}{dt} = pvI - (d + \mu)A$, dan

   laju perubahan kelas yang sembuh dari HIV adalah $\frac{dR}{dt} = (1 - p)vI - \mu R$,

   mempunyai dua titik ekuilibrium, yaitu : $\left(\hat{S}, \hat{I}, \hat{A}, \hat{R}\right) = \left(\frac{B}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ dan $\left(\hat{S}, \hat{I}, \hat{A}, \hat{R}\right) = (S^*, I^*, A^*, R^*)$ dengan

$$S^* = \frac{(v + \mu)N^*}{c\beta}$$

$$I^* = \frac{(d + \mu)(B - \mu N^*)}{pvd}$$

$$A^* = \frac{B - \mu N^*}{d}$$

$$R^* = \frac{(1 - p)(d + \mu)(B - \mu N^*)}{pd\mu}$$

dengan $N = \dfrac{B\beta c(pvd + (v+\mu)(d+\mu))}{\mu(v+\mu)(pvd + \beta c(d+\mu))}$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H., 2000, *Dasar-Dasar Aljabar Linear*, edisi ketujuh, (diterjemahkan oleh: Suminto, H.), Interaksara, Batam.

[2] Bender, E.A., 1978, *An Introduction to Mathematical Modeling*, John Wiley andSons, Inc., USA.

[3] Brauer, F. dan Castillo-Chavez, C., 2001, *Mathematical Models in PopulationBiology ang Epidemiology*, Springer-Verlag, Inc., New York.

[4] Budhi, W.S., 2000, Kalkulus Peubah Banyak dan Penggunaannya, ITB, Bandung.

[5] Finizio, N. dan Ladas, G., 1988, *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*, edisi kedua, (diterjemahkan oleh: Santoso, W.), Erlangga, Jakarta.

[6] Huntley, I. dan Johnson, R.M., 1983, *Linear and Nonlinear DifferentialEquations*, John Wiley and Sons, Inc., Chichester.

[7] Murray, J.D., 1993, *Mathematical Biology*, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin. Ross, S.L., 1984, Differential Equations, John Wiley and Sons,Inc., Singapore.

[8] Boyce, W. E dan R. C DiPrima. 1992. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 5th Edition. John Wiley and Son, Inc, Canada.

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Chitra Wahyuana, dilahirkan di Padang pada tanggal 30 Juli 1988 dari pasangan Syofyan dan Nensi Herimulyani. Penulis adalah anak pertama dari empat bersaudara. Penulis menamatkan pendidikan Sekolah Dasar di SD Pertiwi 3 pada tahun 2000, SMP Negeri 13 Padang pada tahun 2003, dan SMA Negeri 10 Padang pada tahun 2006. Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur Reguler Mandiri (Seleksi Penerimaan Mahasiswa Baru).. Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) pada tahun 2009 di Jorong Pasar Gedang Kenagarian Pancung Soal Indopuro, Kabupaten Pesisir Selatan, dalam rangka menyelesaikan salah satu mata kuliah wajib fakultas.