PEMETAAN ISOMETRI

SKRIPSI

SUBRATA ADAMI
07 134 078

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2011

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini dengan judul : **"PEMETAAN ISOMETRI".** Salawat dan salam bagi Rasulullah saw yang telah membimbing umat manusia dari alam kegelapan ke alam terang benderang dan alam yang berilmu pengetahuan.

Skripsi ini disusun bertujuan untuk memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (Strata 1) di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas, Padang.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Ayahanda Hattamudin dan Ibunda tercinta Rinawati yang selalu memberikan do'a, kasih sayang, perhatian dan dukungan yang tidak ternilai harganya.
2. Bapak Dr. Syafrizal Sy selaku Ketua Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas.
3. Bapak Prof. Dr I Made Arnawa, M.Si selaku Pembimbing sekaligus koordinator Basic Science yang telah mengarahkan dan membimbing serta memberikan motivasi kepada penulis, sehingga dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini.
4. Bapak Narwen, M.Si dan Bapak Efendi, M.Si yang telah bersedia membaca, memperbaiki dan menguji skripsi ini.
5. Bapak Ir. Werman Kasoep, M.Kom selaku dosen Pembimbing Akademik yang telah membantu dan mengarahkan studi ini agar selesai tepat pada waktunya.

6. Bapak Zulakmal, M.Si selaku ketua Perpustakaan dan kepada staf Perpustakaan Jurusan Matematika Universitas Andalas yang telah memberi kesempatan penulis membaca dan meminjamkan buku-buku untuk keperluan studi dan penyusunan skripsi ini.
7. Dosen dan staf Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas yang telah memberi ilmu selama penulis menjalankan studi.
8. Bapak Kepala Dinas Pendidikan Kab. Simeulue dan Dinas Perguruan Tinggi yang telah memberikan beasiswa selama penulis menjalankan studi S-1.
9. Rekan saya Sutri Yogi, Elva Susanti, Ila Darmawati, Septi Marlena, Desi, Insyafman Gea, Angga Darma, Misbah hulkhair, Agus Mianto, Markas Ismi Afaidi, Dodi Afdaludin, Ali Maskur, Agusman Ya'aro harefa, Desman Waruwu, Fily, Ampuni, Meyman Jaya Waruwu, Tulus Ikhlas Tel, Sulaiman Lase, Rodi Virwiro, Suji Astuti, Vovi Jhonasri, Lindah, Aci, Nia, Hedlini, Susti Rahma Yulita, Sisri Yulia, Maria Susanti, Nofrisal Firdaus, Viki Zola Putra, Andris, Azharie Wibowo, Agus Fajarman Zalukhu, Dafid Rosda, Wastiarni Dakhi, Lidwina, Fivti Ria Wati Hura, Upi Defriani Anwar, Binti Solekha, Suciana Budi Ariani, Herlin Agustin dan rekan - rekan yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, terima kasih telah membantu, memberi motivasi pada penulis selama penyusunan skripsi ini.
10. Ibu Fatan selaku Ibu kos dan Mak Koi penulis yang telah banyak membantu selama penulis menjalankan studi.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat beserta karunia-Nya kepada semua pihak baik yang membantu maupun telah memberi support dan motevasi kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Akhirnya penulis menyadari bahwa dalam penulisan ini, terdapat kesalahan-kesalahan yang tidak penulis ketahui, hal ini tidak lain karena kekurangan penulis. Oleh karena itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran terhadap isi skripsi ini.

Padang, Juni 2011

Subrata Adami

ABSTRAK

Pemetaan dari ruang vektor V ke ruang vektor W yang mengawetkan operasi pada ruang vektor disebut pemetaan linier.Suatu pemetaan linier $T: V \to V$ yang mengawetkan jarak antara dua titik yaitu $\|T(\bar{x}) - T(\bar{y})\| = \|(\bar{x} - \bar{y})\|$ unuk $\bar{x}, \bar{y} \in V$ disebut pemetaan isometri. Suatu pemetaan linier $T: R^n \to R^n$ yang didefinisikan sebagai $T(A\bar{x}) = A\bar{x}$ dengan A matriks ortogonal, $\bar{x} \in R^n$ merupakan pemetaan isometri.

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

I.I Latar Belakang

Aljabar linier merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika yang aplikasinya banyak di pakai diberbagai ilmu terapan. Pemetaan isometri merupakan salah satu bagian dari aljabar linier.

Misalkan diketahui V dan W adalah ruang vektor dan T adalah sebuah fungsi yang mengaitkan setiap vektor di V dengan tepat satu vektor di W,maka dikatakan T memetakan V ke W dan dituliskan T : V → W. Nilai pemetaan T untuk elemen $\bar{x} \epsilon V$ ditulis $\mathrm{T}(\bar{x})$ yang merupakan elemen di W. Elemen $\mathrm{T}(\bar{x})$ disebut peta dari $\bar{x}$. Pemetaan dari ruang vektor V ke ruang vektor W yang mengawetkan operasi pada ruang vektor disebut pemetaan linier (Budhi, 1995). Pemetaan linier merupakan fungsi yang pemetaannya sangat berperan penting dalam fisika, bidang teknik, ilmu sosial, dan berbagai matematika (Anton, 1991).

Suatu pemetaan linier dari T : V → V yang mengawetkan jarak antara dua titik yaitu $\|T(\bar{x}) - T(\bar{y})\| = \|\bar{x} - \bar{y}\|$, untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in V$ disebut pemetaan isometri (Budhi, 1995) . Pada skripsi ini akan dibahas sifat-sifat dari pemetaan isometri.

1.2 Perumusan masalah

Dari latar belakang diatas, masalah yang dibahas adalah apa saja cirri-ciri pemetaan isometri.

1.3 Manfaat Penelitian

Penelitian Ini diharapkan dapat memberikan manfaat pada pengetahuan dan ilmu tentang pemetaan isometri. Dan juga dapat memberikan manfaat bagi para pembaca dan tentunya bagi penulis sendiri.

1.4 Pembatasan Masalah

Dalam pembahasan ini penulis membataskan masalah ini pada masalah pemetaan isometri pada R^2 dan R^3.

1.5 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui ciri-ciri pemetaan isometri.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini dibahas pengertian-pengertian dasar yang merupakan konsep awal untuk mempermudah pemahaman mengenai pembahasan pemetaan isometri. Konsep-konsep dasar tersebut satu persatu akan dibahas berikut ini.

2.1 Invers Matriks

Definisi 2.1.1 (Jacob,1990)

Misalkan A matriks $m \times n$. Jika L adalah matriks ukuran $m \times n$ dengan sifat $LA = I_n$ maka L disebut matriks invers kiri dari A. Jika R adalah matriks ukuran nxm dengan sifat $AR = I_m$ maka R disebut matriks invers kanan dari A. Jika B kedua-duanya merupakan invers kiri dan invers kanan dari A, maka B adalah invers dari A. Jika A mempunyai invers maka A dikatakan invertible atau matriks non singular.

Contoh

1. Misalkan matrik A dan matrik B sebagai berikut :

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} dan\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, apakah matriks B kedua-duanya merupakan invers kiri dan invers kanan dari A?... (maka B adalah invers dari A. Jika A memiliki invers maka A dikatakan invertible atau matriks nonsingular).

Jawab

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Jadi matriks A adalah invers kiri dari B atau B adalah invers kanan dari A.

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jadi matriks B bukan invers kiri dari A atau matriks A bukan invers kanan dari B

Jadi, karena matriks B tidak memiliki invers kiri dan matriks A tidak memiliki invers kanan.Akibatnya B bukan invers dari A.

2. Misalkan matrik A dan matrik B sebagai berikut :

$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} dan\ B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, apakah matriks B kedua-duanya merupakan invers kiri dan invers kanan dari *A*?... (maka *B* adalah invers dari *A*. Jika *A* memiliki invers maka *A* dikatakan invertible atau matriks nonsingular).

Jawab

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} dan\ B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Jadi matriks *A* adalah invers kiri dari *B* atau *B* adalah invers kanan dari *A* .

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Jadi matriks *B* adalah invers kiri dari *A* atau *A* adalah invers kanan dari *B* .

∴ Karena matriks *B* merupakan invers kanan dan invers kiri dari matriks *A* maka matriks *A* memiliki invers dan *A* disebut invertible atau matriks non singular

.

3. Misalkan matrik F dan matrik G,sebagai berikut :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} dan\ G = \begin{pmatrix} 1 & ^2/_5 & ^{-4}/_5 \\ 0 & ^{-1}/_5 & ^2/_5 \\ 0 & ^3/_5 & ^{-1}/_5 \end{pmatrix}$$

, apakah matriks G kedua-duanya merupakan invers kiri dan invers kanan dari F ?... (maka G adalah invers dari F.Jika F memiliki invers maka F dikatakan invertible atau matriks nonsingular).

Jawab

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad dan \quad G = \begin{pmatrix} 1 & ^2/_5 & ^{-4}/_5 \\ 0 & ^{-1}/_5 & ^2/_5 \\ 0 & ^3/_5 & ^{-1}/_5 \end{pmatrix}$$

$$FG = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ^2/_5 & ^{-4}/_5 \\ 0 & ^{-1}/_5 & ^2/_5 \\ 0 & ^3/_5 & ^{-1}/_5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Jadi matriks F adalah invers kiri dari G atau G adalah invers kanan dari F.

$$GF = \begin{pmatrix} 1 & ^2/_5 & ^{-4}/_5 \\ 0 & ^{-1}/_5 & ^2/_5 \\ 0 & ^3/_5 & ^{-1}/_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Jadi matriks G adalah invers kiri dari F atau F adalah invers kanan dari G .

$\therefore$ karena matrik G merupakan invers kanan dan invers kiri dari matrik F maka matrik F memiliki invers dan F disebut invertible atau matrik non singular.

Definisi 2.1.2 (Jacob,1990)

Jika A matriks invertible maka invers A ditulis A^{-1} .

Teorema 2.1.3 (Jacob,1990)

Misalkan A dan B masing-masing matriks invertible ukuran nxn maka AB invertible dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Bukti

Missalkan A dan B masing-masing matriks invetible berukuran nxn maka AB invertible dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Perhatikan bahwa,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

dan

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

Jadi $(B^{-1}A^{-1})$ adalah invers dari AB atau$B^{-1}A^{-1}$ =$(AB)^{-1}$.

Teorema 2.1.4 (Budhi, 1995)

Matriks berukuran 2×2 .

A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mempunyai invers jika dan hanya jika $ad - bc \neq 0$ dan matriks invers dari A adalah $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$.

Bukti

Matriks A =$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah matriks berukuran 2×2.

Misalkan $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ matriks invers dari A,maka memenuhi AB = I dengan I adalah matriks indentitas berukuran (ordo) 2×2.

Perhatikan bahwa,

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} ab_1 + bb_3 & ab_2 + bb_4 \\ cb_1 + db_3 & cb_2 + db_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan persamaan dua matriks diatas, diperoleh sistem persamaan,sebagai berikut :

$ab_1 + bb_3 = 1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (i)$

$cb_1 + db_3 = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (ii)$

$ab_2 + bb_4 = 0 \dots\dots\dots\dots\dots.. (iii)$

$cb_2 + db_4 = 1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (iv)$

Eliminasi persamaan (i) dan (ii) untuk memperoleh nilai b_1 dan $b_3$dengan $a \neq 0$ dan $c \neq 0$.

Kalikan kedua ruas dengan c pada persamaan (i) dan kalikan kedua ruas dengan a pada persamaan (ii) diperoleh :

$acb_1 + bcb_3 = c$

$acb_1 + adb_3 = 0$

$acb_1 + bcb_3 = c$

$acb_1 + adb_3 = 0$

$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} -$

$(bc - ad)b_3 = c$

$b_3 = \frac{c}{bc-ad}$

$= \frac{c}{-(ad-bc)}$

$= -c\left(\frac{1}{ad-bc}\right)$

$= \frac{-c}{ad-bc}$, dengan $ad - bc \neq 0$

Dari persamaan (ii) di atas yaitu : $cb_1 + db_3 = 0$ disubstitusikan b_3 menjadi :

$cb_1 + d\left(\frac{-c}{ad-bc}\right) = 0$

$$cb_1 = -\frac{d(-c)}{ad-bc}$$

$$cb_1 = \frac{cd}{ad-bc}$$

$$b_1 = \frac{cd}{c(ad-bc)}$$

$$= \frac{d}{ad-bc}, dengan\ ad - bc \neq 0$$

Diselesaikan persamaan (iii) dan (iv) untuk memperoleh nilai b_2 dan b_4 dengan $a \neq 0$ dan $c \neq 0$.

$ab_2 + bb_4 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(iii)$

$cb_2 + db_4 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(iv)$

Kalikan ruas kiri dan ruas kanan dengan c ke persamaan(iii) dan a ke persamaan (iv) dengan a ≠ 0 dan c ≠ 0 diperoleh :

$acb_2 + bcb_4 = 0$

$acb_2 + adb_4 = a$ $-$

$(bc - ad)b_4 = -a$

$$b_4 = \frac{-a}{bc-ad}$$

$$= \frac{-a}{-(-ad-bc)}$$

$$= \frac{a}{(ad-bc)}, \text{dengan } ad - bc \neq 0.$$

Dari persamaan (iii) di atas yaitu : $ab_2 + bb_4 = 0$ disubtitusikan b_3 menjadi :

$ab_2 + b\left(\frac{a}{ad-bc}\right) = 0$

$ab_2 = -\frac{ab}{ad-bc}$

$b_2 = \frac{-ab}{a(ad-bc)}$

$= \frac{-b}{ad-bc}$, dengan $ad - bc \neq 0$

Jadi diperoleh matriks $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & d \end{bmatrix}.$$

Karena B adalah invers dari A, maka :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \text{dimana } ad - bc \neq 0, \text{terbukti.}$$

Contoh

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$, tentukan invers dari matriks A ?

Jawab

$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$,dimana $ad - bc \neq 0$

$A^{-1} = \frac{1}{(7)(8)-(6)(9)} \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -9 & 7 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{56-54} \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -9 & 7 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -9 & 7 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$

2.2. Tranpos Matriks

Definisi 2.2.1 (Spiegel, 1991)

Transpos dari sebuah matriks A adalah A^T yang dibentuk dari A dengan mempertukarkan baris dan kolom. Jadi jika A = $(a_{\mathrm{pq}}), maka\ A^T = (a_{\mathrm{qp}})$.

Contoh

Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Tentukankanlah matriks A^T ?

Jawab

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.2.2 (Anton, 1991)

Jika ordo matriks A dan B memenuhi syarat perkalian matriks dan penjumlahan matriks, maka :

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(kA)^T = kA^T$, dimana k adalah sebarang skalar
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Bukti

1. Misalkan$A = (a_{ij}), maka\ A^T = (a_{ji}) = (b_{ij})\ dan\ (A^T)^T = (b_{ji}) = (c_{ij})$.

   Selanjutnya untuk setiap i dan j diperoleh

   $b_{ij} = a_{ji}\ karena\ itu\ c_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$

Sehingga $(A^T)^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}$ terbukti.

2. Misalkan $A = (a_{ij})\ dan\ B = (b_{ij})$

   $A + B = a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}\ dan\ c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$

   $(A + B)^{\mathrm{T}} = (a_{ij} + b_{ij})^{\mathrm{T}} = (c_{ij})^{\mathrm{T}} = c_{ji} = (a_{ji} + b_{ji} = A^T + B^T)$

   (terbukti).

3. Misalkan $A = (a_{ij}), maka\ k(A^T) = k(a_{ji}) = ka_{ji}$

   $= (ka_{ij})^{\mathrm{T}} = (kA)^{\mathrm{T}}$ (terbukti).

4. Misalkan $A = (a_{ij})\ dan\ B = (b_{ij})\ maka\ elemen\ pada\ baris\ ke - i$ dan kolomke-j dari AB adalah $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$, yang merupakan juga elemen pada baris ke-j dan kolom ke-i dari $(AB)^{\mathrm{T}}$. Dilain hal baris ke-j dari B^T adalah kolom ke-j dari B yaitu, $(b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj})$ dan kolom ke-I dari A^T adalah baris ke-I dari A yaitu

   $\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{in} \end{pmatrix}$. Jadi elemen pada baris ke-j dan kolom ke-i dari $B^T A^T$ adalah

   $$(b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}) \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{in} \end{pmatrix} = (b_{1j}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \cdots + b_{nj}a_{in}).$$

   Hal ini benar untuk semua i dan j,sehingga $(\mathrm{AB})^{\mathrm{T}} = B^T A^T$ (terbukti).

2.3 Ruang Vektor

Definisi 2.3.1 (Anton and Rorres, 1994)

Suatu ruang vektor V atas lapangan F adalah himpunan V, yang unsur-unsurnya disebut vektor-vektor, **0** disebut vektor nol, bersama dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian skalar di F yang memenuhi :

a. Untuk setiap **u**,**v**,**w** ϵ V berlaku

    1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$
    2. $0 + \mathbf{v} = \mathbf{v}$
    3. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
    4. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

b. Untuk semua **u, v** ϵ V dan untuk setiap r,s ϵ V berlaku :

    1. $r\mathbf{v} \in V$
    2. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$
    3. $0\mathbf{v} = 0$
    4. $r(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = r\mathbf{u} + r\mathbf{v}$
    5. $(r + s)\mathbf{v} = r\mathbf{v} + s\mathbf{v}$
    6. $r(s\mathbf{v}) = (rs)\mathbf{v}$

Definisi 2.3.2 (Jacob,1990)

Misalkan $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots\ldots$,vn adalah vektor dan $r_1, r_2,\ldots.,r_n$ adalah skalar. Vektor $w = r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 +\ldots.+ r_n\mathbf{v}_n$ dikatakan kombinasi linier dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,\ldots.\mathbf{v}_n$. himpunan semua kombinasi linier dari vektor-vektor **v**1, **v**2,….**v**n disebut span dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,\ldots.\mathbf{v}_n$ yang di tulis sebagai span $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,\ldots.\mathbf{v}_n\}$.

Definisi 2.3.3 (Anton and Rorres, 1994)

Jika $V = \{ v_1,v_2,\ldots.,v_n \}$ adalah himpunan tak kosong vektor-vektor, maka persamaan

$k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n = 0$

Memiiki paling tidak satu solusi, yaitu :

$k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots, k_n = 0$

Jika ini satu- satunya solusi, maka V disebut sebagai himpunan bebas linier. Jika terdapat solusi lain , maka S disebut sebagai himpunan tidak bebas linier.

Defenisi 2.3.4 (Jacob,1990)

Misalkan V ruang vektor atas lapangan F, $U \subseteq V$ dan $U \neq \emptyset$. U disebut subruang dari V, jika U membentuk ruang vektor atas lapangan F terhadap operasi penjumlahan dan perkalian V.

Definisi 2.3.5 (Jacob,1990)

Misalkan V ruang vektor, $U \subseteq V$ dan $U \neq \emptyset$, U disebut subruang dari V jika dan hanya jika :

1. **u,v** $\in$ U, maka **u** + **v** $\in$ U.
2. k $\in$ F dan **u** $\in$ U, maka k**u** $\in$ U

Bukti

($\Longrightarrow$) Misalkan U subruang dari V.

Akan ditunjkkan bahwa untuk setiap u,v $\in$ U dan k $\in$ F berlaku :

1. **u** + **v** $\in$ U.
2. k**u** $\in$ U, yaitu :

Ambil **u,v** $\in$ U dan k $\in$ F, maka :

1. **u** + **v** $\in$ U (U tertutup pada penjumlahan)
2. k**u** $\in$ U (U terutup pada penjumlahan)

Karena **u,v** $\in$ U dan k $\in$ F diambil sembarang maka untuk setiap **u,v** $\in$ U dan k $\in$ F berlaku u,v $\in$ U dank u $\in$ U.

(⇐) Misalkan untuk setiap u, v ϵ U dan kϵ F, berlaku :

1. u + v ϵ U.
2. ku ϵ U

Akan di tunjukkan bahwa U subruang dari V, yaitu dengan menunjukkan :

1. 0 ϵ U
2. Untuk setiap v ϵ U maka –v ϵ U, yaitu

1. Karena 0 ϵ U, maka terdapat 0 ϵ u sehingga u + 0 = u

   Karena U≠ Ø ini berarti ada u1 ϵ U dengan syarat ku1 ϵ U,

   Ambil k = 0 di peroleh 0u = 0 ϵ U

   Jadi 0 ϵ U
2. Akan di tunjukkan -v ϵ U

   Ambil v = 0 dengan syarat kv ϵ U.

   Pilih k = -1, maka :

   -v = -v + 0

   = -1u + v

   = ku + v

   Jadi –v ϵ U untuk setiap vϵ U

2.4 Hasil Kali Dalam

Definisi 2.4.1 (Cullen, 1993)

Hasil kali titik (*dot product*),atau hasilkali dalam euklides (*Euclidean inner product*), bagi $\boldsymbol{u} = [u_1 \;\; u_2 \dots u_n]^T$ dan $\boldsymbol{v} = [v_1 \;\; v_2 \dots v_n]^T$ didalam R^n didefinisikan sebagai $\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$.

Contoh

Diketahui vektor-vektor **u** =[1 2 3 4]^T, **v** =[4 -2 0 5]^T, dan **w** =[4 0 0 -1]^T di dalam R^4,tentukan **u . v, u . w,** dan **u . u?**

Bukti

u . v = 1x4 + 2x(-2) + 3x0 + 4x5 = 20,

u . w = 1x4 + 2x0 + 3x0 + 4x(-1) = 0, dan

u . u = $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

Definisi 2.4.2 (Cullen, 1993)

Jika vektor **u** didalam R^n, maka panjang atau norma, vektor **u** didefinisikan sebagai

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{u})} = \sqrt{(u_1{}^2 + u_2{}^2 + \ \ldots + u_n{}^2)} = \sqrt{\sum u_i{}^2}.$$

Definisi 2.4.3 (Cullen, 1993)

Dua vektor **u** dan **v** dalam R^n dikatakan ortogonal jika **u . v** = 0

Contoh

Misalkan vektor **u** = $[2 \ -1 \ \ 0 \ \ 3]^T \ dan \ \boldsymbol{v} = [3 \ \ 0 \ \ 5 \ -2]^T$ di dalam R^4.Tentukan panjang vektor **u** dan apakah **u . v** dikatakan ortogonal?

Jawab

Diketahui : **u** = $[2 \ -1 \ \ 0 \ \ 3]^T$

Panjang vektor **u** adalah $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(u_1{}^2 + u_2{}^2 + \ \ldots + u_n{}^2)}$

$$= \sqrt{(2^2 + -1^2 + 0^2 + 3^2)}$$

$$= \sqrt{(4 + 1 + 0 + 9)}$$

$$= \sqrt{14}$$

Apakah vektor **u** dan **v** dikatakan Ortogonal?

Jawab

Diketahui : **u** = $[2\ \ -1\ \ 0\ \ 3]^T\ dan\ \boldsymbol{v} = [3\ \ 0\ \ 5\ \ -2]^T$

u . v $= 2x3 + (-1)\,x\,0 + 0x5 + 3x(-2)$

$= 6 + 0 + 0 - 6$

$= 0$

Jadi,karena vektor **u . v** = 0, maka vektor **u** dan **v** adalah Ortogonal.

Definisi 2.4.4 (Anton dan Rorres, 2004)

Hasilkali dalam (*linear product*) pada sebuah ruang vektor real V adalah sebuah fungsi yang mengasosiasikan sebuah bilangan real $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ dengan sepasang vektor **u** dan **v** di dalam V sedemikian rupa sehingga aksioma-aksioma berikut ini terpenuhi bagi semua vektor **u, v,** dan **w** di dalam V dan semua bilangan skalar k.

1. $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$ [Aksioma kesimetrian]
2. $\langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ [Aksioma penjumlahan]
3. $\langle k\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \mathrm{k}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ [Aksioma homogenitas]
4. $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \geq 0$ dan $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ [Aksioma posifitas]

   jika dan hanya jika **v** = **0**

Sebuah ruang vektor real memiliki sebuah hasilkali dalam disebut ruang *hasilkali dalam real* (real inner product space).

Empat (4) aksioma diatas akan terpenuhi oleh teorema di bawah ini:

Teorema 2.4.3 (Anton dan Rorres, 2004)

Jika **u, v** dan **w** adalah vektor-vektor pada R^n dan k adalah suatu skalar sebarang, maka,

a. **u . v = v . u**
b. **(u + v) . w = u . w + v . w**

c. (k**u**) . **v** = k(**u** . **v**)

d. **v** . **v** $\geq$ **0**. Lebih lanjut, **v** . **v** = **0** jika dan hanya jika **v** = **0.**

Bukti

a. Misalkan: $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots u_n), \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots v_n)$adalah vektor-vektor pada R^n.

Perhatikan bahwa,

u . **v** = $(u_1, u_2, \dots u_n)$. $(v_1, v_2, \dots v_n)$

$= (u_1 . v_1 + u_2 . v_2 \dots + u_n . v_n)$

v . **u** = $(v_1, v_2, \dots v_n)$. $(u_1, u_2, \dots u_n)$

$= (v_1 . u_1 + v_2 . u_2 \dots + v_n . u_n)$

$= (u_1 . v_1 + u_2 . v_2 \dots + u_n . v_n)$

Jadi terbukti **u.v** = **v.u**

b. Misalkan

$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots u_n), \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots v_n), dan\ \boldsymbol{w} =$

$(w_1, w_2, \dots w_n) adalah\ vektor - vektor\ pada\ R^n.$

Perhatikan bahwa,

(**u** + **v**) . **w** = $((u_1, u_2, \dots u_n) . (v_1, v_2, \dots v_n)) . (w_1, w_2, \dots w_n)$

$= (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2 \dots, u_n + v_n) . (w_1, w_2, \dots w_n)$

$= (u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 \dots + (u_n + v_n)w_n$

$= (u_1w_1 + u_2w_2 + \cdots + u_nw_n) + (v_1w_1 + v_2w_2 + \cdots + v_nw_n)$

(**u** + **v**) . **w** = **u** . **w** + **v** . **w** (terbukti).

c. Misalkan : $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots u_n), \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots v_n)$adalah vektor-vektor pada R^n dan k skalar sebarang.

Perhatikan bahwa,

(k**u**) . **v** = $(k(u_1, u_2, \dots u_n)) . (v_1, v_2, \dots v_n)$

$= (ku_1, ku_2, \dots ku_n) \,.\, (v_1, v_2, \dots v_n)$

$= (ku_1 . v_1 + k\, u_2 . v_2 \dots + ku_n . v_n)$

$= k(u_1 . v_1 + \; u_2 . v_2 \dots + u_n . v_n)$

$= k(\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v})$

Jadi terbukti **(ku) . v** = k(**u . v**) **.**

2.5 Panjang Vektor

Panjang suatu vektor adalah panjang dari garis berarahnya, arah dari vektor adalah arah dari garis sebenarya. Di R^2 panjang vektor $\bar{u} = u_1, u_2$ diberikan oleh $\|\bar{u}\| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_1}^2}$ yang dapat ditulis dalam ruas-ruas hasil kali dalam *titik sebagai* $\|\bar{u}\| = \sqrt{\bar{u}.\bar{u}} = \langle \bar{u}.\bar{u} \rangle^{1/2}$. *Dengan cara yang sama*

$\|\bar{u}\| = \sqrt{\bar{u}.\bar{u}} = \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle^{1/2}$ adalah vektor di R^3, maka $\|\bar{u}\| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}$

$= \sqrt{\bar{u}.\bar{u}} = \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle^{1/2}$ (Anton, 1991) .

Definisi 2.5.1 (Budhi, 1995)

Misalkan V ruang vektor. Hasil kali dalam dua vektor $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ di V adalah bilangan yang ditulis $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$ dan memenuhi sifat

(a). $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle$

(b). $\langle \bar{u}, \bar{v} + \bar{w} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle$

(c). $(s\bar{u} \,, \bar{v}) = s(\bar{u} \,, \bar{v})$

(d). $\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \geq 0$; $\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $\bar{u} = \bar{0}$.

Ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam disebut ruang hasil kali dalam.

Definisi 2.5.2 (Anton, 1991)

Jika V adalah sebuah ruang hasil kali dalam, maka norm atau panjang vektor $\bar{u}$ dinyatakan oleh $\|\bar{u}\|$ dan definisi $\|\bar{u}\| = \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle^{1/2}$.

Contoh

Carilah panjang vektor $\bar{v}$ dan $\bar{v} = (6, -8)$.

Jawab

Panjang suatu vektor atau norm $\bar{v}$, dinyatakan sebagai $\|\bar{u}\|$.

Norm suatu vektor $\bar{v} = (v_1 v_2)$ dalam ruang berdimensi-2 adalah

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}$$

$$= \sqrt{(6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64}$$

$$= \sqrt{100} = 10$$

Carilah panjang vektor $\bar{u}$ dan $\bar{u} = (3, -8,\ 6)$.

Contoh

Jawab

Panjang suatu vektor atau norm $\bar{u}$, dinyatakan sebagai $\|\bar{u}\|$.

Norm suatu vektor $\bar{u} = (u_1 u_2 u_3)$ dalam ruang berdimensi-3 adalah

$$\|\bar{u}\| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + (-8)^2 + 6^2}$$

$$= \sqrt{9 + 64 + 36}$$

$$= \sqrt{109}$$

$$= 10{,}4$$

2.6 Jarak Dua Titik

$d(\bar{u},\bar{v}) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2} = \|\bar{u} - \bar{v}\|$ dengan cara yang sama, di R^3 jarak antara dua titik $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ diberikan

$d(\bar{u},\bar{v}) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2} = \|\bar{u} - \bar{v}\|$ (Anton, 1991).

Contoh

Carilah jarak antara titik $\bar{u}\ dan\ \bar{v}$ dimana $\bar{u} = (-3,\ 6, 2\ ) dan\ \bar{v} = (2, -4, 1)$ adalah titik-titik dalam ruang berdimensi-3.

Bukti

Karena $\bar{u} = (-3,\ 6, 2\ ) dan\ \bar{v} = (2,\ -4, 1)$ adalah titik-titik dalam ruang berdimensi-3 maka jarak antara kedua titik $\bar{u}\ dengan\ titik\ \bar{v}$ adalah :

$d(\bar{u},\bar{v}) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2} = \|\bar{u} - \bar{v}\|$

$= \sqrt{(-3 - 2)^2 + (6 - (-4))^2 + (2 - 1)^2}$

$= \sqrt{(-5)^2 + (10)^2 + (1)^2}$

$= \sqrt{25 + 100 + 1}$

$= \sqrt{126}$

= 11,224.

Definisi 2.6.1 (Anton, 1991)

Jika V adalah sebuah ruang hasil kali dalam,maka jarak antara dua titik pada vektor $\bar{u}\ dan\ \bar{v}$ dinyatakan oleh $d(\bar{u},\bar{v}) = \|\bar{u} - \bar{v}\|$.

Contoh

Carilah jarak antara $\bar{u}\ dan\ \bar{v}$ dimana $\bar{u} = (3,\ 6\ ) dan\ \bar{v} = (2,\ 4)$ adalah titik-titik dalam ruang berdimensi-2.

Bukti

Karena $\bar{u} = (3,\ 6\ ) dan\ \bar{v} = (2,\ 4)$ adalah titik-titik dalam ruang berdimensi-2 maka jarak antara kedua titik $\bar{u}\ dengan\ \bar{v}$ adalah :

$$d(\bar{u}\,,\bar{v}) = \|\bar{u} - \bar{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$$

$$= \sqrt{(3-2)^2 + (6-4)^2}$$

$$= \sqrt{(1)^2 + (2)^2}$$

$$= \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$= 2.2361$$

2.7 Transformasi Linier

Definisi 2.7.1 (Anton, 1991)

Jika *F : V→ W* adalah sebuah fungsi dari ruang vektor *V* ke dalam ruang vektor *W*, maka F kita namakan tranformasi linier *(linear transformation)* jika

(i) $F\ (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = F(\boldsymbol{u}) + F(\boldsymbol{v})$ untuk semua vektor **u** dan **v** di *V*.

(ii) $F(k\boldsymbol{u}) = kF(\boldsymbol{u})$ untuk semua vektor **u** di dalam *V* dan semua skalar k.

Contoh 1

Misalkan F : $R^2 \rightarrow R^2$ tunjukan bahwa F adalah transformasi linear.

Jawab

Ambil sebarang **u,v** ϵ $\mathbf{R}^2$ dan k skalar.

Misalkan **u** = (x_1,y_1) dan **v** = (x_2,y_2)

Perhatikan bahwa :

(i) F(**u+v**) = $(x_1,y_1 + x_2,y_2) = (x_1+x_2\ ,\ y_1+y_2)$

F(**u**) = (x_1,y_1) dan F(**v**) = (x_2,y_2)

Maka F(**u**) + F(**v**) = $(x_1,y_1) + (x_2,y_2)$

$= (x_1,y_1 + x_2,y_2)$

$= (x_1+x_2 , y_1+y_2)$

Jadi F $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$.

(ii) $F(k\mathbf{u}) = (k (x_1,y_1)) = k x_1,ky_1$

$kF(\mathbf{u}) = k(x_1,y_1) = k x_1,ky_1$

Jadi karena (i) dan (ii) maka F adalah transformasi linier.

Contoh 2

Misalkan F : $R^3 \to R^3$ adalah pemetaan "proyeksi" ke bidang xy,artinya, F adalah pemetaan yang didefinisikan oleh F(x, y,z)= (x, y,0).Tunjukan apakah F linier?

Jawab

Misalkan v = (a, b, c) dan w = (a', b', c').

Maka F(v + w) = F(a + a', b + b', c + c')

= (a + a', b + b', 0)

= (a, b, 0) + $(a', b', 0)$ = F(v) + F(w)

Dan untuk sebarang skalar k,

F(kv) = F(ka, kb, kc)

= (ka, kb, 0)

= k(a, b, 0)

= kF(v).

Jadi F adalah linier.

Definisi 2.7.2 (Jacob,1990)

Misalkan T : V → W suatu transformasi linier.

1. Kernel dari T, ditulis ker(T) didefenisikan sebagai :

   Ker(T) = { $\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$}

2. Image dari T ditul Im(T), didefenisikan sebagai :

$\text{Im}(T) = \{T(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}$

Definisi 2.7.3 (Jacob,1990)

Misalkan T : V → W transformasi linier.

$B = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \}$ basis terurut di V

$C = \{ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n \}$ basis terurut di W

Didefenisikan matrik $[T]_{BC}$ berukuran mxn dengan $[T]_{BC} = (a_{ij})$ dimana untuk setiap J skalar a_{ij} ditentukan dengan tunggal oleh persamaan :

$T(\mathbf{vj}) = \mathbf{w} = a_{1j}\mathbf{w_1} + a_{2j}\,\mathbf{w}_2 + \ldots\ldots + a_{nj}\mathbf{w_n}$

2.8 Ortogonal

Definisi 2.8.1 Ortonormal (Anton, 1991)

Sebuah himpunan vektor pada ruang hasil kali dalam dinamakan himpunan ortogonal jika semua pasangan vektor-vektor yang berbeda dalam himpunan tersebut ortogonal. Sebuah himpunan ortogonal yang setiap vektornya mempunyai norm 1 dinamakan ortonormal.

Contoh

Misalkan $\bar{v}_1 = (0,1,0), \bar{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \bar{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, apakah himpunan $\mathbf{S} = \{\bar{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_2, \bar{\boldsymbol{v}}_3\}$ ortonormal ?

Jawab

Himpunan $\mathbf{S} = \{\bar{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_2, \bar{\boldsymbol{v}}_3\}$ dikatakan ortonormal jika R^3 memmpunyai hasil kali dalam Euclidis berikut :

$$\langle v_1, v_2\rangle = (0)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (1)(0) + (0)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\langle v_1, v_3\rangle = (0)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (1)(0) + (0)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\langle v_2, v_3\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (0)(0) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

Karena $\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1, v_3\rangle = \langle v_2, v_3\rangle = 0$, maka setiap pasangan vektor ortogonal.

Norm setiap vektor :

$$\|\bar{v}_1\| = \sqrt{(0)^2 + (1)^2 + (0)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\bar{v}_2\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (0)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\bar{v}_3\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (0)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

Jadi himpunan S = $\{\bar{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_2, \bar{\boldsymbol{v}}_3\}$ ortonormal,karena $\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1, v_3\rangle = \langle v_2, v_3\rangle =$ 0, maka setiap pasangan vektor ortogonal.

Definisi 2.8.2 (Cullen, 1993)

Dua vektor **u** dan **v** di dalam R^n dikatakan *ortogonal* jika **u . v** = 0. Suatu himpunan vektor-vektor $\boldsymbol{s} = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_k}\}$ di dalam R^n dikatakan saling *ortogonal* jika vektor-vektor itu ortogonal sepasang-sepasang,dengan kata lain $\boldsymbol{u_i}.\boldsymbol{u_j} = 0$ jika $i \neq j$. Jika vektor-vektor di dalam himpunan S yang saling ortogonal itu semuanya vektor satuan,maka kita katakan himpunan itu *ortonormal*; dengan kata lain, $\boldsymbol{u_i}.\boldsymbol{u_j} = 0$ jika $i \neq j$ dan $\boldsymbol{u_i}.\boldsymbol{u_i} = 1$ untuk $i = 1, 2, \dots, k$. Himpunan *ortonormal* yang juga membentuk suatu landasan bagi R^n dinamakan landasan *ortonormal* bagi R^n.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Pemetaan Isometri

Suatu matriks ortogonal mengawetkan hasil kali titik seperti sifat berikut :

Sifat 3.1.1 (Budhi, 1995)

$T : V \to V$ yang didefinisikan sebagai $T(\bar{x}) = A\bar{x}$ dengan A matriks ortogonal,T mempunyai sifat mengawetkan hasil kali titik untuk dua vektor $\bar{x}\ dan\ \bar{y}$ di V.

Bukti

Diketahui $\forall\ \bar{x}, \bar{y}\ \in V$ didefinisikan bahwa $T(\bar{x}) = A\bar{x}\ , T(\bar{y}) = A\bar{y}$ dengan A matriks ortogonal.

Ambil sebarang $\bar{x}, \bar{y}\ \in V$.

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}
\langle T(\bar{x}), T(\bar{y})\rangle &= \langle (A\bar{x}), (A\bar{y})\ \rangle \\
&= (A\bar{x})^t\ (A\bar{y}) \\
&= \bar{x}^t\ A^t\ A\bar{y} && \text{(Perhatikan Teorema 2.2.2 (4))} \\
&= \bar{x}^t\ I\ \bar{y} && \text{(Sifat Identitas)} \\
&= \bar{x}^t\ \bar{y} \\
&= \bar{x}\ .\bar{y}
\end{aligned}$$

Definisi 3.1.2 (Anton dan Rores, 2004)

Sebuah matriks bujur sangkar A yang memiliki sifat $A^{-1} = A^T$ disebut sebagai matiks ortogonal.

Definisi 3.1.3 (Budhi, 1995)

Pemetaan linear $T : V \to V$ disebut pemetaan isometri pada V, jika T mengawetkan jarak dari dua titik, yaitu $\|T(\bar{x}) - T(\bar{y})\| = \|\bar{x} - \bar{y}\|$, untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in V$, maka $\|T(x) - T(\bar{y})\| = \|T(\bar{x} - \bar{y})\| = \|(\bar{x} - \bar{y})\|\ dan\ \|T(\bar{x})\| = \|(\bar{x})\|$ atau $T\|(\bar{y})\| = \|(\bar{y})\|$.

Teorema 3.1.4 (Budhi, 1995)

Misalkan A merupakan matriks ortogonal berukuran $n \times n$, maka $\| A\bar{x}\| = \|\bar{x}\|$, untuk semua vektor $\bar{x}$ di R^n.

Bukti

Misalkan A matriks ortogonal yang berukuran n×n,ambil $\bar{x} \epsilon R^n$.

Perhatikan bahwa nilai dari $\|A\bar{x}\|^2 = \langle (A\bar{x}), (A\bar{x}) \rangle$ (Perhatikan Deinisi 2.5.2)

$$= (A\bar{x})^t (A\bar{x})$$

$$= \bar{x}^t A^t A\bar{x}$$

$$= \bar{x}^t I \bar{x} \qquad \text{(Sifat Identitas)}$$

$$= \bar{x}^t \bar{x}$$

$$= \bar{x} . \bar{x}$$

$$= \|\bar{x}\|^2$$

$$\| A\bar{x}\| = \|\bar{x}\| .$$

Pemetaan linier $T(\bar{x}) = A\bar{x}$ dengan A matriks ortogonal merupakan isometri, tetapi sebaliknya juga berlaku seperti dinyatakan teorema berikut ini.

Teorema 3.1.5 (Budi, 1995)

Jika pemetaan linier $T : V \to V$ yang didefinisikan sebagai $T(\bar{x}) = A\bar{x}$ merupakan pemetaan isomerti, maka A matriks ortogonal.

Bukti

Pertama, karena T pemetaan isometri, maka

$$\|T(\bar{x}) - T(\bar{y})\| = \|(\bar{x} - \bar{y})\| \qquad \text{(perhatikan definisi 3.1.3)}$$

$$\|T(\bar{x}) - T(\bar{y})\|^2 = \|T(\bar{x} - \bar{y})\|^2$$

$$= \langle\{T(\bar{x} - \bar{y})\}, \{T(\bar{x} - \bar{y})\}\rangle$$

$$\|T(\bar{x}) - T(\bar{y})\|^2 = \langle(\bar{x} - \bar{y}), (\bar{x} - \bar{y})\rangle \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3.1.1)}$$

Perhatikan bahwa, karena T pemetaan isometri, maka ruas kiri dari (3.1.1) :

$$\|T(\bar{x}) - T(\bar{y})\|^2 = \langle T(\bar{x}) - T(\bar{y}), T(\bar{x}) - T(\bar{y})\rangle$$

$$= \langle T(\bar{x}) - T(\bar{y}), T(\bar{x})\rangle - \langle T(\bar{x}) - T(\bar{y}), T(\bar{y})\rangle \ldots\ldots\ldots \text{(definisi 2.3.1. (b))}$$

$$= \langle T(\bar{x}), T(\bar{x}) - T(\bar{y})\rangle - \langle T(\bar{y}), T(\bar{x}) - T(\bar{y})\rangle \ldots\ldots\ldots \text{(definisi 2.3.1. (a))}$$

$$= \langle T(\bar{x}), T(\bar{x})\rangle - \langle T(\bar{x}), T(\bar{y})\rangle - [\langle T(\bar{y}), T(\bar{x})\rangle - \langle T(\bar{y}), T(\bar{y})\rangle] \ldots \text{(definisi2.3.1.(b))}$$

$$= \langle T(\bar{x}), T(\bar{x})\rangle - \langle T(\bar{x}), T(\bar{y})\rangle - [\langle T(\bar{x}), T(\bar{y})\rangle - \langle T(\bar{y}), T(\bar{y})\rangle] .. \text{(definisi 2.3.1.(a))}$$

$$= \langle T(\bar{x}), T(\bar{x})\rangle - \langle T(\bar{x}), T(\bar{y})\rangle - \langle T(\bar{x}), T(\bar{y})\rangle + \langle T(\bar{y}), T(\bar{y})\rangle$$

$$= \langle\|T(\bar{x})\|^2\rangle - 2T(\bar{x}), T(\bar{y}) + \langle\|T(\bar{y})\|^2\rangle \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3.1.2)}$$

Ruas kanan dari (3.1.1) :

$$\langle(\bar{x} - \bar{y}), (\bar{x} - \bar{y})\rangle = \langle\bar{x} - \bar{y}, \bar{x}\rangle - \langle\bar{x} - \bar{y}, \bar{y}\rangle$$

$$= \langle\bar{x}, \bar{x}\rangle - \langle\bar{x}, \bar{y}\rangle - [\langle\bar{y}, \bar{x}\rangle - \langle\bar{y}, \bar{y}\rangle]$$

$$= \langle\bar{x}, \bar{x}\rangle - \langle\bar{x}, \bar{y}\rangle - \langle\bar{y}, \bar{x}\rangle + \langle\bar{y}, \bar{y}\rangle$$

$$= \langle\bar{x}, \bar{x}\rangle - \langle\bar{x}, \bar{y}\rangle - \langle\bar{x}, \bar{y}\rangle + \langle\bar{y}, \bar{y}\rangle$$

$$= \langle\|\bar{x}\|^2 - 2\bar{x}, \bar{y} + \|\bar{y}\|^2\rangle \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3.1.3)}$$

Karena berlaku *definisi* 3.1.2 yaitu $T\|(\bar{x})\| = \|(\bar{x})\|$ dan $T\|(\bar{y})\| = \|(\bar{y})\|$. Dari (3.1.1), yaitu (3.1.2) sama dengan (3.1.3) menjadi :

$$-2\langle T(\bar{x}), T(\bar{y})\rangle = -2\langle\bar{x}, \bar{y}\rangle$$

$$\langle T(\bar{x}), T(\bar{y})\rangle = \langle\bar{x}, \bar{y}\rangle$$

$\langle T(\bar{x}), T(\bar{y}) \rangle = \bar{x}.\bar{y}$

Jadi, terbukti T mengawetkan hasil kali titik.

Kedua, akan dibuktikan A matriks ortogonal. Karena T mengawetkan hasil kali titik dan untuk setiap vektor $\bar{x}$ dan $\bar{y}\ \epsilon R^n$ berlaku,

$$\langle A\bar{x} . A\bar{y} \rangle = \langle \bar{x} . \bar{y} \rangle$$

Perhatikan bahwa,

$$\langle A\bar{x} . A\bar{y} \rangle = \langle \bar{x} . \bar{y} \rangle$$

$$(A\bar{x})^t\ (A\bar{y}) = \langle \bar{x} . \bar{y} \rangle$$

$$\bar{x}^t\ A^t\ A\bar{y} = \bar{x}^t\ I\ \bar{y} \qquad \text{(Sifat Identitas)}$$

$$\bar{x}^t\ A^t\ A\bar{y} = \bar{x}^t\ \bar{y}.$$

Khusus untuk $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ yang merupakan elemen dari basis standar, disimpulkan bahwa $A^tA = I$, atau untuk sebarang $\bar{x}$ dan $\bar{y}\ \epsilon R^n$, maka haruslah $A^tA = I$, maka A adalah matriks ortogonal.

Contoh 1

Diberikan $T : R^2 \rightarrow R^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ apakah T merupakan suatu pemetaan isometri?

Bukti

Diketahui :

$T : R^2 \rightarrow R^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Misalkan $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, maka $A^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Perhatikan bahwa,

$$A^T A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} cos^2\theta + sin^2\theta & -\sin\theta.\cos\theta + \sin\theta\,.\cos\theta \\ -\sin\theta.\cos\theta + \sin\theta\,.\cos\theta & sin^2\theta + cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ T suatu pemetaan isometri

Misalkan diberikan titik $A = (2, 1)$ dan titik $B = (5, 5)$. Berapa jarak antara *A ke B* ?

Bukti

Diketahui titik $A = (2, 1)$ dan titik $B = (5, 5)$

Jarak *A ke B* adalah

$$d(A\,,B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

$$= \sqrt{(2-5)^2 + (1-5)^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$$

$= 5$ ....(*)

$$T\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2cos\theta - \sin\theta \\ 2\sin\theta + cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{...(i)}$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5cos\theta - 5\sin\theta \\ 5\sin\theta + 5cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{...... ....(ii)}$$

Misalkan dari persamaan (i) dan persamaan (ii) diperoleh titik $A' = (2cos\theta - \sin\theta\,,\ 2\sin\theta + \ cos\theta)$ dan titik $B' = (5cos\theta - 5\sin\theta\,,\ 5\sin\theta + \ 5cos\theta)$,dapat dihitung jarak $A'\ ke\ B'$ adalah

$d(A', B') = \sqrt{(a'_1 - b'_1)^2 + (a'_2 - b'_2)^2}$

$=$

$\sqrt{\left((2cos\theta - \sin\theta) - (5cos\theta - 5\sin\theta)\right)^2 + \left((2\sin\theta + \ cos\theta) - (5\sin\theta + \ 5cos\theta)\right)^2}$

$= \sqrt{(-3cos\theta + 4\sin\theta)^2 + (-3\sin\theta + 4cos\theta)^2}$

$= \sqrt{(-3cos\theta + 4\sin\theta).(-3cos\theta + 4\sin\theta) + (-3\sin\theta + 4cos\theta).(-3\sin\theta + 4cos\theta)}$

$= \sqrt{16sin^2\theta + 9cos^2\theta - 24sin\theta cos\theta + 9sin^2\theta + 16cos^2\theta + 24sin\theta cos\theta}$

$= \sqrt{25sin^2\theta + 25cos^2\theta}$

$= \sqrt{25(sin^2\theta + cos^2\theta)} = \sqrt{25(1)}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$ ....(**)

Jadi, dari persamaan (*) dan persamaan (**) dapat disimpulkan bahwa $T : \boldsymbol{R}^2 \rightarrow \boldsymbol{R}^2$ mengawetkan jarak antara dua titik, karena jarak pemetaan sebelum dipetakan dan setelah dipetakan sama, ini disebut pemetaan isometri (Budhi,1995).

Contoh 2

Diberikan $T : R^3 \rightarrow R^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{-3}{7} \end{pmatrix}$$

Bukti

Diketahui :

Diberikan $T : R^3 \to R^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{-3}{7} \end{pmatrix}$$

Misalkan $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{-3}{7} \end{pmatrix}, maka A^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{-3}{7} \end{pmatrix}$

Perhatikan bahwa,

$$AA^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{-3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{-3}{7} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{9+4+36}{49} & \frac{-18+6+12}{49} & \frac{6+12-18}{49} \\ \frac{-18+6+13}{49} & \frac{36+9+4}{49} & \frac{-12+18-6}{49} \\ \frac{6+12-18}{49} & \frac{-12+18-6}{49} & \frac{4+36+9}{49} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\therefore$ T suatu pemetaan isometri.

Misalkan diberikan titik $A = (2, 1, 0)$ dan titik $B = (5, 5, 0)$. Berapa jarak antara A ke B ?

Bukti

Diketahui titik $A = (2, 1, 0)$ dan titik $\mathrm{B} = (5, 5, 0)$

Jarak A ke B adalah

$$d(A,B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

$$= \sqrt{(2-5)^2 + (1-5)^2 + (0-0)^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$$

$$= 5 \quad \text{...(*)}$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{-3}{7} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{-3}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6+2+0}{7} \\ \frac{-12+3+0}{7} \\ \frac{4+6+0}{7} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{8}{7} \\ \frac{-9}{7} \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix} \quad \text{...... ....(i)}$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{-3}{7} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{-3}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15+10+0}{7} \\ \frac{-30+15+0}{7} \\ \frac{10+30+0}{7} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{25}{7} \\ \frac{-15}{7} \\ \frac{40}{7} \end{pmatrix} \quad \text{...... ....(ii)}$$

Misalkan dari persamaan (i) dan persamaan (ii) diperoleh titik $A' = \left(\frac{8}{7}, \frac{-9}{7}, \frac{10}{7}\right)$ dan titik $B' = \left(\frac{25}{7}, \frac{-15}{7}, \frac{40}{7}\right)$, sehingga jarak A' ke B' adalah

$$d(A', B') = \sqrt{(a'_1 - b'_1)^2 + (a'_2 - b'_2)^2 + (a'_3 - b'_3)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{8}{7} - \frac{25}{7}\right)^2 + \left(\frac{-9}{7} + \frac{15}{7}\right)^2 + \left(\frac{10}{7} - \frac{40}{7}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{17}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(-\frac{30}{7}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{289+36+900}{49}} = \sqrt{\frac{1225}{49}}$$

$$= \sqrt{25}$$

$= 5$ ....(**).

Jadi,dari persamaan (*) dan persamaan (**) dapat disimpulkan bahwa $T : R^3 \to R^3$ mengawetkan jarak antara dua titik, karena jarak pemetaan sebelum dipetakan dan setelah dipetakan sama, ini disebut pemetaan isometri (Budhi,1995).

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari penjabaran dan pembahasan yang telah dilakukan, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa, suatu pemetaan linier $T: V \to V$ yang mengawetkan jarak antara dua titik yaitu $\|T(\bar{x}) - T(\bar{y})\| = \|(\bar{x} - \bar{y})\|$ untuk $\bar{x}, \bar{y} \in V$ disebut pemetaan isometri. Suatu pemetaan linier $T: R^n \to R^n$ yang didefinisikan sebagai $(A\bar{x}) = A\bar{x}$, $\bar{x} \in R^n$ disebut Pemetaan Isometri jika dan hanya jika A matriks ortogonal.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 1991. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi kelima. Jakarta : Erlangga.

Anton, H.1990. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi ketiga : Erlangga, Jakarta.

Anton, Howard dan Chris Rorres. 2004. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi kedelapan. Erlangg : Jakarta.

Anton, 1991. *Aljabar Linier Elementer.* Alih Bahasa Pantur Silaban & I Nyoman Susila. Penerbit Erlangga. Jakarta.

Anton. H and Rorres. C. *Elementary linear algebra* (7th ed), 1994, John Wile & Sons.Inc. New York.

Budhi, W.S. 1995. *Aljabar Linier*. Pt Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.

Cullen, Charles G. 1993. Aljabar Linier Dengan Penerapannya. Gramedia Pustaka Utama : Jakarta.

Jacob, B. 1990. *Linear Algebra.* W.H. Freeman and Company. New York.

Spiegel, M.R. 1991. *Analisis Vektor.* Penerbit Erlangga. Jakarta.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Nasreuhe Kec. Salang Kab. Simeulue. Provinsi Nanggro Aceh Darussalam (NAD) pada tanggal 02 Desember 1988 sebagai anak ketiga dari empat bersaudara dari Ayah Hattamudin dan ibunda Rinawati. Penulis menamatkan Sekolah Dasar di SD Negeri 1 Suakmanang pada tahun 2000, Sekolah Menengah Pertama di SMP N 2 Salang pada tahun 2003, dan Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 1 Salang pada tahun 2006, setelah tamat SMA penulis menimbah ilmu di Bima Komputer tepatnya dikampung Keramat Banda Aceh sampai tahun 2007. Pada tahun 2007 penulis diterima di Jurusan Matematika Program Basic Science Guru Berasrama FMIPA Universitas Andalas, dan berhasil memperoleh gelar sarjana sains (S.Si) pada tahun 2011.