PELABELAN SISI AJAIB SUPER PADA GRAF LINTASAN GABUNG GRAF BIPARTIT LENGKAP

SKRIPSI

MARISA LEZTARI
06934018

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG 2011

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis ucapkan kepada Allah SWT atas segala limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul "**Pelabelan Sisi Ajaib Super pada Graf Lintasan Gabung Graf Bipartit Lengkap**" penulis sampaikan kepada Nabi Besar Muhammad SAW.

Skripsi ini ditulis sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Andalas.

Penyelesaian skripsi ini tak lepas dari semua pihak yang terlibat baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu pada kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada :

1. Bapak **Narwen, M.Si** dan Bapak **Efendi, M.Si** selaku pembimbing yang telah memberikan bimbingan dalam penyelesaian skripsi ini.
2. Bapak **Dr. Syafrizal Sy,** Ibu **Nova Noliza Bakar, M.Si** dan Bapak **Zulakmal, M.Si** selaku penguji dalam penyelesaian skripsi ini.
3. Ibu **Dr. Lyra Yulianti** selaku Koordinator Pendidikan Jurusan Matematika.
4. Bapak **Zulakmal, M.Si** selaku Pembimbing Akademik.
5. Bapak / Ibu Dosen beserta Karyawan Jurusan Matematika.
6. Keluarga tersayang yang senantiasa memberikan dukungan dan semangat selama ini.
7. Teman-teman mahasiswa di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas, khususnya angkatan 2006 atas segala bantuan dan kerjasamanya.
8. Semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran agar sempurnanya skripsi ini. Semoga skripsi ini memberikan manfaat bagi kita semua. Amin.

Padang, Agustus 2011

Penulis

ABSTRAK

Graf hutan (*forest*) merupakan kumpulan dari graf pohon. Graf pohon didefinisikan sebagai graf terhubung berorde n yang tidak memuat lingkaran dan dilambangkan dengan T_n. Bentuk forest F yang merupakan gabungan dari graf lintasan dengan m titik dan graf bipartit lengkap dengan $(1, n)$ titik sehingga ditulis $F \cong P_m \cup K_{1,n}$. Graf *forest* yang terbentuk ini, merupakan pelabelan sisi ajaib super. Dalam tulisan ini, akan ditentukan pelabelan sisi ajaib super pada *forest* $F \cong P_m \cup K_{1,n}$ dengan $m \geq 4$ dan $n \geq 1$.

Kata Kunci : *Forest, Graf pohon, Graf lintasan, Graf bipartit lengkap, Pelabelan sisi ajaib super*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pelabelan graf merupakan pemberian nilai (label) pada himpunan titik, himpunana sisi, dan himpunan titik dan sisi. Pelabelan merupakan pemetaan injektif yang memetakan unsur himpunan titik atau unsur himpunan sisi ke bilangan asli yang disebut label. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi.

Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sadlàčk pada tahun 1964, Stewart tahun 1966, Kotzig dan Rosa tahun 1970. Dasar teori graf berawal pada abad ke 18 yang bermula dari masalah jembatan Konigsberg.

Untuk suatu graf G pada titik (p) dan sisi (q), fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2, \dots, p+q\}$ adalah pelabelan sisi ajaib dari G jika $f(u)+f(v)+f(uv)=k$ adalah konstan, untuk setiap sisi $uv \in E(G)$. Konstanta k disebut sebagai angka ajaib untuk pelabelan tersebut. Pelabelan ini kemudian diberi nama ulang menjadi pelabelan total sisi-ajaib oleh Wallis dkk (2000) untuk membedakan dengan konsep pelabelan ajaib lainnya. Khususnya, bila $f(V(G)) = \{1,2, \dots, p\}$ maka f disebut sebagai pelabelan sisi-ajaib super.

Graf hutan (*forest*) merupakan kumpulan dari graf pohon. Graf pohon (*tree*) didefenisikan sebagai graf terhubung berorde n yang tidak memuat lingkaran.

Pada tugas akhir ini, Penulis melakukan kajian pelabelan sisi ajaib super (*super edge magic labeling*) pada salah satu subkelas *forest* yang merupakan gabungan dari graf lintasan P_m dan graf bipartit lengkap $K_{1,n}$. Bentuk *forest* dengan gabungan graf lintasan dan graf bipartit lengkap ditulis $F \cong P_m \cup K_{1,n}$.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, masalah yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah apakah pada suatu *forest* $F \cong P_m \cup K_{1,n}$ memuat pelabelan sisi ajaib super.

1.3 Pembatasan Masalah

Dalam skripsi ini permasalahan dibatasi untuk menentukan pelabelan sisi ajaib super pada *forest* $F \cong P_m \cup K_{1,n}$ dengan $m \geq 4$ dan $n \geq 1$.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk memperlihatkan bahwa forest $F \cong P_m \cup K_{1,n}$, merupakan pelabelan sisi ajaib super.

1.2 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini secara keseluruhan disajikan dalam empat bab. Bab I pendahuluan didalamnya tercakup latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan skripsi ini. Konsep dasar dari teori graf berupa definisi dan terminologi graf, beberapa jenis graf, pelabelan, beberapa definisi, dan Lemma pendukung yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan skripsi ini disajikan pada Bab II sebagai landasan teori. Kemudian, pembahasan dari permasalahan tersebut akan diuraikan pada Bab III mengenai pelabelan sisi ajaib super pada *forest* $F \cong P_m \cup K_{1,n}$ dengan $m \geq 4$ dan $n \geq 1$. Penulisan skripsi ini diakhiri dengan bagian kesimpulan dan saran yang disajikan pada Bab IV.

BAB II

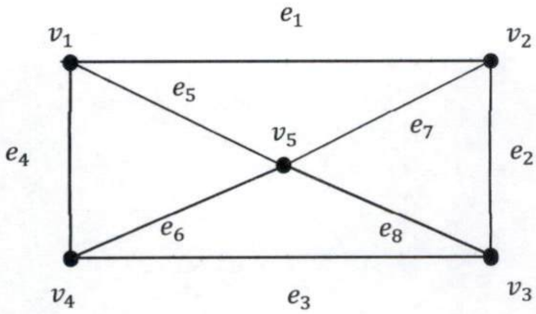
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diberikan beberapa defenisi dan konsep dasar dari teori graf, serta akan dijelaskan beberapa jenis pelabelan graf yang akan digunakan pada bab selanjutnya. Kajian diawali dengan pendefinisian graf dan terminologi, beberapa jenis graf, dan pelabelan.

2.1 Definisi dan Terminologi [3]

Graf G didefinisikan sebagai himpunan pasangan (V, E), ditulis dengan notasi $G = (V, E)$. V adalah himpunan (tidak kosong) dan E adalah himpunan pasangan tak terurut dari elemen-elemen V. Elemen-elemen dari V disebut titik dari G, sedangkan elemen-elemen dari E disebut sisi dari G. Himpunan titik dari G dinotasikan dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi dari G dinotasikan dengan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$.

Banyak titik yang ada pada graf G adalah $|V(G)|$, disebut **orde** dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$. Sedangkan banyak sisi pada graf G adalah $|E(G)|$, disebut **size** dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika banyak titik adalah v, banyak sisi adalah e maka dapat ditulis bahwa $|V(G)| = v$, $|E(G)| = e$.

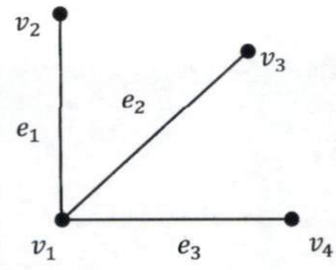


Gambar 2.1.1 Ilustrasi Sebuah Graf G

Dari Gambar 2.1.1 terlihat bahwa graf G tersebut mempunyai himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ dengan $|V(G)| = 5$ dan $|E(G)| = 8$.

Suatu sisi e disebut ***loop***, jika $e = vv$ untuk suatu v di V(G). Graf G disebut **graf sederhana** jika $E(G)$ tidak memuat *loop* maupun sisi berganda. Suatu graf G yang tidak sederhana disebut ***pseudograph***. Untuk selanjutnya, tanpa mengurangi perumuman,permasalahan dibatasi hanya pada graf sederhana.

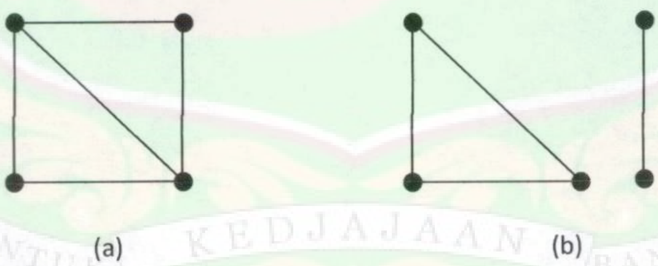
Derajat dari titik x di G adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik x, dinotasikan dengan $d(x)$. Jika $d(x) = 0$, maka x dikatakan **titik terisolasi**. **Derajat minimum** dari G, dinotasikan dengan $\delta(G)$, yaitu derajat terkecil dari titik-titik di G, sedangkan derajat terbesarnya disebut **derajat maksimum** dari G, dinotasikan dengan $\Delta(G)$.



Gambar 2.1.2 Sebuah Graf dengan orde dan ukurannya

Gambar 2.1.2 adalah sebuah graf yang mempunyai titik-titik v_1, v_2, v_3, dan v_4. dengan $d(v_1) = 3$ dan $d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = 1$. Dengan demikian, diperoleh $\delta(G) = 1$ dan $\Delta(G) = 3$.

Suatu graf G dikatakan **graf terhubung** (***connected graph***) jika untuk setiap pasang titik $u, v \in V(G)$ terdapat suatu lintasan yang menghubungkan u dan v. Jika tidak demikian, maka G adalah **graf tidak terhubung** (***disconnected graph***).



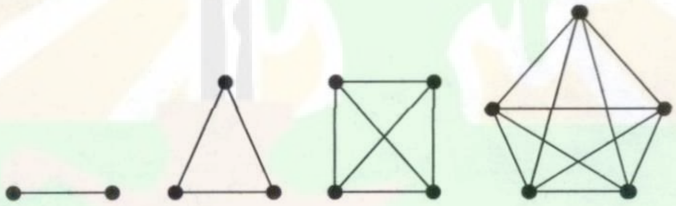
Gambar 2.1.3 (a) Graf Terhubung, (b) Graf Tidak Terhubung

2.2 Beberapa Jenis Graf

Graf lingkaran (*cycle*) adalah graf terhubung yang setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n titik dilambangkan dengan C_n. Gambar 2.2.1 merupakan gambar graf lingkaran C_n , dengan $3 \leq n \leq 6$.

Gambar 2. 2. 1 Graf Lingkaran C_n

Graf lengkap (*complete graph*) adalah graf sederhana yang setiap titiknya bertetangga ke semua titik lainnya. Graf lengkap dengan n titik dilambangkan dengan K_n. Setiap titik pada K_n berderajat $n-1$. Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah titik adalah $n(n-1)/2$.



Gambar 2. 2. 2 Graf Lengkap K_2, K_3, K_4, dan K_5

Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari lintasan tunggal dengan n titik yang memiliki *n-1* sisi. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n. Pada gambar 2.2.3 memperlihatkan graf lintasan dengan 2 titik dan 3 titik.

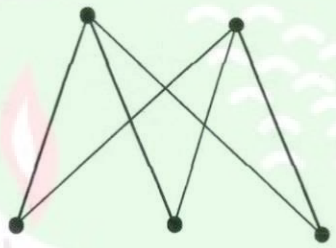
P_2 P_3

Gambar 2. 2. 3 Graf Lintasan P_2 dan P_3

Graf G dikatakan **bipartit** jika himpunan titik-titik $V(G)$ dapat dipisah menjadi dua himpunan $V_1(G)$ dan $V_2(G)$. Jika setiap pasang titik V_1 dan V_2 saling terhubung, maka graf tersebut dinamakan graf **bipartit lengkap**. Jika $|V_1| = m$ dan $|V_2| = n$ dengan m titik dan n titik. Graf bipartit lengkap dinotasikan dengan $K_{m,n}$.

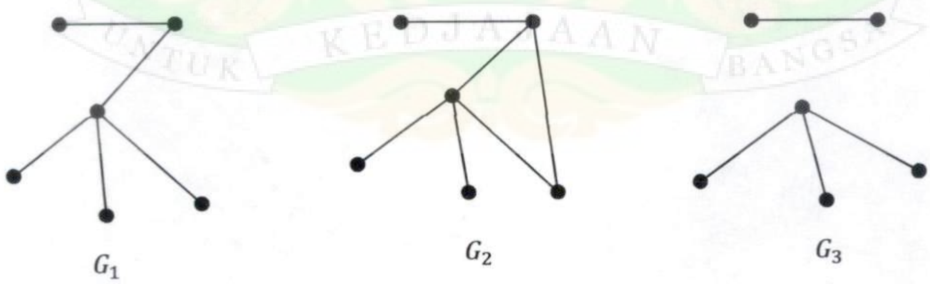
Gambar 2.2.4 berikut ini ilustrasi dari sebuah graf bipartit lengkap dengan $m = 2$ dan $n = 3$.

$G = K_{2,3}$



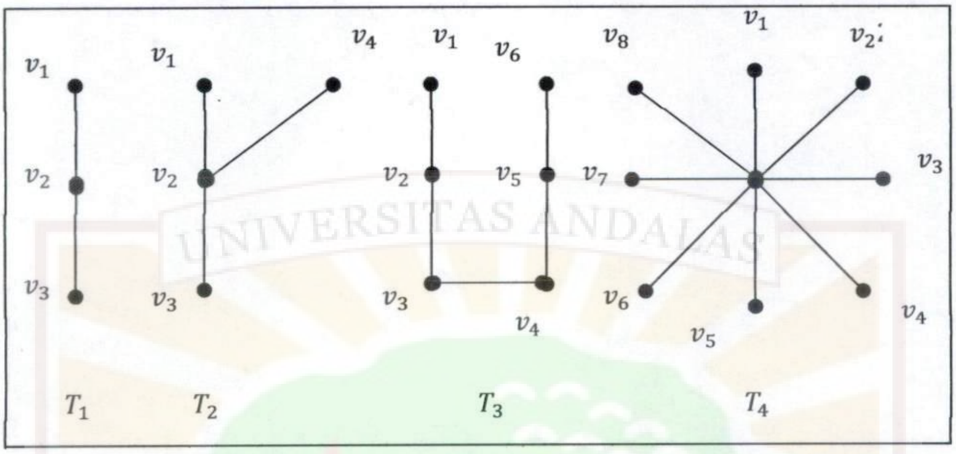
Gambar 2.2.4 Graf Bipartit Lengkap $K_{2,3}$

Graf hutan *(forest)* merupakan kumpulan dari graf pohon. **Graf pohon *(tree)*** didefenisikan sebagai graf terhubung berorde n yang tidak memuat lingkaran. Graf pohon dengan n titik dilambangkan dengan T_n.



Gambar 2.2.5 G_1 pohon, G_2 pohon dan G_3 bukan pohon

Kumpulan dari graf pohon (*tree*) ini dinamakan dengan graf hutan (*forest*). Berikut ini merupakan beberapa kumpulan tree.



Gambar 2.2.6 Graf *forest*

Pada gambar 2.2.6 terlihat beberapa graf tree dengan T_1, T_2, T_3, T_4. Sehingga $T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ merupakan **graf *forest*.**

2.3 Pelabelan [6]

Pelabelan Graf merupakan pemberian nilai (label) pada himpunan titik, himpunana sisi, dan himpunan titik dan sisi. Pelabelan merupakan pemetaan injektif yang memetakan unsur himpunan titik atau unsur himpunan sisi ke bilangan asli yang disebut label. Jika *domain* dari pemetaan adalah titik, maka pelabelan disebut **pelabelan titik** (*vertex labeling*). Jika *domainnya* adalah sisi, maka disebut **pelabelan sisi** (*edge labeling*), dan jika *domainnya* titik dan sisi, maka disebut **pelabelan total** (*total labeling*).

2.3.1 Pelabelan Sisi Ajaib Super

Misalkan G adalah suatu graf dengan himpunan titik V dan sisi E dengan banyaknya titik di G adalah p dan banyak sisi di G adalah q.

Definisi 2.3.1 [2]

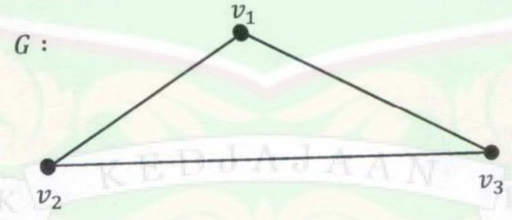
Pelabelan total sisi ajaib (edge-magic total labeling) pada graf G adalah fungsi bijektif f dari $V(G) \cup E(G)$ pada himpunan

$$\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$$

sehingga untuk sebarang sisi (uv) di G berlaku

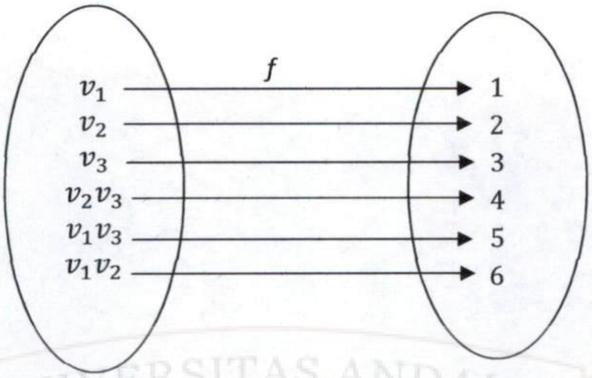
$f(u) + f(uv) + f(v) = k$ *, untuk suatu konstanta k. k disebut sebagai bilangan ajaib pada graf G.*

Sebagai contoh, perhatikan graf G berikut dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3\}$. ***Order*** G adalah $p = 3$ dan **size** G adalah $q = 3$. Akan ditunjukkan bahwa graf G adalah **total sisi ajaib.**



Gambar 2.3.1 Graf G

Misalkan $V(G) = \{1, 2, 3\}$ dan $E(G) = \{4, 5, 6\}$. Fungsi f dari $V(G) \cup E(G)$ adalah himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sebagai berikut:



Gambar 2. 3. 2 Fungsi dari himpunan titik, himpunan sisi dan banyaknya himpunan titik dan sisi

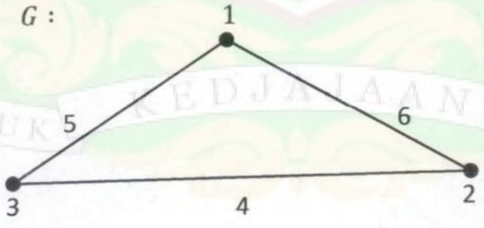
Diperoleh :

$$f(v_1) + f(v_1v_2) + f(v_2) = 1 + 6 + 2 = 9$$

$$f(v_1) + f(v_1v_3) + f(v_3) = 1 + 5 + 3 = 9$$

$$f(v_2) + f(v_2v_3) + f(v_3) = 2 + 4 + 3 = 9$$

Maka konstanta ajaib k = 9. Dengan demikian graf G memiliki pelabelan total sisi ajaib yang dapat digambarkan sebagai berikut :



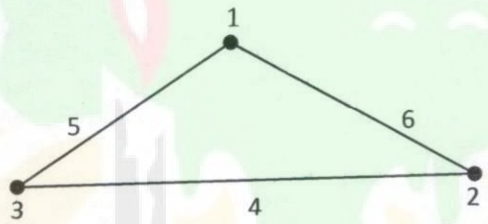
Gambar 2. 3. 3 Pelabelan Total Sisi Ajaib

Definisi 2. 3. 2 [7]

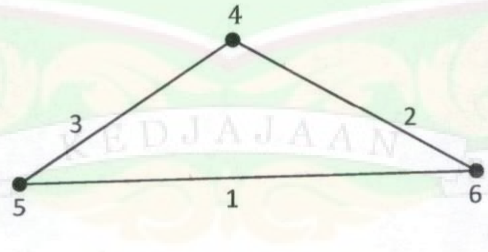
Pelabelan total sisi ajaib (edge magic total labeling) f pada graf G disebut pelabelan sisi ajaib super (super magic labeling) jika V(G) dipetakan ke himpunan {1, 2, ..., p}.

Pelabelan sisi ajaib super adalah suatu bentuk khusus dari pelabelan total sisi ajaib. Setiap pelabelan sisi ajaib super pasti merupakan pelabelan total sisi ajaib, tetapi tidak sebaliknya. Graf yang dapat dikenai pelabelan sisi ajaib super disebut graf sisi ajaib super.

Perhatikan graf G berikut :



Gambar 2. 3. 4 Pelabelan Sisi Ajaib Super



Gambar 2. 3. 5 Pelabelan Total Sisi Ajaib

Gambar 2.3.4 dan Gambar 2.3.5 di atas merupakan pelabelan total sisi ajaib. Meskipun demikian, pelabelan pada Gambar 2.3.4 disebut pelabelan sisi ajaib super, sedangkan pada Gambar 2.3.5 bukan pelabelan sisi ajaib super. Hal ini karena pada Gambar 2.3.4 himpunan titik dipetakan ke himpunan $\{1, 2, 3\}$, sedangkan pada Gambar 2.3.5 tidak memetakan ke himpunan $\{1, 2, 3\}$.

Lemma 2.3.3 [1]

Suatu graf G dengan p titik dan q sisi adalah sisi ajaib super jika dan hanya jika terdapat fungsi bijektif

$$f : V(G) \to \{1, 2, 3, \dots, p\}$$

sedemikian sehingga $S = \{f(u) + f(v) | uv \in E(G)\}$ *terdiri dari q bilangan bulat berturut-turut. Dalam kasus ini, f diperluas menjadi pelabelan sisi-ajaib super dari G dengan konstanta ajaib* $k = p + q + s$ *dimana* $s = min(S)$

$$S = \{k - (p + 1), k - (p + 2), \dots, k - (p + q)\}.$$

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Pelabelan Sisi Ajaib Super pada Graf Forest $F \cong P_m \cup K_{1,n}$

Bab ini menjelaskan hasil utama dari inti bahasan tugas akhir, yaitu bila diberikan graf lintasan dengan m titik P_m dan graf komplit bipartit dengan n titik $K_{1,n}$. Bentuk dari graf *forest* F merupakan gabungan dari graf P_m dan $K_{1,n}$ yaitu $F \cong P_m \cup K_{1,n}$. Selanjutnya akan disajikan hasil utama dalam bentuk teorema berikut.

Teorema 3.1 [1]

Untuk setiap dua bilangan bulat m dan n dengan $m \geq 4$ *dan* $n \geq 1$, *maka forest* $F \cong P_m \cup K_{1,n}$ *adalah sisi ajaib super.*

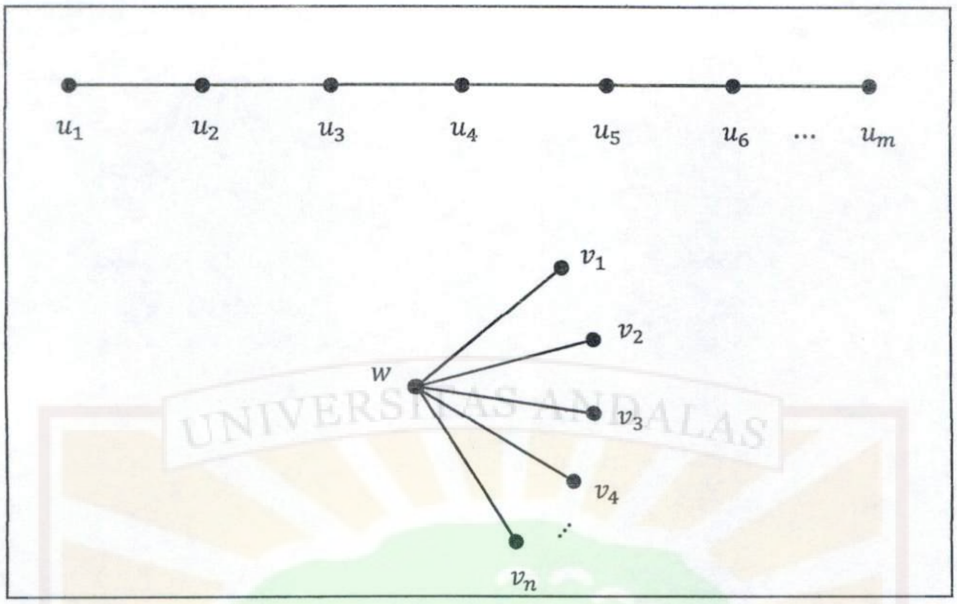
Bukti :

Misalkan himpunan titik dari *forest* F adalah

$$V(F) = \{u_i \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{v_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{w\}$$

dan himpunan sisi dari *forest* F adalah

$$E(F) = \{u_i u_{i+1} \mid 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{v_i w \mid 1 \leq i \leq n\}$$



Gambar 3.1.1 *Forest* $F \cong P_m \cup K_{1,n}$

Terdapat empat kasus untuk pelabelan titik $f: V(F) \rightarrow \{1,2, \dots, m+n+1\}$, yaitu:

Kasus 1: untuk $m \equiv 0 \ (mod\ 4)$ untuk suatu

Jika $m \equiv 0 \ (mod\ 4)$ berarti $m = 4a$ untuk suatu a bilangan bulat positif.. Kemudian definisikan fungsi f sebagai berikut :

$$f(u_j) = \begin{cases} \dfrac{m+2n+2}{2}, & \text{jika j} = 1; \\ \dfrac{m+2n+6}{2}, & \text{jika j} = 3; \\ n+2i\text{-}1, & \text{jika j} = 4i \text{ dan } 1 \le i \le \dfrac{m}{4}; \\ \dfrac{m+2n+4i+6}{2}, & \text{jika j} = 4i \text{ dan } 1 \le i \le \dfrac{m-4}{4}; \\ n+2i+2, & \text{jika j} = 4i+2 \text{ dan } 0 \le i \le \dfrac{m-4}{4}; \\ \dfrac{m+2n+4i+4}{2}, & \text{jika j} = 4i+3 \text{ dan } 1 \le i \le \dfrac{m-4}{4}; \end{cases}$$

$f(v_i) = i,$ jika $1 \le i \le n$; dan

$$f(w) = \frac{m + 2n + 4}{2}$$

Kasus 2: untuk $m \equiv 1 \ (mod\, 4)$

Jika $m \equiv 1 \ (mod\, 4)$ berarti, $m = 4a + 1$, untuk suatu a bilangan bulat positif.

Kemudian definisikan fungsi f sebagai berikut :

$$f(u_j) = \begin{cases} n + 2i + 1, & \text{jika } j = 4i \text{ dan } 1 \le i \le \frac{m-1}{4}; \\ \frac{m + 2n + 4i + 1}{2}, & \text{jika } j = 4i + 1 \text{ dan } 0 \le i \le \frac{m-1}{4}; \\ n + 2i + 2, & \text{jika } j = 4i + 2 \text{ dan } 0 \le i \le \frac{m-5}{4} \\ \frac{m + 2n + 4i + 7}{2}, & \text{jika } j = 4i + 3 \text{ dan } 0 \le i \le \frac{m-5}{4}; \end{cases}$$

$f(v_i) = i,$ jika $1 \le i \le n$; dan

$$f(w) = \frac{m + 2n + 3}{2}$$

Kasus 3: untuk $m \equiv 2 \ (mod\, 4)$

Jika $m \equiv 2 \ (mod\, 4)$ berarti $m = 4a + 2$, untuk suatu a bilangan bulat positif.

Kemudian definisikan fungsi f sebagai berikut :

$$f(u_j) = \begin{cases} m+n+1, & \text{jika } j=1; \\ m+n-1, & \text{jika } j=3; \\ \dfrac{m+2n-4i+2}{2}, & \text{jika } j=4i \text{ dan } 1 \le i \le \dfrac{m-2}{4}; \\ m+n-2i-1, & \text{jika } j=4i \text{ dan } 1 \le i \le \dfrac{m-2}{4}; \\ \dfrac{m+2n-4i-4}{2}, & \text{jika } j=4i+1 \text{ dan } 0 \le i \le \dfrac{m-6}{4}; \\ m+n-2i, & \text{jika } j=4i+2 \text{ dan } 1 \le i \le \dfrac{m-6}{4}; \\ m+n, & \text{jika } j=m; \end{cases}$$

$f(v_i) = i$, jika $1 \le i \le n$; dan

$$f(w) = \frac{m+2n+2}{2}$$

Kasus 4: untuk $m \equiv 3 \ (mod\ 4)$

Jika $m \equiv 3 \ (mod\ 4)$ berarti $m = 4a + 3$, untuk suatu a bilangan bulat positif.

Kemudian definisikan fungsi f sebagai berikut :

$$f(u_j) = \begin{cases} \dfrac{m+2n+1}{2}, & \text{jika } j=1; \\ \dfrac{m+2n+5}{2}, & \text{jika } j=3; \\ n+2i-1, & \text{jika } j=4i \text{ dan } 1 \le i \le \dfrac{m-3}{4}; \\ \dfrac{m+2n+4i+5}{2}, & \text{jika } j=4i+1 \text{ dan } 1 \le i \le \dfrac{m-3}{4}; \\ n+2i+2, & \text{jika } j=4i+2 \text{ dan } 1 \le i \le \dfrac{m-7}{4}; \\ \dfrac{m+2n+4i+3}{2}, & \text{jika } j=4i+3 \text{ dan } 1 \le i \le \dfrac{m-3}{4}; \\ \dfrac{m+2n-1}{2}, & \text{jika } j=m-1; \end{cases}$$

$f(v_i) = i,$ jika $1 \leq i \leq n$; dan

$$f(w) = \frac{m + 2n + 3}{2}$$

Pada graf *forest* $F \cong P_m \cup K_{1,n}$ terdapat $m + n + 1$ titik dan $m + n - 1$ sisi. Karena $f: V(F) \to \{1,2,\ldots,m + n + 1\}$ adalah fungsi bijektif, maka berdasarkan Lemma 2.5.1, fungsi f dapat diperluas menjadi pelabelan sisi ajaib super dengan valensi sebagai berikut

$$k = \begin{cases} \dfrac{5m}{2} + 3n + 2, & jika\ m \equiv 2\ (mod\ 4); \\ \left\lfloor \dfrac{m}{2} \right\rfloor + 2m + 3n + 3, & selainnya\ . \end{cases}$$

Untuk pelabelan sisi ajaib dari $F \cong P_m \cup K_{1,n}$ berlaku :

$$f(u) + f(v) + f(uv) = k$$

sehingga

$$f(u_i u_{i+1}) = k - [f(u_i) + f(u_{i+1})] \text{ dan } f(v_i w) = k - [f(v_i) + f(w)]$$

■

3.2 Beberapa Contoh Pelabelan Sisi Ajaib Super pada Graf *Forest* $F \cong P_m \cup K_{1,n}$

Contoh kasus 1

Diberikan *forest* $F \cong P_m \cup K_{1,n}$ dengan $m \equiv 0 \ (mod\ 4)$, untuk $m = 4$ dan $n = 1, 2, 3$. Selanjutnya akan ditentukan pelabelan sisi ajaib super dan konstanta ajaib dari graf $F \cong P_m \cup K_{1,n}$.

Akan ditinjau nilai dari m dan n, dengan $\boldsymbol{m = 4\ dan\ n = 1, 2, 3}$

(i) **Untuk $\boldsymbol{m = 4}$ dan $\boldsymbol{n = 1}$**

Misalkan $m = 4$ dan $n = 1$ maka $P_m = P_4$ dan $K_{1,n} = K_{1,1}$ dengan himpunan titik dari P_4 dan $K_{1,1}$ masing-masing adalah $V(P_4) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $V(K_{1,1}) = \{w, v_1\}$. Sedangkan himpunan sisi dari P_4 dan $K_{1,1}$ masing-masing adalah $E(P_4) = \{u_i u_{i+1}\}$ dengan $i = 1, 2, 3$ dan $E(K_{1,1}) = \{wv_1\}$.

Akibatnya, himpunan titik dan sisi dari graf $F \cong P_4 \cup K_{1,1}$ masing-masing adalah

$$V(F) = V(P_4 \cup K_{1,1})$$

$$= V(P_4) \cup V(K_{1,1})$$

$$= \{u_1, u_2, u_3, u_4, w, v_1\},$$

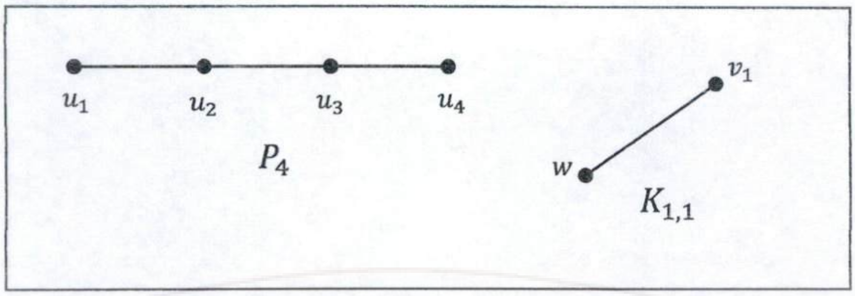
dan

$$E(F) = E(P_4 \cup K_{1,1})$$

$$= E(P_4) \cup E(K_{1,1})$$

$$= \{u_i u_{i+1} \mid i = 1, 2, 3\} \cup \{wv_1\}.$$

Sehingga graf $F \cong P_4 \cup K_{1,1}$ seperti pada Gambar 3.2.2



Gambar 3.2.2 *Forest* $F \cong P_4 \cup K_{1,1}$

pada graf $F \cong P_4 \cup K_{1,1}$ berlaku :

$|V(F)| = |V(P_4)| + |V(K_{1,1})| = 4 + 2 = 6$ yang merupakan hasil dari $m + n + 1$, untuk $m = 4$ dan $n = 1$, demikian juga

$|E(F)| = |E(P_4)| + |E(K_{1,1})| = 3 + 1 = 4$, yang merupakan hasil dari $m + n - 1, dengan\ m = 4\ dan\ n = 1.$

Akibatnya, pelabelan titik dari *forest* $F \cong P_4 \cup K_{1,1}$ pada kasus 1 di atas adalah :

$$f(u_1) = \frac{m + 2n + 2}{2} = \frac{4 + 2(1) + 2}{2} = 4$$

$$f(u_2) = n + 2i + 2 = 1 + 2(0) + 2 = 3$$

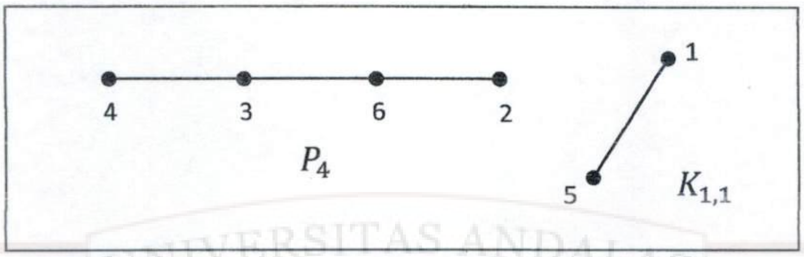
$$f(u_3) = \frac{m + 2n + 6}{2} = \frac{4 + 2(1) + 6}{2} = 6$$

$$f(u_4) = n + 2i - 1 = 1 + 2(1) - 1 = 2$$

$$f(v_1) = 1$$

$$f(w) = \frac{m + 2n + 4}{2} = \frac{4 + 2(1) + 4}{2} = 5$$

bila nilai-nilai pelabelan titik ini dimasukkan ke dalam graf $F \cong P_4 \cup K_{1,1}$, dapat diperoleh graf dengan pelabelan titik, seperti Gambar 3.2.3



Gambar 3.2.3 Pelabelan titik untuk *forest* $F \cong P_4 \cup K_{1,1}$.

Dari pelabelan tersebut terlihat bahwa terdapat pemetaan bijektif f dari *V(F)* ke $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Selanjutnya akan dicari nilai valensi dari graf $F \cong P_4 \cup K_{1,1}$. Karena $m = 4$ dimana $4 \equiv 0 \ (mod\ 4) \not\equiv 2 \ (mod\ 4)$, maka nilai valensi dari graf $F \cong P_4 \cup K_{1,1}$ adalah :

$$k = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2m + 3n + 3 = \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor + 2(4) + 3(1) + 3 = 16$$

dengan demikian pelabelan titik di atas, berdasarkan Lemma 2.3.3 dapat diperluas menjadi pelabelan sisi dari *forest* $F \cong P_4 \cup K_{1,1}$, yaitu :

$$f(u_i u_{i+1}) = k - [f(u_i) + f(u_{i+1})] \ \text{ dan } \ f(v_i w) = k - [f(v_i) + f(w)]$$

selanjutnya diperoleh label dari masing-masing sisi di atas adalah :

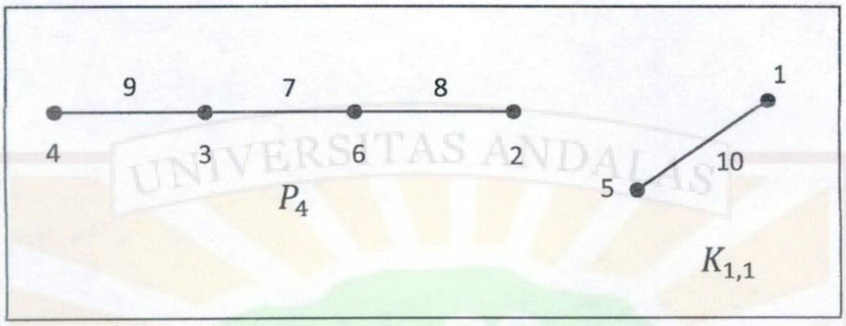
$$f(u_1 u_2) = k - [f(u_1) + f(u_2)] = 16 - [4 + 3] = 9$$

$$f(u_2 u_3) = k - [f(u_2) + f(u_3)] = 16 - [3 + 6] = 7$$

$$f(u_3 u_4) = k - [f(u_3) + f(u_4)] = 16 - [6 + 2] = 8$$

$$f(v_1w) = k - [f(v_1) + f(w)] = 16 - [1 + 5] = 10$$

bila nilai-nilai pelabelan sisi ini dimasukkan ke dalam graf $F \cong P_4 \cup K_{1,1}$, diperoleh graf dengan pelabelan titik dan sisi, seperti Gambar 3.2.4



Gambar 3.2.4 Pelabelan sisi ajaib super untuk *forest* $F \cong P_4 \cup K_{1,1}$.

Pada Gambar 3.2.4, terlihat bahwa pelabelan di atas merupakan pelabelan sisi ajaib super, karena untuk setiap u, v titik di $F \cong P_4 \cup K_{1,1}$ dan uv sisi maka $f(u) + f(v) + f(uv) = 16$. Ini berarti konstanta ajaib dari graf $F \cong P_4 \cup K_{1,1}$ adalah 16.

(ii) Untuk $m = 4$ dan $n = 2$

Misalkan $m = 4$ dan $n = 2$ maka $P_m = P_4$ dan $K_{1,n} = K_{1,2}$ dengan himpunan titik dari P_4 dan $K_{1,2}$ masing-masing adalah $V(P_4) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $V(K_{1,2}) = \{w, v_1, v_2\}$. Sedangkan himpunan sisi dari P_4 dan $K_{1,2}$ masing-masing adalah $E(P_4) = \{u_iu_{i+1}\}$ dengan $i = 1, 2, 3$ dan $E(K_{1,2}) = \{wv_1, wv_2\}$.

Akibatnya, himpunan titik dan sisi dari graf $F \cong P_4 \cup K_{1,2}$ masing-masing adalah

$$\begin{aligned} V(F) &= V(P_4 \cup K_{1,2}) \\ &= V(P_4) \cup V(K_{1,2}) \\ &= \{u_1, u_2, u_3, u_4, w, v_1, v_2\}, \end{aligned}$$

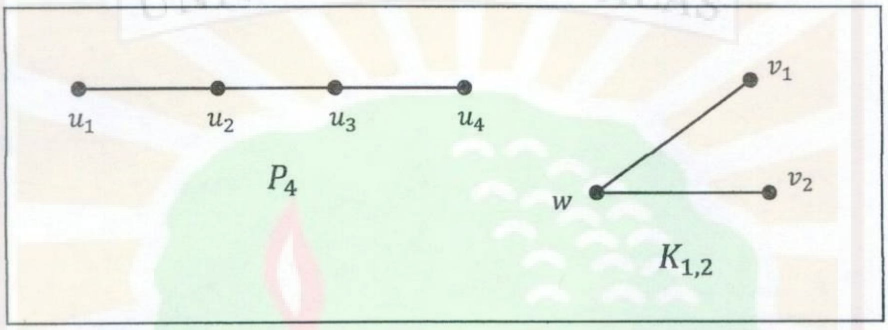
dan

$$E(F) = E(P_4 \cup K_{1,2})$$

$$= E(P_4) \cup E(K_{1,2})$$

$$= \{u_i u_{i+1} \mid i = 1, 2, 3\} \cup \{wv_1, wv_2\}.$$

Sehingga graf $F \cong P_4 \cup K_{1,2}$ seperti Gambar 3.2.5



Gambar 3.2.5 *Forest* $F \cong P_4 \cup K_{1,2}$

pada graf $F \cong P_4 \cup K_{1,2}$ berlaku :

$|V(F)| = |V(P_4)| + |V(K_{1,2})| = 4 + 3 = 7$, yang merupakan hasil dari $m + n + 1$, untuk $m = 4$ dan $n = 2$, demikian juga

$|E(F)| = |E(P_4)| + |E(K_{1,2})| = 3 + 2 = 5$, yang merupakan hasil dari $m + n - 1, dengan\ m = 4\ dan\ n = 2.$

Akibatnya, pelabelan titik dari *forest* $F \cong P_4 \cup K_{1,2}$ pada kasus 1 di atas adalah :

$$f(u_1) = \frac{m + 2n + 2}{2} = \frac{4 + 2(2) + 2}{2} = 5$$

$$f(u_2) = n + 2i + 2 = 2 + 2(0) + 2 = 4$$

$$f(u_3) = \frac{m+2n+6}{2} = \frac{4+2(2)+6}{2} = 7$$

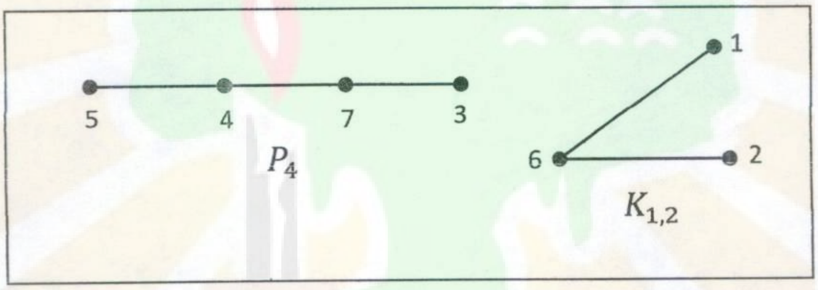
$$f(u_4) = n + 2i - 1 = 2 + 2(1) - 1 = 3$$

$$f(v_1) = 1$$

$$f(v_2) = 2$$

$$f(w) = \frac{m+2n+4}{2} = \frac{4+2(2)+4}{2} = 6$$

bila nilai-nilai pelabelan titik ini dimasukkan ke dalam graf $F \cong P_4 \cup K_{1,2}$, dapat diperoleh graf dengan pelabelan titik, seperti Gambar 3.2.6



Gambar 3.2.6 Pelabelan titik untuk *forest* $F \cong P_4 \cup K_{1,2}$.

Dari pelabelan tersebut terlihat bahwa terdapat pemetaan bijektif f dari *V(F)* ke $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Selanjutnya akan dicari nilai valensi dari graf ini. Karena $m = 4$ dimana $4 \equiv 0 \ (mod\ 4) \not\equiv 2 \ (mod\ 4)$, maka nilai valensi dari graf $F \cong P_4 \cup K_{1,2}$ adalah :

$$k = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2m + 3n + 3 = \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor + 2(4) + 3(2) + 3 = 19$$

dengan demikian pelabelan titik di atas, berdasarkan Lemma 2.3.3 dapat diperluas menjadi pelabelan sisi dari *forest* $F \cong P_4 \cup K_{1,2}$, yaitu :

$$f(u_i u_{i+1}) = k - [f(u_i) + f(u_{i+1})] \text{ dan } f(v_i w) = k - [f(v_i) + f(w)]$$

selanjutnya diperoleh label dari masing-masing sisi di atas adalah

$$f(u_1 u_2) = k - [f(u_1) + f(u_2)] = 19 - [5 + 4] = 10$$

$$f(u_2 u_3) = k - [f(u_2) + f(u_3)] = 19 - [4 + 7] = 8$$

$$f(u_3 u_4) = k - [f(u_3) + f(u_4)] = 19 - [7 + 3] = 9$$

$$f(v_1 w) = k - [f(v_1) + f(w)] = 19 - [1 + 6] = 12$$

$$f(v_2 w) = k - [f(v_2) + f(w)] = 19 - [2 + 6] = 11$$

bila nilai-nilai pelabelan sisi ini dimasukkan ke dalam graf $F \cong P_4 \cup K_{1,2}$, diperoleh graf dengan pelabelan titik dan sisi, seperti Gambar 3.2.7

Gambar 3.2.7 Pelabelan sisi ajaib super untuk *forest* $F \cong P_4 \cup K_{1,2}$.

Pada Gambar 3.2.7, terlihat bahwa pelabelan di atas merupakan pelabelan sisi ajaib super, karena untuk setiap u, v titik di $F \cong P_4 \cup K_{1,2}$ dan uv sisi maka $f(u) + f(v) + f(uv) = 19$. Ini berarti konstanta ajaib dari graf $F \cong P_4 \cup K_{1,2}$ adalah 19.

(iii) Untuk $m = 4$ dan $n = 3$

Misalkan $m = 4$ dan $n = 3$ maka $P_m = P_4$ dan $K_{1,n} = K_{1,3}$ dengan himpunan titik dari P_4 dan $K_{1,3}$ masing-masing adalah $V(P_4) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $V(K_{1,3}) = \{w, v_1, v_2, v_3\}$. Sedangkan himpunan sisi dari P_4 dan $K_{1,3}$ masing-masing adalah $E(P_4) = \{u_i u_{i+1}\}$ dengan $i = 1, 2, 3$ dan $E(K_{1,3}) = \{wv_1, wv_2, wv_3\}$.

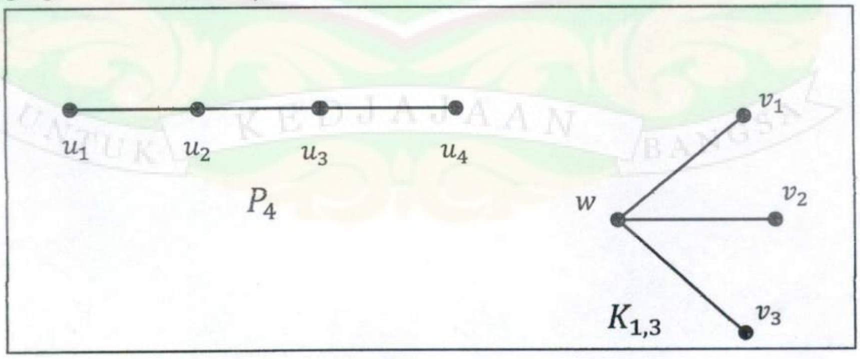
Akibatnya, himpunan titik dan sisi dari graf $F \cong P_4 \cup K_{1,3}$ masing-masing adalah

$$\begin{aligned} V(F) &= V(P_4 \cup K_{1,3}) \\ &= V(P_4) \cup V(K_{1,3}) \\ &= \{u_1, u_2, u_3, u_4, w, v_1, v_2, v_3\}, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} E(F) &= E(P_4 \cup K_{1,3}) \\ &= E(P_4) \cup E(K_{1,3}) \\ &= \{u_i u_{i+1} \mid i = 1, 2, 3\} \cup \{wv_1, wv_2, wv_3\}. \end{aligned}$$

Sehingga graf $F \cong P_4 \cup K_{1,3}$ seperti Gambar 3.2.8



Gambar 3.2.8 *Forest* $F \cong P_4 \cup K_{1,3}$

pada graf $F \cong P_4 \cup K_{1,3}$ berlaku :

$|V(F)| = |V(P_4)| + |V(K_{1,3})| = 4 + 4 = 8$, yang merupakan hasil dari $m + n + 1$, untuk $m = 4$ dan $n = 3$, demikian juga

$|E(F)| = |E(P_4)| + |E(K_{1,2})| = 3 + 3 = 6$, yang merupakan hasil dari $m + n - 1$, untuk $m = 4$ dan $n = 3$.

Akibatnya, pelabelan titik dari *forest* $F \cong P_4 \cup K_{1,3}$ pada kasus 1 di atas adalah :

$$f(u_1) = \frac{m + 2n + 2}{2} = \frac{4 + 2(3) + 2}{2} = 6$$

$$f(u_2) = n + 2i + 2 = 3 + 2(0) + 2 = 5$$

$$f(u_3) = \frac{m + 2n + 6}{2} = \frac{4 + 2(3) + 6}{2} = 8$$

$$f(u_4) = n + 2i - 1 = 3 + 2(1) - 1 = 4$$

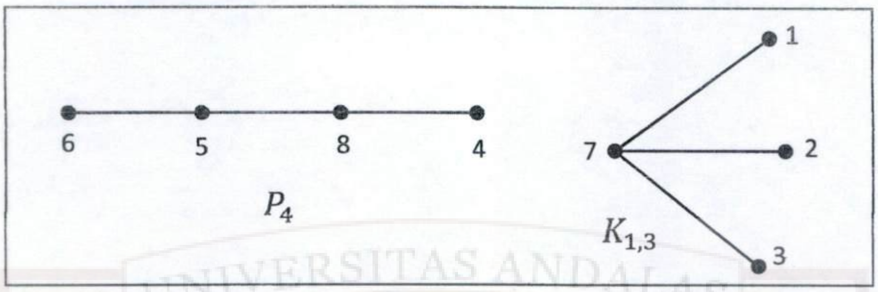
$$f(v_1) = 1$$

$$f(v_2) = 2$$

$$f(v_3) = 3$$

$$f(w) = \frac{m + 2n + 4}{2} = \frac{4 + 2(3) + 4}{2} = 7$$

bila nilai-nilai pelabelan titik ini dimasukkan ke dalam graf $F \cong P_4 \cup K_{1,3}$ diperoleh graf dengan pelabelan titik, seperti gambar 3.2.9



Gambar 3.2.9 Pelabelan titik untuk *forest* $F \cong P_4 \cup K_{1,3}$.

Dari pelabelan tersebut terlihat bahwa adanya pemetaan bijektif f dari $V(F)$ ke $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

Selanjutnya akan dicari nilai valensi dari graf $F \cong P_4 \cup K_{1,3}$. Karena $m = 4$ dimana $4 \equiv 0 \ (mod\ 4) \not\equiv 2 \ (mod\ 4)$, maka nilai valensi dari graf $F \cong P_4 \cup K_{1,3}$ adalah :

$$k = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2m + 3n + 3 = \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor + 2(4) + 3(3) + 3 = 22$$

dengan demikian pelabelan titik di atas, berdasarkan Lemma 2.3.3 dapat diperluas menjadi pelabelan sisi dari *forest* $F \cong P_4 \cup K_{1,3}$, yaitu :

$$f(u_i u_{i+1}) = k - [f(u_i) + f(u_{i+1})] \text{ dan } f(v_i w) = k - [f(v_i) + f(w)]$$

selanjutnya diperoleh label dari masing-masing sisi di atas adalah

$$f(u_1 u_2) = k - [f(u_1) + f(u_2)] = 22 - [6 + 5] = 11$$

$$f(u_2 u_3) = k - [f(u_2) + f(u_3)] = 22 - [5 + 8] = 9$$

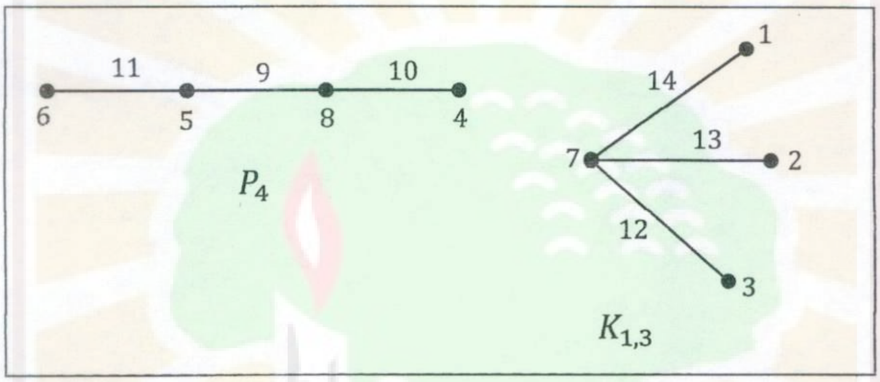
$$f(u_3 u_4) = k - [f(u_3) + f(u_4)] = 22 - [8 + 4] = 10$$

$$f(v_1w) = k - [f(v_1) + f(w)] = 22 - [1 + 7] = 14$$

$$f(v_2w) = k - [f(v_2) + f(w)] = 22 - [2 + 7] = 13$$

$$f(v_3w) = k - [f(v_2) + f(w)] = 22 - [3 + 7] = 12$$

bila nilai-nilai pelabelan sisi ini dimasukkan ke dalam graf $F \cong P_4 \cup K_{1,3}$ diperoleh graf dengan pelabelan titik dan sisi, seperti Gambar 3.2.10



Gambar 3.2.10 Pelabelan sisi ajaib super untuk *forest* $F \cong P_4 \cup K_{1,3}$.

Pada Gambar 3.2.10, terlihat bahwa pelabelan di atas merupakan pelabelan sisi ajaib super, karena untuk setiap u, v titik di $F \cong P_4 \cup K_{1,3}$ dan uv sisi maka $f(u) + f(v) + f(uv) = 22$. Ini berarti konstanta ajaib dari graf $F \cong P_4 \cup K_{1,3}$ adalah 22.

Contoh kasus 2

Diberikan *forest* $F \cong P_m \cup K_{1,n}$ dengan $m \equiv 1\ (mod\ 4)$, untuk $m = 5$ dan $n = 1, 2, 3$. Selanjutnya akan ditentukan pelabelan sisi ajaib super dan konstanta ajaib dari graf $F \cong P_m \cup K_{1,n}$.

Akan ditinjau nilai dari m dan n, dengan $\boldsymbol{m = 5}$ $\boldsymbol{dan}$ $\boldsymbol{n = 1, 2, 3}$

(i) **Untuk $\boldsymbol{m = 5}$ dan $\boldsymbol{n = 1}$**

Misalkan $m = 5$ dan $n = 1$ maka $P_m = P_5$ dan $K_{1,n} = K_{1,1}$ dengan himpunan titik dari P_5 dan $K_{1,1}$ masing-masing adalah $V(P_5) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ dan $V(K_{1,1}) = \{w, v_1\}$. Sedangkan himpunan sisi dari P_5 dan $K_{1,1}$ masing-masing adalah $E(P_5) = \{u_i u_{i+1}\}$, dengan $i = 1, 2, 3, 4$. Dan $E(K_{1,1}) = \{wv_1\}$.

Akibatnya, himpunan titik dan sisi dari graf $F \cong P_5 \cup K_{1,1}$ masing-masing adalah

$$V(F) = V(P_5 \cup K_{1,1})$$

$$= V(P_5) \cup V(K_{1,1})$$

$$= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, w, v_1\},$$

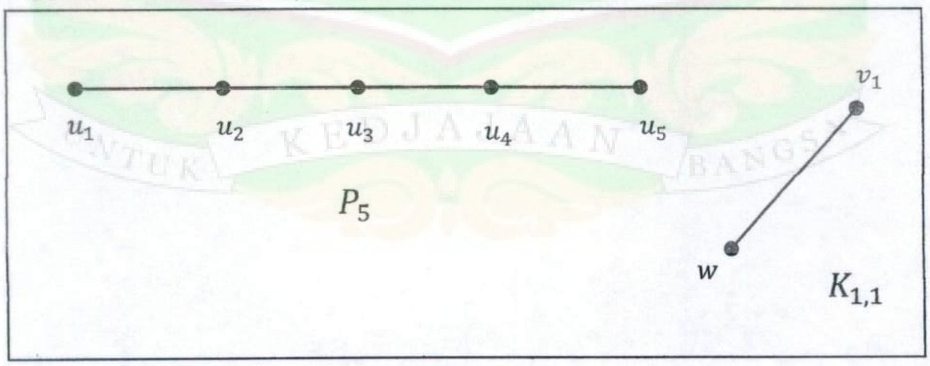
dan

$$E(F) = E(P_5 \cup K_{1,1})$$

$$= E(P_5) \cup E(K_{1,1})$$

$$= \{u_i u_{i+1} \mid i = 1, 2, 3, 4\} \cup \{wv_1\}.$$

Sehingga graf $F \cong P_5 \cup K_{1,1}$ seperti pada Gambar 3.2.11



Gambar 3.2.11 *Forest* $F \cong P_5 \cup K_{1,1}$.

pada graf $F \cong P_5 \cup K_{1,1}$ berlaku :

$|V(F)| = |V(P_5)| + |V(K_{1,1})| = 5 + 2 = 7$, yang merupakan hasil dari $m + n + 1$, untuk $m = 5$ dan $n = 1$, sedemikian juga

$|E(F)| = |E(P_5)| + |E(K_{1,1})| = 4 + 1 = 5$, yang merupakan hasil dari $m + n - 1$, untuk $m = 5$ dan $n = 1$.

Akibatnya, pelabelan titik dari *forest* $F \cong P_5 \cup K_{1,1}$ pada kasus 2 di atas adalah :

$$f(u_1) = \frac{m + 2n + 4i + 1}{2} = \frac{5 + 2(1) + 4(0) + 1}{2} = 4$$

$$f(u_2) = n + 2i + 2 = 1 + 2(0) + 2 = 3$$

$$f(u_3) = \frac{m + 2n + 4i + 7}{2} = \frac{5 + 2(1) + 4(0) + 7}{2} = 7$$

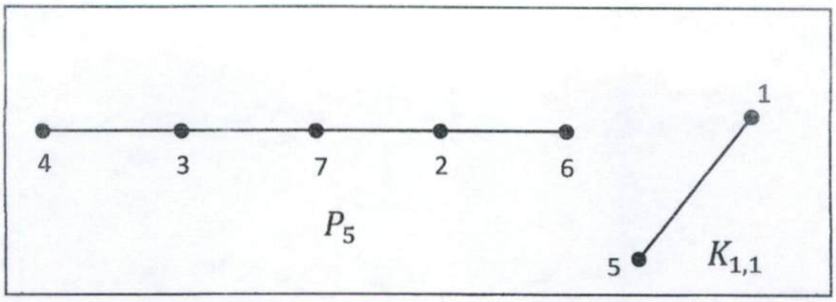
$$f(4) = n + 2i - 1 = 1 + 2(1) - 1 = 2$$

$$f(u_5) = \frac{m + 2n + 4i + 1}{2} = \frac{5 + 2(1) + 4(1) + 1}{2} = 6$$

$$f(v_1) = 1$$

$$f(w) = \frac{m + 2n + 3}{2} = \frac{5 + 2(1) + 3}{2} = 5$$

bila nilai-nilai pelabelan titik ini dimasukkan ke dalam graf $F \cong P_5 \cup K_{1,1}$, dapat di peroleh graf dengan pelabelan titik, seperti Gambar 3.2.12



Gambar 3.2.12 Pelabelan titik untuk *forest* $F \cong P_5 \cup K_{1,1}$.

Dari pelabelan tersebut terlihat bahwa terdapat pemetaan bijektif f dari *V(F)* ke $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Selanjutnya akan dicari nilai valensi dari graf ini. Karena $m = 5$ dimana $5 \equiv 0\ (mod\ 4) \not\equiv 2\ (mod\ 4)$, maka nilai valensi dari graf $F \cong P_5 \cup K_{1,1}$ adalah

$$k = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2m + 3n + 3 = \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor + 2(5) + 3(1) + 3 = 18\ .$$

dengan demikian pelabelan titik di atas, berdasarkan Lemma 2.3.3 dapat diperluas menjadi pelabelan sisi dari *forest* $F \cong P_5 \cup K_{1,1}$, yaitu :

$$f(u_i u_{i+1}) = k - [f(u_i) + f(u_{i+1})] \text{ dan } f(v_i w) = k - [f(v_i) + f(w)]$$

Selanjutnya diperoleh label dari masing-masing sisi di atas adalah :

$$f(u_1 u_2) = k - [f(u_1) + f(u_2)] = 18 - [4 + 3] = 11$$

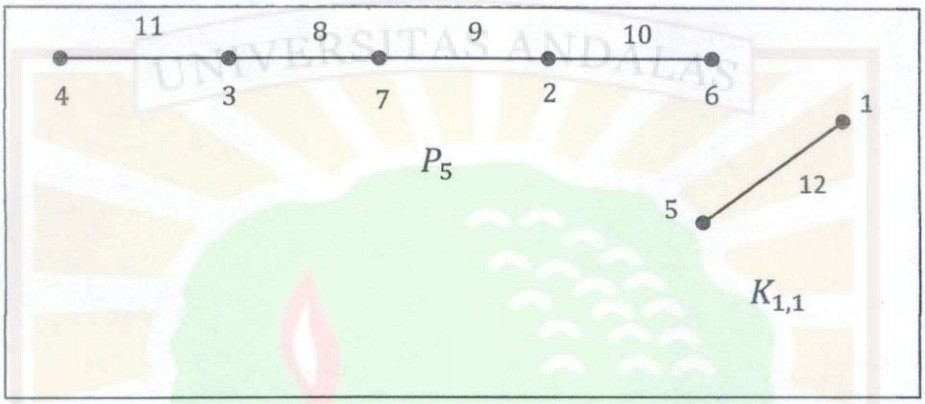
$$f(u_2 u_3) = k - [f(u_2) + f(u_3)] = 18 - [3 + 7] = 8$$

$$f(u_3 u_4) = k - [f(u_3) + f(u_4)] = 18 - [7 + 2] = 9$$

$$f(u_4 u_5) = k - [f(u_4) + f(u_5)] = 18 - [2 + 6] = 10$$

$$f(v_1w) = k - [f(v_1) + f(w)] = 18 - [1 + 5] = 12$$

bila nilai-nilai pelabelan sisi ini dimasukkan ke dalam graf $F \cong P_5 \cup K_{1,1}$, diperoleh graf dengan pelabelan titik dan sisi, seperti Gambar 3.2.13.



Gambar 3.2.13 Pelabelan sisi ajaib super untuk *forest* $F \cong P_5 \cup K_{1,1}$.

Pada Gambar 3.2.13, terlihat bahwa pelabelan di atas merupakan pelabelan sisi ajaib super, karena untuk setiap u, v titik di $F \cong P_5 \cup K_{1,1}$ dan uv sisi maka $f(u) + f(v) + f(uv) = 18$. Ini berarti konstanta ajaib dari graf $F \cong P_5 \cup K_{1,1}$ adalah 18.

(ii) Untuk $m = 5$ dan $n = 2$

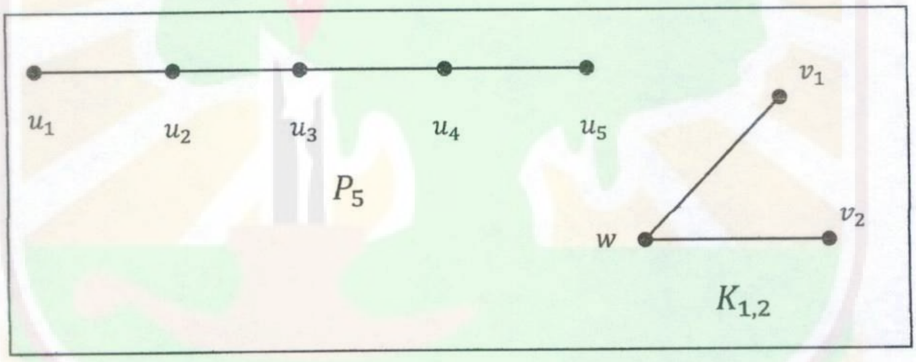
Misalkan $m = 5$ dan $n = 2$ maka $P_m = P_5$ dan $K_{1,n} = K_{1,2}$ dengan himpunan titik dari P_5 dan $K_{1,2}$ masing-masing adalah $V(P_5) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ dan $V(K_{1,2}) = \{w, v_1, v_2\}$. Sedangkan himpunan sisi dari P_5 dan $K_{1,2}$ masing-masing adalah $E(P_5) = \{u_iu_{i+1}\}$ dengan $i = 1, 2, 3, 4$ dan $E(K_{1,2}) = \{wv_1, wv_2\}$. Akibatnya, hinpunan titik dan sisi dari graf $F \cong P_5 \cup K_{1,2}$ masing-masing adalah

$$
\begin{aligned}
V(F) &= V(P_5 \cup K_{1,2}) \\
&= V(P_5) \cup V(K_{1,2}) \\
&= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, w, v_1, v_2\},
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
E(F) &= E(P_5 \cup K_{1,2}) \\
&= E(P_5) \cup E(K_{1,2}) \\
&= \{u_i u_{i+1} \mid i = 1, 2, 3, 4\} \cup \{wv_1, wv_2\}.
\end{aligned}
$$

Sehingga graf $F \cong P_5 \cup K_{1,2}$ seperti pada Gambar 3.2.14



Gambar 3.2.14 *Forest* $F \cong P_5 \cup K_{1,2}$

pada graf $F \cong P_5 \cup K_{1,2}$ berlaku :

$|V(F)| = |V(P_5)| + |V(K_{1,2})| = 5 + 3 = 8$, yang merupakan hasil dari $m + n + 1$, untuk $m = 5$ dan $n = 2$, demikian juga

$|E(F)| = |E(P_5)| + |E(K_{1,2})| = 4 + 2 = 6$, yang merupakan hasil dari $m + n - 1$, untuk $m = 5$ dan $n = 2$.

Akibatnya, pelabelan titik dari *forest* $F \cong P_5 \cup K_{1,2}$ pada kasus 2 di atas adalah

$$f(u_1) = \frac{m + 2n + 4i + 1}{2} = \frac{5 + 2(2) + 4(0) + 1}{2} = 5$$

$$f(u_2) = n + 2i + 2 = 2 + 2(0) + 2 = 4$$

$$f(u_3) = \frac{m + 2n + 4i + 7}{2} = \frac{5 + 2(2) + 4(0) + 7}{2} = 8$$

$$f(4) = n + 2i - 1 = 2 + 2(1) - 1 = 3$$

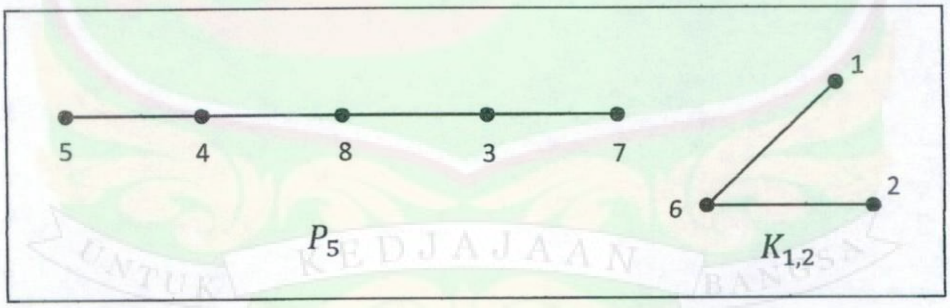
$$f(u_5) = \frac{m + 2n + 4i + 1}{2} = \frac{5 + 2(2) + 4(1) + 1}{2} = 7$$

$$f(v_1) = 1$$

$$f(v_2) = 2$$

$$f(w) = \frac{m + 2n + 3}{2} = \frac{5 + 2(2) + 3}{2} = 6$$

bila nilai-nilai pelabelan titik ini dimasukkan ke dalam graf $F \cong P_5 \cup K_{1,2}$, dapat diperoleh graf dengan pelabelan titik, seperti Gambar 3.2.15



Gambar 3.2.15 Pelabelan titik untuk *forest* $F \cong P_5 \cup K_{1,2}$.

Dari pelabelan tersebut terlihat bahwa adanya pemetaan bijektif f dari $V(F)$ ke $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Selanjutnya akan dicari nilai valensi dari graf ini. Karena $m = 5$ dimana $5 \equiv 0\ (mod\ 4) \not\equiv 2\ (mod\ 4)$, maka nilai valensi dari graf $F \cong P_5 \cup K_{1,2}$ adalah

$$k = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2m + 3n + 3 = \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor + 2(5) + 3(2) + 3 = 21$$

dengan demikian pelabelan titik di atas, berdasarkan Lemma 2.3.3 dapat diperluas menjadi pelabelan sisi dari *forest* $F \cong P_5 \cup K_{1,2}$, yaitu :

$$f(u_i u_{i+1}) = k - [f(u_i) + f(u_{i+1})] \text{ dan } f(v_i w) = k - [f(v_i) + f(w)]$$

sehingga diperoleh diperoleh label dari masing-masing sisi di atas adalah :

$$f(u_1u_2) = k - [f(u_1) + f(u_2)] = 21 - [5 + 4] = 12$$

$$f(u_2u_3) = k - [f(u_2) + f(u_3)] = 21 - [4 + 8] = 9$$

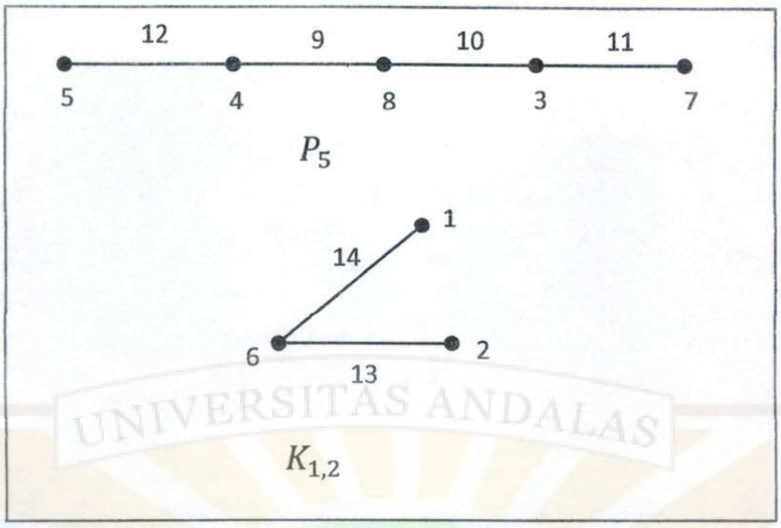
$$f(u_3u_4) = k - [f(u_3) + f(u_4)] = 21 - [8 + 3] = 10$$

$$f(u_4u_5) = k - [f(u_4) + f(u_5)] = 21 - [3 + 7] = 11$$

$$f(v_1w) = k - [f(v_1) + f(w)] = 21 - [1 + 6] = 14$$

$$f(v_2w) = k - [f(v_2) + f(w)] = 21 - [2 + 6] = 13$$

bila nilai-nilai pelabelan sisi ini dimasukkan ke dalam graf $F \cong P_5 \cup K_{1,2}$, diperoleh graf dengan pelabelan titik dan sisi, seperti Gambar 3.2.16.



Gambar 3.1.16 Pelabelan sisi ajaib super untuk *forest* $F \cong P_5 \cup K_{1,2}$.

Pada Gambar 3.1.25, terlihat bahwa pelabelan di atas merupakan pelabelan sisi ajaib super, karena untuk setiap u, v titik di $F \cong P_5 \cup K_{1,2}$ dan uv sisi maka $f(u) + f(v) + f(uv) = 21$. Ini berarti konstanta ajaib dari graf $F \cong P_5 \cup K_{1,2}$ adalah 21.

(iii) Untuk $m = 5$ dan $n = 3$

Misalkan $m = 5$ dan $n = 3$ maka $P_m = P_5$ dan $K_{1,n} = K_{1,3}$ dengan himpunan titik dari P_5 dan $K_{1.3}$ masing-masing adalah $V(P_5) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ dan $V(K_{1,3}) = \{w, v_1, v_2, v_3\}$. Sedangkan himpunan sisi dari P_5 dan $K_{1,3}$ masing-masing adalah $E(P_5) = \{u_i u_{i+1}\}$ dengan $i = 1, 2, 3, 4$ dan $E(K_{1,3}) = \{wv_1, wv_2, wv_3\}$.

Akibatnya, himpunan titik dan sisi dari graf $F \cong P_5 \cup K_{1,3}$ masing-masing adalah

$$V(F) = V(P_5 \cup K_{1,3})$$

$$= V(P_5) \cup V(K_{1,3})$$

$$= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, w, v_1, v_2, v_3\},$$

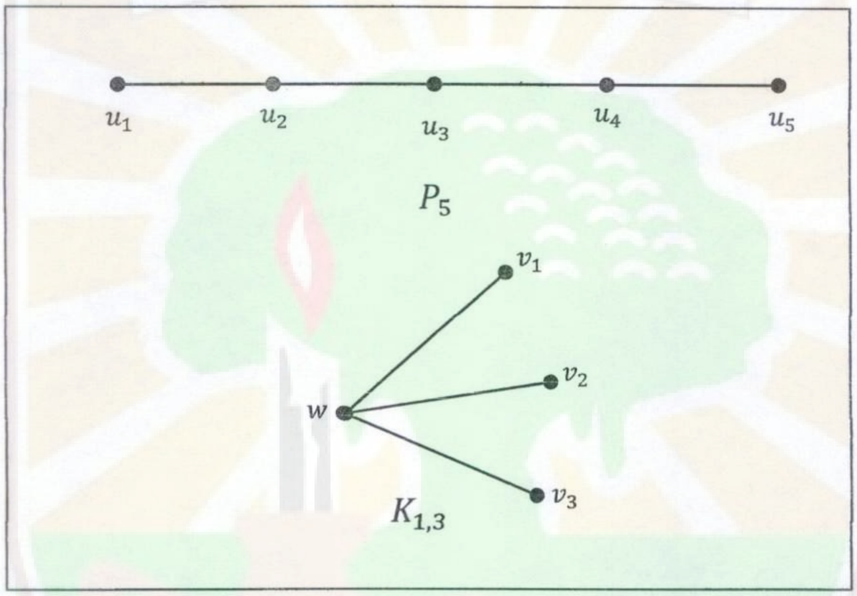
dan

$$E(F) = E(P_5 \cup K_{1,3})$$

$$= E(P_5) \cup E(K_{1,3})$$

$$= \{u_i u_{i+1} \mid i = 1,2,3,4\} \cup \{wv_1, wv_2, wv_3\}.$$

Sehingga graf $F \cong P_5 \cup K_{1,3}$ seperti pada Gambar 3.2.17



Gambar 3.2.17 *Forest* $F \cong P_5 \cup K_{1,3}$

pada graf $F \cong P_5 \cup K_{1,3}$ berlaku :

$|V(F)| = |V(P_5)| + |V(K_{1,3})| = 5 + 4 = 9$, yang merupakan hasil dari $m + n + 1$, untuk $m = 5$ dan $n = 3$, demikian juga

$|E(F)| = |E(P_5)| + |E(K_{1,3})| = 4 + 3 = 7$, yang merupakan hasil dari $m + n - 1$, untuk $m = 5$ dan $n = 3$.

Akibatnya, pelabelan titik dari Forest $F \cong P_5 \cup K_{1,3}$ pada kasus 2 di atas adalah :

$$f(u_1) = \frac{m+2n+4i+1}{2} = \frac{5+2(3)+4(0)+1}{2} = 6$$

$$f(u_2) = n+2i+2 = 3+2(0)+2 = 5$$

$$f(u_3) = \frac{m+2n+4i+7}{2} = \frac{5+2(3)+4(0)+7}{2} = 9$$

$$f(u_4) = n+2i-1 = 3+2(1)-1 = 4$$

$$f(u_5) = \frac{m+2n+4i+1}{2} = \frac{5+2(3)+4(1)+1}{2} = 8$$

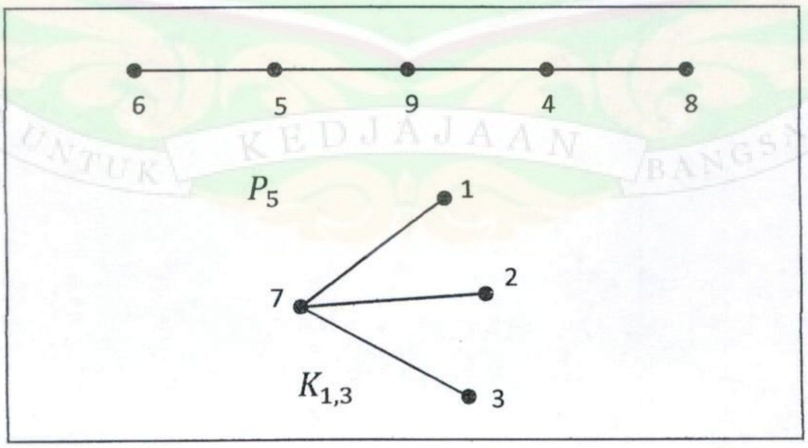
$$f(v_1) = 1$$

$$f(v_2) = 2$$

$$f(v_3) = 3$$

$$f(w) = \frac{m+2n+3}{2} = \frac{5+2(3)+3}{2} = 7$$

bila nila-nilai pelabelan ini dimasukkan ke dalam graf $F \cong P_5 \cup K_{1,3}$, dapat diperoleh graf dengan pelabelan titik, seperti Gambar 3.2.18



Gambar 3.2.18 Pelabelan titik untuk *forest* $F \cong P_5 \cup K_{1,3}$.

Dari pelabelan tersebut terlihat bahwa adanya pemetaan bijektif f dari *V(F)* ke $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Selanjutnya akan dicari nilai valensi dari graf $F \cong P_5 \cup K_{1,3}$. Karena $m = 5$ dimana $5 \equiv 0 \; (mod\; 4) \not\equiv 2\; (mod\; 4)$, maka nilai valensi dari graf $F \cong P_5 \cup K_{1,3}$ adalah :

$$k = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2m + 3n + 3 = \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor + 2(5) + 3(3) + 3 = 24$$

dengan demikian pelabelan titik di atas, berdasarkan Lemma 2.3.3 dapat diperluas menjadi pelabelan sisi dari *forest* $F \cong P_5 \cup K_{1,3}$, yaitu :

$$f(u_i u_{i+1}) = k - [f(u_i) + f(u_{i+1})] \text{ dan } f(v_i w) = k - [f(v_i) + f(w)]$$

selanjutnya diperoleh label dari masing-masing sisi di atas adalah

$$f(u_1u_2) = k - [f(u_1) + f(u_2)] = 24 - [6 + 5] = 13$$

$$f(u_2u_3) = k - [f(u_2) + f(u_3)] = 24 - [5 + 9] = 10$$

$$f(u_3u_4) = k - [f(u_3) + f(u_4)] = 24 - [9 + 4] = 11$$

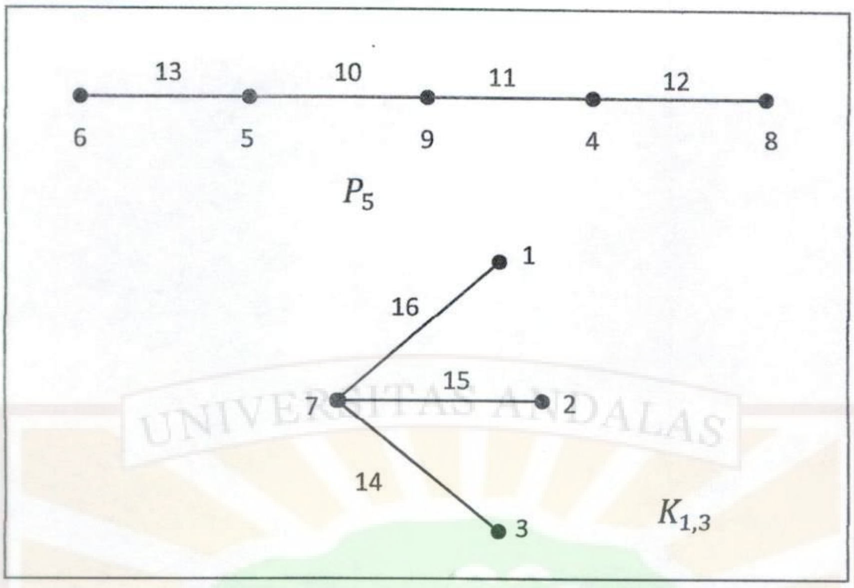
$$f(u_4u_5) = k - [f(u_4) + f(u_5)] = 24 - [4 + 8] = 12$$

$$f(v_1w) = k - [f(v_1) + f(w)] = 24 - [1 + 7] = 16$$

$$f(v_2w) = k - [f(v_2) + f(w)] = 24 - [2 + 7] = 15$$

$$f(v_3w) = k - [f(v_3) + f(w)] = 24 - [3 + 7] = 14$$

bila nilai-nilai pelabelan sisi ini dimasukkan ke dalam graf $F \cong P_5 \cup K_{1,3}$, diperoleh graf dengan pelabelan titik dan sisi, seperti Gambar 3.2.19



Gambar 3.2.19 Pelabelan sisi ajaib super untuk *forest* $F \cong P_5 \cup K_{1,3}$.

Pada Gambar 3.1.19, terlihat bahwa pelabelan di atas merupakan pelabelan sisi ajaib super, karena untuk setiap u, v titik di $F \cong P_5 \cup K_{1,3}$ dan uv sisi maka $f(u) + f(v) + f(uv) = 24$. Ini berarti konstanta ajaib dari graf $F \cong P_5 \cup K_{1,3}$ adalah 24.

Contoh kasus 3

Diberikan *forest* $F \cong P_m \cup K_{1,n}$ dengan $m \equiv 2 \ (mod\ 4)$, dalam hal ini $m = 6$ dan $n = 1, 2, 3$. Selanjutnya akan ditentukan pelabelan sisi ajaib super dan konstanta ajaib dari graf $F \cong P_m \cup K_{1,n}$.

Akan ditinjau nilai dari m dan n, dengan $\boldsymbol{m = 6}$ **dan** $\boldsymbol{n = 1, 2\ 3}$

(i) Untuk $\boldsymbol{m = 6}$ dan $\boldsymbol{n = 1}$

Misalkan $m = 6$ dan $n = 1$ maka $P_m = P_6$ dan $K_{1,n} = K_{1,1}$ dengan himpunan titik dari P_6 dan $K_{1,1}$ masing-masing adalah $V(P_6) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ dan

$V(K_{1,1}) = \{w, v_1\}$. Sedangkan himpunan sisi dari P_6 dan $K_{1,1}$ masing-masing adalah $E(P_6) = \{u_i u_{i+1}\}$ dengan $i = 1, 2, 3, 4, 5$ dan $E(K_{1,1}) = \{wv_1\}$.

Akibatnya, himpunan titik dan sisi dari graf $F \cong P_6 \cup K_{1,1}$ masing-masing adalah

$$V(F) = V(P_6 \cup K_{1,1})$$

$$= V(P_6) \cup V(K_{1,1})$$

$$= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, w, v_1\},$$

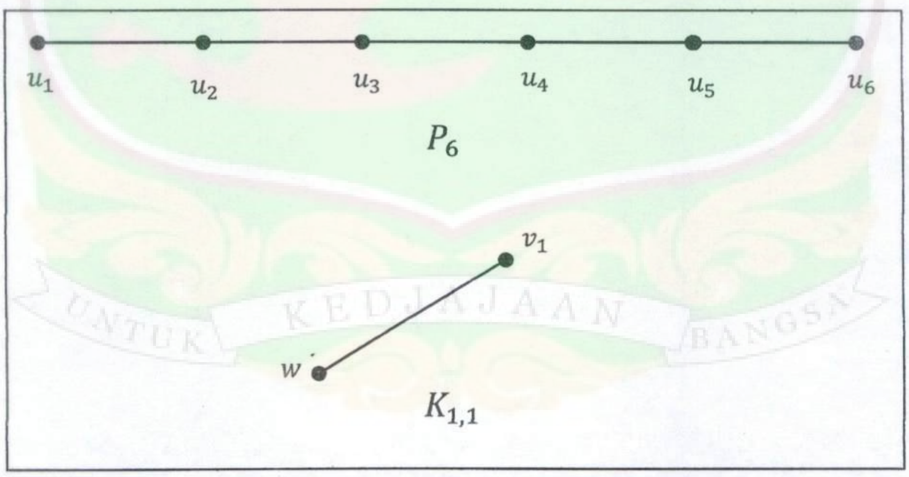
dan

$$E(F) = E(P_6 \cup K_{1,1})$$

$$= E(P_6) \cup E(K_{1,1})$$

$$= \{u_i u_{i+1} \mid i = 1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{wv_1\}.$$

Sehingga graf *forest* $F \cong P_6 \cup K_{1,1}$ seperti pada Gambar 3.2.20



Gambar 3.1.20 *Forest* $F \cong P_6 \cup K_{1,1}$

pada graf $F \cong P_6 \cup K_{1,1}$ berlaku :

$|V(F)| = |V(P_6)| + |V(K_{1,1})| = 6 + 2 = 8$, yang merupakan hasil dari $m + n + 1$, untuk $m = 6$ dan $n = 1$, demikian juga

$|E(F)| = |E(P_6)| + |E(K_{1,1})| = 5 + 1 = 6$, yang merupakan hasil dari $m + n - 1$, untuk $m = 6$ dan $n = 1$.

Akibatnya, pelabelan titik dari *forest* $F \cong P_6 \cup K_{1,1}$ pada kasus 3 di atas adalah :

$$f(u_1) = m + n + 1 = 6 + 1 + 1 = 8$$

$$f(u_2) = \frac{m + 2n - 4i - 4}{2} = \frac{6 + 2(1) - 4(0) - 4}{2} = 2$$

$$f(u_3) = m + n - 1 = 6 + 1 - 1 = 6$$

$$f(u_4) = \frac{m + 2n - 4i + 2}{2} = \frac{6 + 2(1) - 4(1) + 2}{2} = 3$$

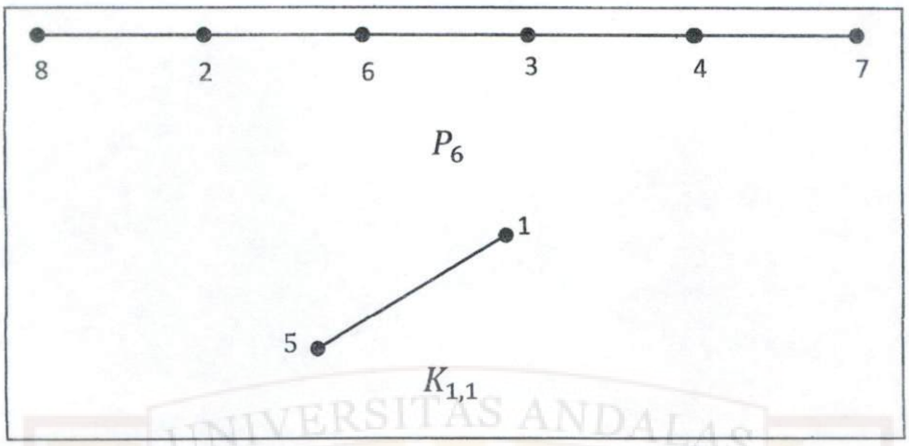
$$f(u_5) = m + n - 2i - 1 = 6 + 1 - 2(1) - 1 = 4$$

$$f(u_6) = m + n = 6 + 1 = 7$$

$$f(v_1) = 1$$

$$f(w) = \frac{m + 2n + 2}{2} = \frac{6 + 2(1) + 2}{2} = 5$$

bila nilai-nilai pelabelan titik ini dimasukkan ke dalam graf $F \cong P_6 \cup K_{1,1}$, dapat diperoleh graf dengan pelabelan titik, seperti Gambar 3.2.21



Gambar 3.2.21 Pelabelan Titik untuk *forest* $F \cong P_6 \cup K_{1,1}$.

Dari pelabelan tersebut terlihat bahwa terdapat pemetaan bijektif f dari $V(F)$ ke $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Selanjutnya akan dicari nilai valensi dari graf ini. Karena $m = 6$ dimana $6 \equiv 2 \ (mod\ 4) \equiv 2 \ (mod\ 4)$, maka nilai valensi dari graf $F \cong P_6 \cup K_{1,1}$ adalah :

$$k = \frac{5m}{2} + 3n + 2 = \frac{5(6)}{2} + 3(1) + 2 = 20$$

dengan demikian pelabelan titik di atas, berdasarkan Lemma 2.3.3 dapat diperluas menjadi pelabelan sisi dari *forest* $F \cong P_6 \cup K_{1,1}$, yaitu :

$$f(u_i u_{i+1}) = k - [f(u_i) + f(u_{i+1})] \text{ dan } f(v_i w) = k - [f(v_i) + f(w)]$$

selanjutnya diperoleh label dari masing-masing sisi di atas adalah :

$$f(u_1 u_2) = k - [f(u_1) + f(u_2)] = 20 - [8 + 2] = 10$$

$$f(u_2 u_3) = k - [f(u_2) + f(u_3)] = 20 - [2 + 6] = 12$$

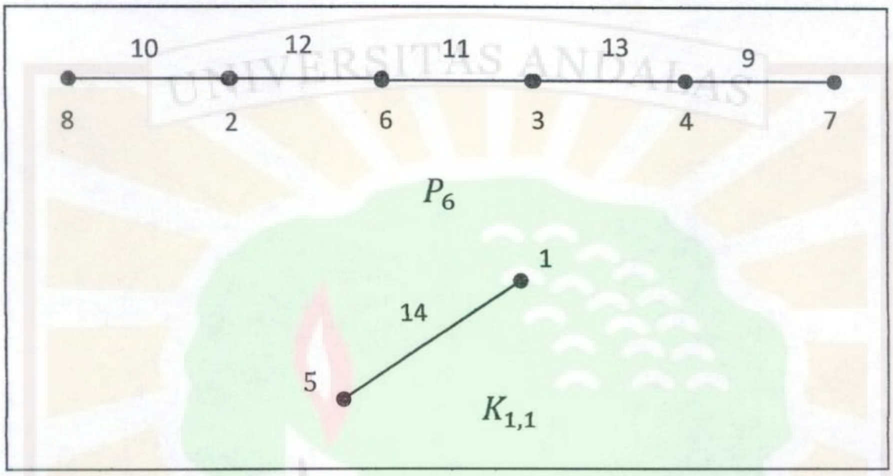
$$f(u_3 u_4) = k - [f(u_3) + f(u_4)] = 20 - [6 + 3] = 11$$

$$f(u_4 u_5) = k - [f(u_4) + f(u_5)] = 20 - [3 + 4] = 13$$

$$f(u_5u_6) = k - [f(u_5) + f(u_6)] = 20 - [4 + 7] = 9$$

$$f(v_1w) = k - [f(v_1) + f(w)] = 20 - [1 + 5] = 14$$

bila nilai-nilai pelabelan sisi ini dimasukkan ke dalam graf $F \cong P_6 \cup K_{1,1}$, diperoleh graf dengan pelabelan titik dan sisi, seperti Gambar 3.2.22



Gambar 3.2.22 Pelabelan sisi ajaib super untuk *forest* $F \cong P_6 \cup K_{1,1}$.

Pada Gambar 3.2.22, terlihat bahwa pelabelan di atas merupakan pelabelan sisi ajaib super, karena untuk setiap u, v titik di $F \cong P_6 \cup K_{1,1}$ dan uv sisi maka $f(u) + f(v) + f(uv) = 20$. Ini berarti konstanta ajaib dari graf $F \cong P_6 \cup K_{1,1}$ adalah 20

(ii) Untuk $m = 6$ dan $n = 2$

Misalkan $m = 6$ dan $n = 2$ maka $P_m = P_6$ dan $K_{1,n} = K_{1,2}$ dengan himpunan titik dari P_6 dan $K_{1,2}$ masing-masing adalah $V(P_6) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ dan $V(K_{1,2}) = \{w, v_1, v_2\}$. Sedangkan himpunan sisi dari P_6 dan $K_{1,2}$ masing-masing adalah $E(P_6) = \{u_iu_{i+1}\}$ dengan $i = 1, 2, 3, 4, 5$ dan $E(K_{1,2}) = \{wv_1, wv_2\}$.

Akibatnya, himpunan titik dan sisi dari graf $F \cong P_6 \cup K_{1,2}$ masing-masing adalah

$$V(F) = V(P_6 \cup K_{1,2})$$

$$= V(P_6) \cup V(K_{1,2})$$

$$= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, w, v_1, v_2\},$$

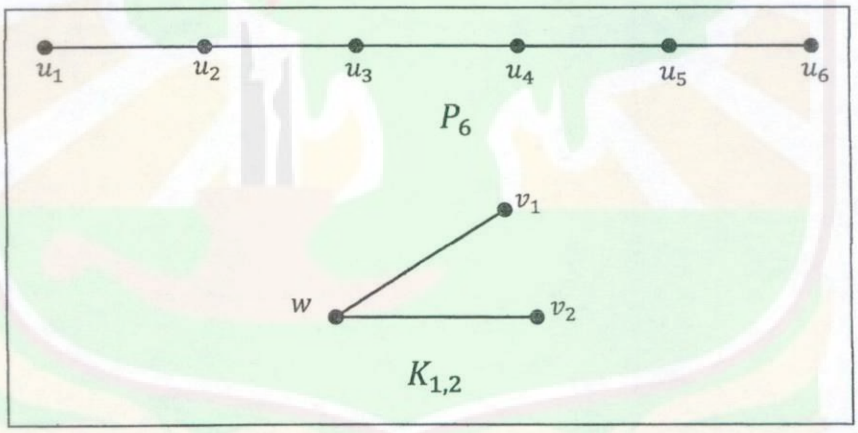
dan

$$E(F) = E(P_6 \cup K_{1,2})$$

$$= E(P_6) \cup E(K_{1,2})$$

$$= \{u_i u_{i+1} \mid i = 1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{wv_1, wv_2\}.$$

Sehingga graf *forest* $F \cong P_6 \cup K_{1,2}$ seperti Gambar 3.2.23



Gambar 3.2.23 *Forest* $F \cong P_6 \cup K_{1,2}$

pada graf $F \cong P_6 \cup K_{1,2}$ berlaku :

$|V(F)| = |V(P_6)| + |V(K_{1,2})| = 6 + 3 = 9$, yang merupakan hasil dari $m + n + 1$, untuk $m = 6$ dan $n = 2$, demikian juga

$|E(F)| = |E(P_6)| + |E(K_{1,1})| = 5 + 2 = 7$, yang merupakan hasil dari $m + n - 1$, untuk $m = 6$ dan $n = 2$.

Akibatnya, pelabelan titik dari *forest* $F \cong P_6 \cup K_{1,2}$ pada kasus 3 di atas adalah

$$f(u_1) = m + n + 1 = 6 + 2 + 1 = 9$$

$$f(u_2) = \frac{m + 2n - 4i - 4}{2} = \frac{6 + 2(2) - 4(0) - 4}{2} = 3$$

$$f(u_3) = m + n - 1 = 6 + 2 - 1 = 7$$

$$f(u_4) = \frac{m + 2n - 4i + 2}{2} = \frac{6 + 2(2) - 4(1) + 2}{2} = 4$$

$$f(u_5) = m + n - 2i - 1 = 6 + 2 - 2(1) - 1 = 5$$

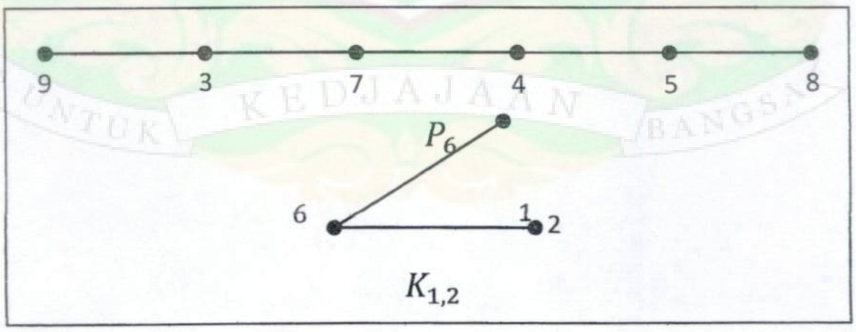
$$f(u_6) = m + n = 6 + 2 = 8$$

$$f(v_1) = 1$$

$$f(v_2) = 2$$

$$f(w) = \frac{m + 2n + 2}{2} = \frac{6 + 2(2) + 2}{2} = 6$$

bila nilai-nilai pelabelan titik ini dimasukkan ke dalam graf $F \cong P_6 \cup K_{1,2}$, dapat diperoleh graf dengan pelabelan titik, seperti Gambar 3.2.24



Gambar 3.2.24 Pelabelan titik *forest* $F \cong P_6 \cup K_{1,2}$.

Dari pelabelan tersebut terlihat bahwa terdapat pemetaan bijektif f dari $V(F)$ ke $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Selanjutnya akan dicari nilai valensi dari graf $F \cong P_6 \cup K_{1,2}$. Karena $m = 6$ dimana $6 \equiv 2\ (mod\ 4)\ \equiv 2\ (mod\ 4)$, maka nilai valensi dari graf $F \cong P_6 \cup K_{1,2}$ adalah

$$k = \frac{5m}{2} + 3n + 2 = \frac{5(6)}{2} + 3(2) + 2 = 23$$

dengan demikian pelabelan titik di atas, berdasarkan Lemma 2.3.3 dapat diperluas menjadi pelabelan sisi dari Forest $F \cong P_6 \cup K_{1,2}$, yaitu :

$$f(u_i u_{i+1}) = k - [f(u_i) + f(u_{i+1})] \text{ dan } f(v_i w) = k - [f(v_i) + f(w)]$$

selanjutnya diperoleh label dari masing-masing sisi di atas adalah :

$$f(u_1u_2) = k - [f(u_1) + f(u_2)] = 23 - [9 + 3] = 11$$

$$f(u_2u_3) = k - [f(u_2) + f(u_3)] = 23 - [3 + 7] = 13$$

$$f(u_3u_4) = k - [f(u_3) + f(u_4)] = 23 - [7 + 4] = 12$$

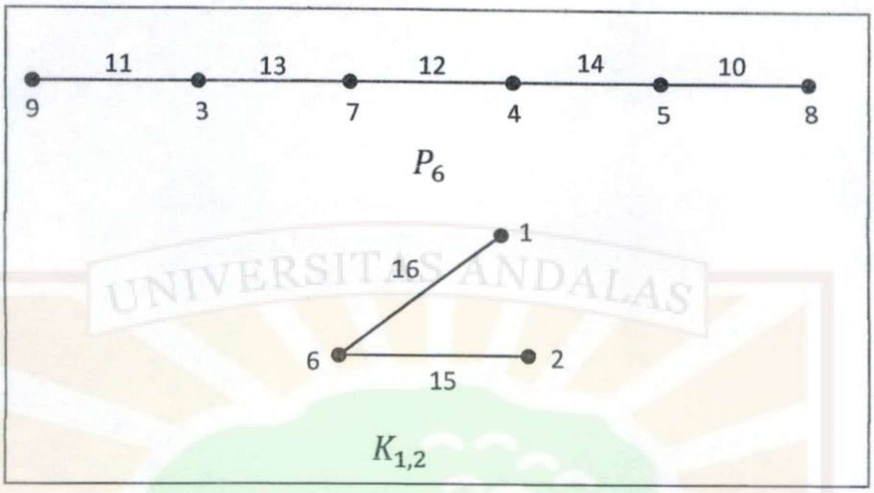
$$f(u_4u_5) = k - [f(u_4) + f(u_5)] = 23 - [4 + 5] = 14$$

$$f(u_5u_6) = k - [f(u_5) + f(u_6)] = 23 - [5 + 8] = 10$$

$$f(v_1w) = k - [f(v_1) + f(w)] = 23 - [1 + 6] = 16$$

$$f(v_2w) = k - [f(v_2) + f(w)] = 23 - [2 + 6] = 15$$

bila nilai-nilai pelabelan sisi ini dimasukkan ke dalam graf $F \cong P_6 \cup K_{1,2}$, dapat diperoleh graf dengan pelabelan titik dan sisi, seperti Gambar 3.2.35.



Gambar 3.2.25 Pelabelan sisi ajaib super untuk *forest* $F \cong P_6 \cup K_{1,2}$.

Pada Gambar 3.2.25, terlihat bahwa pelabelan di atas merupakan pelabelan sisi ajaib super, karena untuk setiap u, v titik di $F \cong P_6 \cup K_{1,2}$ dan uv sisi maka $f(u) + f(v) + f(uv) = 23$. Ini berarti konstanta ajaib dari graf $F \cong P_6 \cup K_{1,2}$ adalah 23.

(iii) Untuk $m = 6$ dan $n = 3$

Misalkan $m = 6$ dan $n = 3$ maka $P_m = P_6$ dan $K_{1,n} = K_{1,3}$ dengan himpunan titik dari P_6 dan $K_{1,3}$ masing-masing adalah $V(P_6) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ dan $V(K_{1,3}) = \{w, v_1, v_2, v_3\}$. Sedangkan himpunan sisi dari P_6 dan $K_{1,3}$ masing-masing adalah $E(P_6) = \{u_i u_{i+1}\}$ dengan $i = 1, 2, 3, 4, 5$ dan $E(K_{1,3}) = \{wv_1, wv_2, wv_3\}$.

Akibatnya, himpunan titik dan sisi dari graf $F \cong P_6 \cup K_{1,3}$ masing-masing adalah

$$V(F) = V(P_6 \cup K_{1,3})$$

$$= V(P_6) \cup V(K_{1,3})$$

$$= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, w, v_2, v_3\},$$

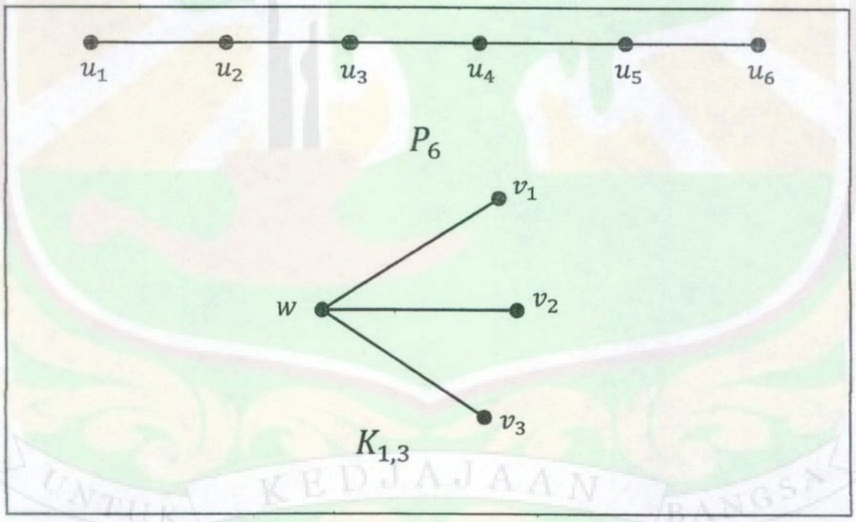
dan

$$E(F) = E(P_9 \cup K_{1,3})$$

$$= E(P_9) \cup E(K_{1,3})$$

$$= \{u_i u_{i+1} \mid i = 1,2,3,4,5,\} \cup \{wv_1, wv_2, wv_3\}.$$

Sehingga graf $F \cong P_6 \cup K_{1,3}$ seperti Gambar 3.2.26



Gambar 3.2.26 *Forest* $F \cong P_6 \cup K_{1,3}$

pada graf $F \cong P_6 \cup K_{1,3}$ berlaku :

$|V(F)| = |V(P_6)| + |V(K_{1,3})| = 6 + 4 = 10$, yang merupakan hasil dari $m + n + 1$, untuk $m = 6$ dan $n = 3$

dan

$|E(F)| = |E(P_6)| + |E(K_{1,3})| = 6 + 3 = 9$, yang merupakan hasil dari $m + n - 1$, untuk $m = 6$ dan $n = 3$.

Akibatnya, pelabelan titik dari *forest* $F \cong P_6 \cup K_{1,3}$ pada kasus 3 di atas adalah

$$f(u_1) = m + n + 1 = 6 + 3 + 1 = 10$$

$$f(u_2) = \frac{m + 2n - 4i - 4}{2} = \frac{6 + 2(3) - 4(0) - 4}{2} = 4$$

$$f(u_3) = m + n - 1 = 6 + 3 - 1 = 8$$

$$f(u_4) = \frac{m + 2n - 4i + 2}{2} = \frac{6 + 2(3) - 4(1) + 2}{2} = 5$$

$$f(u_5) = m + n - 2i - 1 = 6 + 3 - 2(1) - 1 = 6$$

$$f(u_6) = m + n = 6 + 3 = 9$$

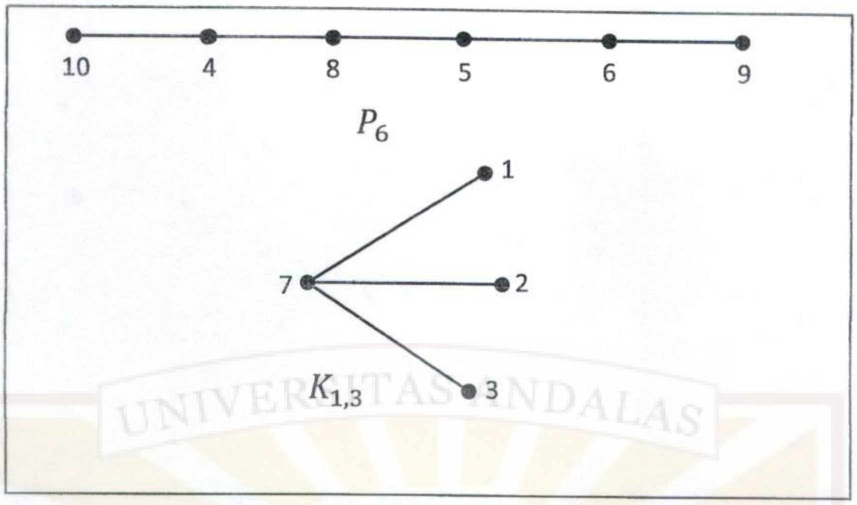
$$f(v_1) = 1$$

$$f(v_2) = 2$$

$$f(v_3) = 3$$

$$f(w) = \frac{m + 2n + 2}{2} = \frac{6 + 2(3) + 2}{2} = 7$$

bila nilai-nilai pelabelan titik ini dimasukkan ke dalam graf $F \cong P_6 \cup K_{1,3}$, dapat diperoleh graf dengan pelabelan titik, seperti Gambar 3.2.27



Gambar 3.2.27 Pelabelan titik *forest* $F \cong P_6 \cup K_{1,3}$.

Dari pelabelan tersebut terlihat bahwa terdapat pemetaan bijektif f dari *V(F)* ke $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Selanjutnya akan dicari nilai valensi dari graf $F \cong P_6 \cup K_{1,3}$. Karena $m = 6$ dimana $6 \equiv 2\ (mod\ 4) \equiv 2\ (mod\ 4)$, maka nilai valensi dari graf $F \cong P_6 \cup K_{1,3}$ adalah

$$k = \frac{5m}{2} + 3n + 2 = \frac{5(6)}{2} + 3(3) + 2 = 26$$

dengan demikian pelabelan titik di atas, berdasarkan Lemma 2.3.3 dapat diperluas menjadi pelabelan sisi dari *forest* $F \cong P_6 \cup K_{1,3}$, yaitu :

$$f(u_i u_{i+1}) = k - [f(u_i) + f(u_{i+1})] \text{ dan } f(v_i w) = k - [f(v_i) + f(w)]$$

selanjutnya diperoleh label dari masing-masing sisi di atas adalah :

$$f(u_1 u_2) = k - [f(u_1) + f(u_2)] = 26 - [10 + 4] = 12$$

$$f(u_2 u_3) = k - [f(u_2) + f(u_3)] = 26 - [4 + 8] = 14$$

$$f(u_3u_4) = k - [f(u_3) + f(u_4)] = 26 - [8 + 5] = 13$$

$$f(u_4u_5) = k - [f(u_4) + f(u_5)] = 26 - [5 + 6] = 15$$

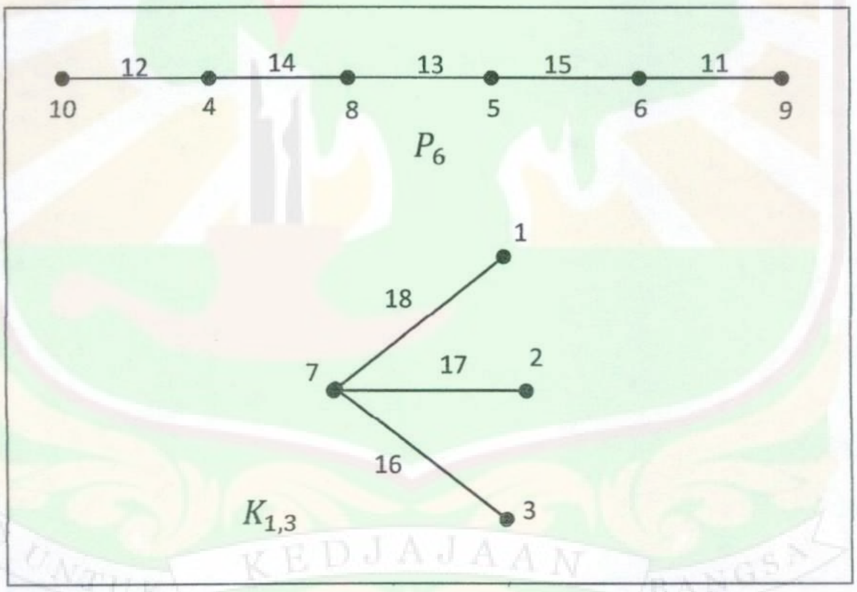
$$f(u_5u_6) = k - [f(u_5) + f(u_6)] = 26 - [6 + 9] = 11$$

$$f(v_1w) = k - [f(v_1) + f(w)] = 26 - [1 + 7] = 18$$

$$f(v_2w) = k - [f(v_2) + f(w)] = 26 - [2 + 7] = 17$$

$$f(v_3w) = k - [f(v_3) + f(w)] = 26 - [3 + 7] = 16$$

bila nilai-nilai pelabelan sisi ini dimasukkan ke dalam graf $F \cong P_6 \cup K_{1,3}$, diperoleh graf dengan pelabelan titik dan sisi, seperti Gambar 3.2.28



Gambar 3.2.28 Pelabelan sisi ajaib super untuk *forest* $F \cong P_6 \cup K_{1,3}$.

Pada Gambar 3.2.28, terlihat bahwa pelabelan di atas merupakan pelabelan sisi ajaib super, karena untuk setiap u, v titik di $F \cong P_6 \cup K_{1,3}$ dan uv sisi maka

$f(u) + f(v) + f(uv) = 26$. Ini berarti konstanta ajaib dari graf $F \cong P_6 \cup K_{1,3}$ adalah 26.

Contoh Kasus 4

Diberikan *forest* $F \cong P_m \cup K_{1,n}$ dengan $m \equiv 3\ (mod\ 4)$, untuk $m = 7$ dan $n = 1, 2, 3$. Selanjutnya akan ditentukan pelabelan sisi ajaib super dan konstanta ajaib dari graf $F \cong P_m \cup K_{1,n}$.

Akan ditinjau nilai dari m dan n, dengan $\boldsymbol{m = 7}$ dan $\boldsymbol{n = 1, 2, 3}$

(i) **Untuk $\boldsymbol{m = 7}$ dan $\boldsymbol{n = 1}$**

Misalkan $m = 7$ dan $n = 1$ maka $P_m = P_7$ dan $K_{1,n} = K_{1,1}$ dengan himpunan titik dari P_7 dan $K_{1,1}$ masing-masing adalah $V(P_7) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ dan $V(K_{1,1}) = \{w, v_1\}$. Sedangkan himpunan sisi dari P_7 dan $K_{1,1}$ masing-masing adalah $E(P_7) = \{u_i u_{i+1}\}$ dengan $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ dan $E(K_{1,1}) = \{wv_1\}$.

Akibatnya, himpunan titik dan sisi dari graf $F \cong P_7 \cup K_{1,1}$ masing-masing adalah

$$V(F) = V(P_7 \cup K_{1,1})$$

$$= V(P_7) \cup V(K_{1,1})$$

$$= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, w, v_1\},$$

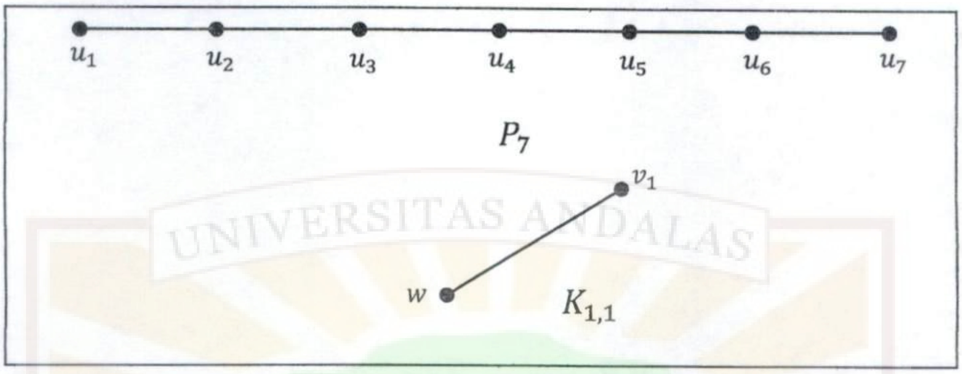
dan

$$E(F) = E(P_7 \cup K_{1,1})$$

$$= E(P_7) \cup E(K_{1,1})$$

$= \{u_i u_{i+1} \mid i = 1,2,3,4,5,6\} \cup \{wv_1\}.$

Sehingga graf $F \cong P_7 \cup K_{1,1}$ seperti pada Gambar 3.2.29



Gambar 3.2.29 *Forest* $F \cong P_7 \cup K_{1,1}$

pada graf $F \cong P_7 \cup K_{1,1}$ berlaku :

$|V(F)| = |V(P_7)| + |V(K_{1,1})| = 7 + 2 = 9$, yang merupakan hasil dari $m + n + 1$, untuk $m = 7$ dan $n = 1$, demikian juga

$|E(F)| = |E(P_7)| + |E(K_{1,1})| = 6 + 1 = 7$, yang merupakan hasil dari $m + n - 1$, untuk $m = 7$ dan $n = 1$.

Akibatnya, pelabelan titik dari *forest* $F \cong P_7 \cup K_{1,1}$ pada kasus 4 di atas adalah

$$f(u_1) = \frac{m + 2n + 1}{2} = \frac{7 + 2(1) + 1}{2} = 5$$

$$f(u_2) = n + 2i + 2 = 1 + 2(0) + 2 = 3$$

$$f(u_3) = \frac{m + 2n + 5}{2} = \frac{7 + 2(1) + 5}{2} = 7$$

$$f(u_4) = n + 2i - 1 = 1 + 2(1) - 1 = 2$$

$$f(u_5) = \frac{m + 2n + 4i + 5}{2} = \frac{7 + 2(1) + 4(1) + 5}{2} = 9$$

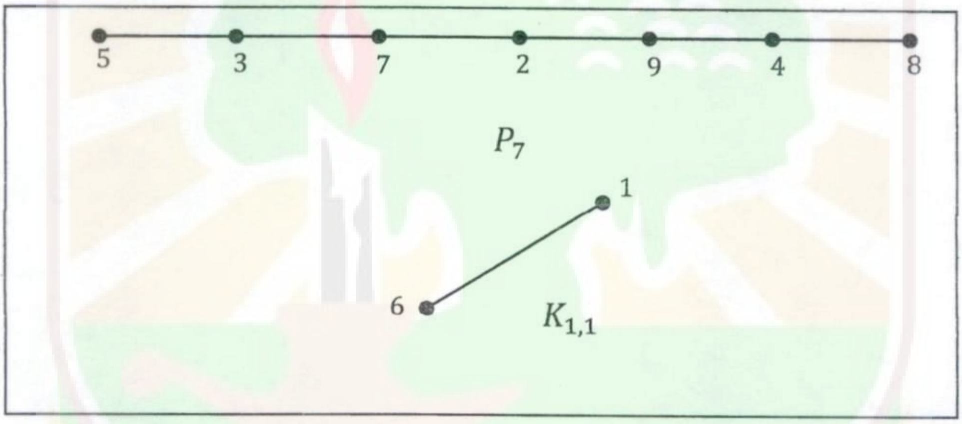
$$f(u_6) = \frac{m+2n-1}{2} = \frac{7+2(1)-1}{2} = 4$$

$$f(u_7) = \frac{m+2n+4i+3}{2} = \frac{7+2(1)+4(1)+3}{2} = 8$$

$$f(v_1) = 1$$

$$f(w) = \frac{m+2n+3}{2} = \frac{7+2(1)+3}{2} = 6$$

bila nilai-nilai pelabelan titik ini dimasukkan ke dalam graf $F \cong P_7 \cup K_{1,1}$, dapat diperoleh graf dengan pelabelan titik, seperti Gambar 3.2.30



Gambar 3.2.30 Pelabelan titik untuk *forest* $F \cong P_7 \cup K_{1,1}$.

Dari pelabelan tersebut terlihat bahwa terdapat pemetaan bijektif f dari $V(F)$ ke $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Selanjutnya akan dicari nilai valensi dari graf $F \cong P_7 \cup K_{1,1}$. Karena $m = 7$ dimana $7 \equiv 0 \ (mod\ 4) \not\equiv 2 \ (mod\ 4)$, maka nilai valensi dari graf $F \cong P_7 \cup K_{1,1}$ adalah

$$k = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2m + 3n + 3 = \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor + 2(7) + 3(1) + 3 = 23$$

dengan demikian pelabelan titik di atas, berdasarkan Lemma 2.3.3 dapat diperluas menjadi pelabelan sisi dari Forest $F \cong P_7 \cup K_{1,1}$, yaitu :

$$f(u_i u_{i+1}) = k - [f(u_i) + f(u_{i+1})] \text{ dan } f(v_i w) = k - [f(v_i) + f(w)]$$

sehingga diperoleh label dari masing-masing sisi di atas adalah

$$f(u_1u_2) = k - [f(u_1) + f(u_2)] = 23 - [5 + 3] = 15$$

$$f(u_2u_3) = k - [f(u_2) + f(u_3)] = 23 - [3 + 7] = 13$$

$$f(u_3u_4) = k - [f(u_3) + f(u_4)] = 23 - [7 + 2] = 14$$

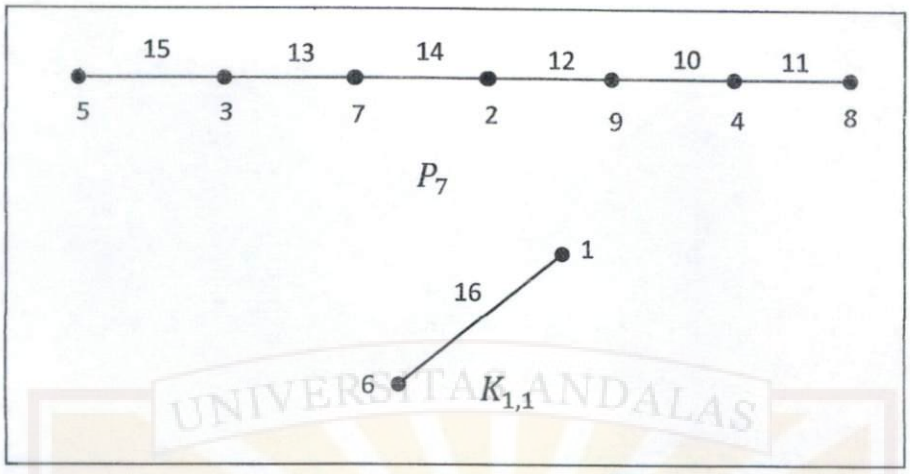
$$f(u_4u_5) = k - [f(u_4) + f(u_5)] = 23 - [2 + 9] = 12$$

$$f(u_5u_6) = k - [f(u_5) + f(u_6)] = 23 - [9 + 4] = 10$$

$$f(u_6u_7) = k - [f(u_6) + f(u_7)] = 23 - [4 + 8] = 11$$

$$f(v_1w) = k - [f(v_1) + f(w)] = 23 - [1 + 6] = 16$$

bila nilai-nilai pelabelan sisi ini dimasukkan ke dalam graf $F \cong P_7 \cup K_{1,1}$, diperoleh graf dengan pelabelan titik dan sisi, seperti Gambar 3.2.31



Gambar 3.2.31 Pelabelan sisi ajaib super untuk *forest* $F \cong P_7 \cup K_{1,1}$.

Pada Gambar 3.2.31, terlihat bahwa pelabelan di atas merupakan pelabelan sisi ajaib super, karena untuk setiap u, v titik di $F \cong P_7 \cup K_{1,1}$ dan uv sisi maka $f(u) + f(v) + f(uv) = 23$. Ini berarti konstanta ajaib dari graf $F \cong P_7 \cup K_{1,1}$ adalah 23.

(ii) Untuk $m = 7$ dan $n = 2$

Misalkan $m = 7$ dan $n = 2$ maka $P_m = P_7$ dan $K_{1,n} = K_{1,2}$ dengan himpunan titik dari P_7 dan $K_{1,2}$ masing-masing adalah $V(P_7) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ dan $V(K_{1,3}) = \{w, v_1, v_2\}$. Sedangkan himpunan sisi dari P_7 dan $K_{1,2}$ masing-masing adalah $E(P_7) = \{u_i u_{i+1}\}$ dengan $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ dan $E(K_{1,2}) = \{wv_1, wv_2\}$.

Akibatnya, himpunan titik dan sisi dari graf $F \cong P_7 \cup K_{1,2}$ masing-masing adalah

$$V(F) = V(P_7 \cup K_{1,2})$$

$$= V(P_7) \cup V(K_{1,2})$$

$$= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, w, v_1, v_2\},$$

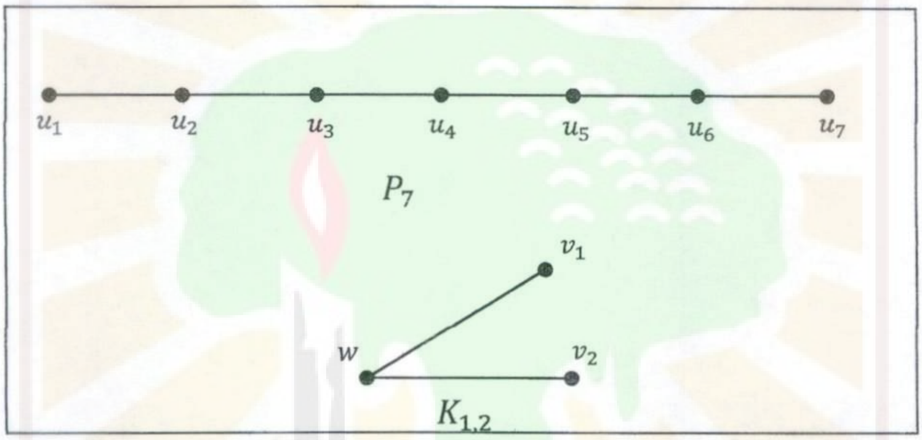
dan

$$E(F) = E(P_7 \cup K_{1,2})$$

$$= E(P_7) \cup E(K_{1,2})$$

$$= \{u_i u_{i+1} \mid i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cup \{wv_1, wv_2\}.$$

Sehingga graf $F \cong P_7 \cup K_{1,2}$ seperti Gambar 3.2.32



Gambar 3.2.32 *Forest* $F \cong P_7 \cup K_{1,2}$

pada graf $F \cong P_7 \cup K_{1,2}$ berlaku :

$|V(F)| = |V(P_7)| + |V(K_{1,1})| = 7 + 3 = 10$, yang merupakan hasil dari $m + n + 1$, untuk $m = 7$ dan $n = 2$, demikian juga

$|E(F)| = |E(P_7)| + |E(K_{1,1})| = 6 + 2 = 8$, yang merupakan hasil dari $m + n - 1$, untuk $m = 7$ dan $n = 2$.

Akibatnya, pelabelan titik dari *forest* $F \cong P_7 \cup K_{1,2}$ pada kasus 4 di atas adalah

$$f(u_1) = \frac{m + 2n + 1}{2} = \frac{7 + 2(2) + 1}{2} = 6$$

$$f(u_2) = n + 2i + 2 = 2 + 2(0) + 2 = 4$$

$$f(u_3) = \frac{m + 2n + 5}{2} = \frac{7 + 2(2) + 5}{2} = 8$$

$$f(u_4) = n + 2i - 1 = 2 + 2(1) - 1 = 3$$

$$f(u_5) = \frac{m + 2n + 4i + 5}{2} = \frac{7 + 2(2) + 4(1) + 5}{2} = 10$$

$$f(u_6) = \frac{m + 2n - 1}{2} = \frac{7 + 2(2) - 1}{2} = 5$$

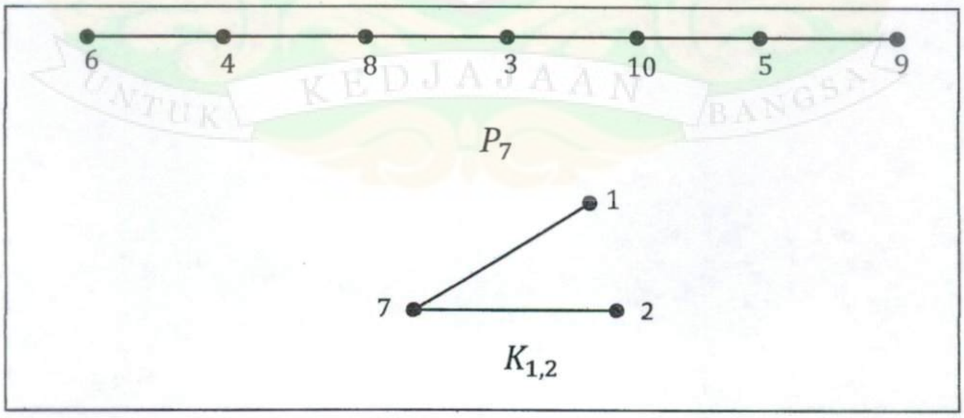
$$f(u_7) = \frac{m + 2n + 4i + 3}{2} = \frac{7 + 2(2) + 4(1) + 3}{2} = 9$$

$$f(v_1) = 1$$

$$f(v_2) = 2$$

$$f(w) = \frac{m + 2n + 3}{2} = \frac{7 + 2(2) + 3}{2} = 7$$

bila nilai-nilai pelabelan titik ini dimasukkan ke dalam graf $F \cong P_7 \cup K_{1,2}$, dapat diperoleh graf dengan pelabelan titik, seperti Gambar 3.2.33



Gambar 3.2.33 Pelabelan titik untuk *forest* $F \cong P_7 \cup K_{1,2}$.

Dari pelabelan tersebut terlihat bahwa terdapat pemetaan bijektif f dari *V(F)* ke $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Selanjutnya akan dicari nilai valensi dari graf ini. Karena $m = 7$ dimana $7 \equiv 0 \ (mod\ 4) \not\equiv 2 \ (mod\ 4)$, maka nilai valensi dari graf $F \cong P_7 \cup K_{1,2}$ adalah

$$k = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2m + 3n + 3 = \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor + 2(7) + 3(2) + 3 = 26$$

dengan demikian pelabelan titik di atas, berdasarkan lemma 2.3.3 dapat diperluas menjadi pelabelan sisi dari *forest* $F \cong P_7 \cup K_{1,2}$, yaitu :

$$f(u_i u_{i+1}) = k - [f(u_i) + f(u_{i+1})] \text{ dan } f(v_i w) = k - [f(v_i) + f(w)]$$

selanjutnya diperoleh label dari masing-masing sisi di atas adalah

$$f(u_1u_2) = k - [f(u_1) + f(u_2)] = 26 - [6 + 4] = 16$$

$$f(u_2u_3) = k - [f(u_2) + f(u_3)] = 26 - [4 + 8] = 14$$

$$f(u_3u_4) = k - [f(u_3) + f(u_4)] = 26 - [8 + 3] = 15$$

$$f(u_4u_5) = k - [f(u_4) + f(u_5)] = 26 - [3 + 10] = 13$$

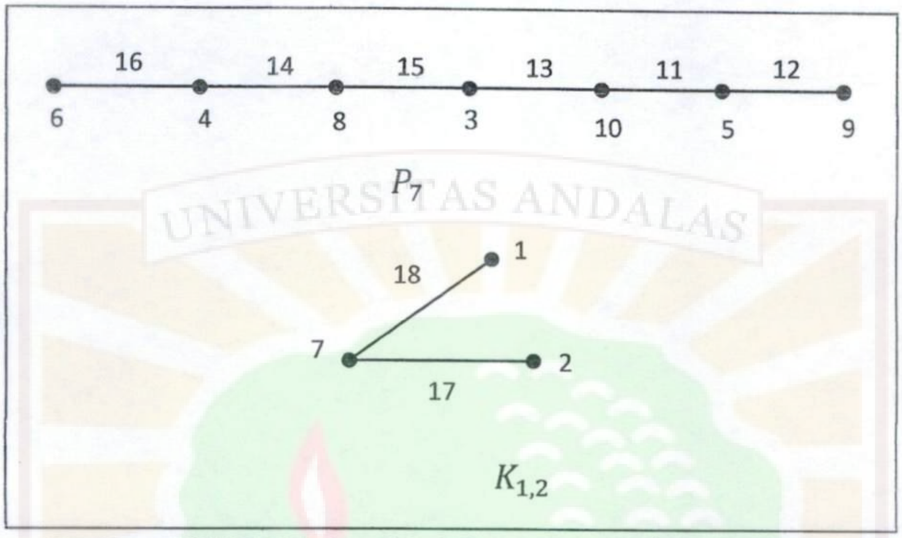
$$f(u_5u_6) = k - [f(u_5) + f(u_6)] = 26 - [10 + 5] = 11$$

$$f(u_6u_7) = k - [f(u_6) + f(u_7)] = 26 - [5 + 9] = 12$$

$$f(v_1w) = k - [f(v_1) + f(w)] = 26 - [1 + 7] = 18$$

$$f(v_2w) = k - [f(v_2) + f(w)] = 26 - [2 + 7] = 17$$

bila nilai-nilai pelabelan sisi ini dimasukkan ke dalam graf $F \cong P_7 \cup K_{1,2}$, diperoleh graf dengan pelabelan titik dan sisi, seperti Gambar 3.2.34



Gambar 3.2.34 Pelabelan sisi ajaib super untuk *forest* $F \cong P_7 \cup K_{1,2}$.

Pada Gambar 3.2.34, terlihat bahwa pelabelan di atas merupakan pelabelan sisi ajaib super, karena untuk setiap u, v titik di $F \cong P_7 \cup K_{1,2}$ dan uv sisi maka $f(u) + f(v) + f(uv) = 26$. Ini berarti konstanta ajaib dari graf $F \cong P_7 \cup K_{1,2}$ adalah 26.

(iii) Untuk $m = 7$ dan $n = 3$

Misalkan $m = 7$ dan $n = 3$ maka $P_m = P_7$ dan $K_{1,n} = K_{1,3}$ dengan himpunan titik dari P_7 dan $K_{1,3}$ masing-masing adalah $V(P_7) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ dan $V(K_{1,3}) = \{w, v_1, v_2, v_3\}$. Sedangkan himpunan sisi dari P_7 dan $K_{1,3}$ masing-masing adalah $E(P_7) = \{u_i u_{i+1}\}$ dengan $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ dan $E(K_{1,3}) = \{wv_1, wv_2, wv_3\}$.

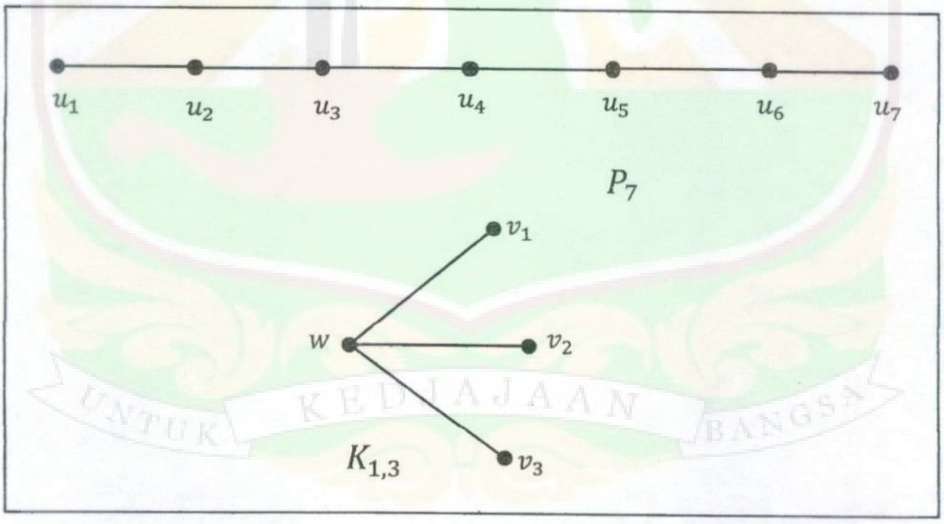
Akibatnya, himpunan titik dan sisi dari graf $F \cong P_7 \cup K_{1,3}$ masing-masing adalah

$$\begin{aligned} V(F) &= V(P_7 \cup K_{1,3}) \\ &= V(P_7) \cup V(K_{1,3}) \\ &= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, w, v_1, v_2, v_3\}, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} E(F) &= E(P_7 \cup K_{1,3}) \\ &= E(P_7) \cup E(K_{1,3}) \\ &= \{u_i u_{i+1} \mid i = 1,2,3,4,5,6\} \cup \{wv_1, wv_2, wv_3\}. \end{aligned}$$

Sehingga graf $F \cong P_7 \cup K_{1,3}$ seperti pada Gambar 3.2.35



Gambar 3.2.35 *Forest* $F \cong P_7 \cup K_{1,3}$

pada graf $F \cong P_7 \cup K_{1,3}$ berlaku :

$|V(F)| = |V(P_7)| + |V(K_{1,3})| = 7 + 4 = 11$, yang merupakan hasil dari $m + n + 1$, untuk $m = 7$ dan $n = 3$, demikian juga

$|E(F)| = |E(P_7)| + |E(K_{1,3})| = 6 + 3 = 9$, yang merupakan hasil dari $m + n - 1$, untuk $m = 7$ dan $n = 3$.

Akibatnya, pelabelan titik dari *forest* $F \cong P_7 \cup K_{1,3}$ pada kasus 4 diatas adalah

$$f(u_1) = \frac{m + 2n + 1}{2} = \frac{7 + 2(3) + 1}{2} = 7$$

$$f(u_2) = n + 2i + 2 = 3 + 2(0) + 2 = 5$$

$$f(u_3) = \frac{m + 2n + 5}{2} = \frac{7 + 2(3) + 5}{2} = 9$$

$$f(u_4) = n + 2i - 1 = 3 + 2(1) - 1 = 4$$

$$f(u_5) = \frac{m + 2n + 4i + 5}{2} = \frac{7 + 2(3) + 4(1) + 5}{2} = 11$$

$$f(u_6) = \frac{m + 2n - 1}{2} = \frac{7 + 2(3) - 1}{2} = 6$$

$$f(u_7) = \frac{m + 2n + 4i + 3}{2} = \frac{7 + 2(3) + 4(1) + 3}{2} = 10$$

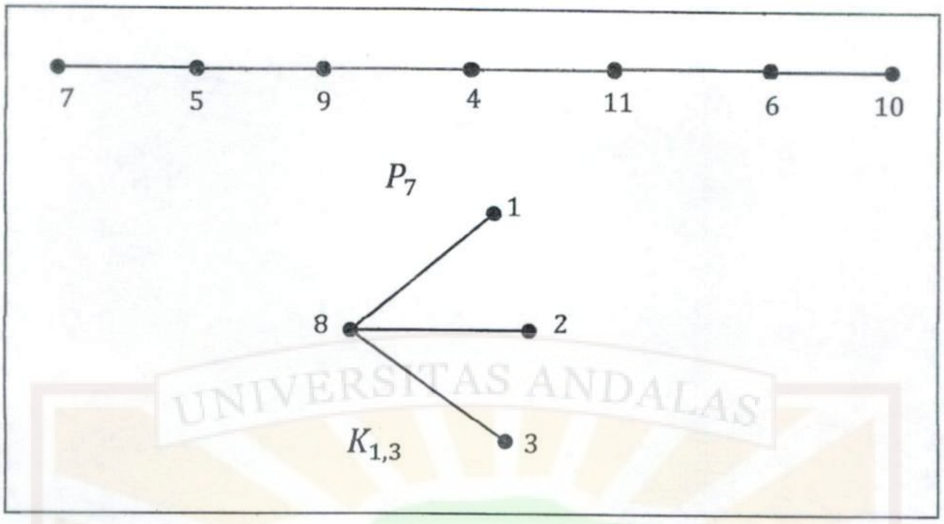
$$f(v_1) = 1$$

$$f(v_2) = 2$$

$$f(v_3) = 3$$

$$f(w) = \frac{m + 2n + 3}{2} = \frac{7 + 2(3) + 3}{2} = 8$$

bila nilai-nilai pelabelan titik ini dimasukkan ke dalam graf $F \cong P_7 \cup K_{1,3}$ diperoleh graf dengan pelabelan titik, seperti Gambar 3.2.36.



Gambar 3.2.36 Pelabelan titik untuk *forest* $F \cong P_7 \cup K_{1,3}$.

Dari pelabelan tersebut terlihat bahwa terdapat pemetaan bijektif f dari $V(F)$ ke $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

Selanjutnya akan dicari nilai valensi dari graf ini. Karena $m = 7$ dimana $7 \equiv 0 \ (mod\ 4) \not\equiv 2 \ (mod\ 4)$, maka nilai valensi dari graf $F \cong P_7 \cup K_{1,3}$ adalah

$$k = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2m + 3n + 3 = \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor + 2(7) + 3(3) + 3 = 29$$

dengan demikian pelabelan titik di atas, berdasarkan lemma 2.3.3 dapat diperluas menjadi pelabelan sisi dari Forest $F \cong P_7 \cup K_{1,3}$, yaitu :

$$f(u_i u_{i+1}) = k - [f(u_i) + f(u_{i+1})] \ \text{ dan } \ f(v_i w) = k - [f(v_i) + f(w)]$$

selanjutnya diperoleh label dari masing-masing sisi di atas adalah

$$f(u_1 u_2) = k - [f(u_1) + f(u_2)] = 29 - [7 + 5] = 17$$

$$f(u_2 u_3) = k - [f(u_2) + f(u_3)] = 29 - [5 + 9] = 15$$

$$f(u_3 u_4) = k - [f(u_3) + f(u_4)] = 29 - [9 + 4] = 16$$

$$f(u_4u_5) = k - [f(u_4) + f(u_5)] = 29 - [4 + 11] = 14$$

$$f(u_5u_6) = k - [f(u_5) + f(u_6)] = 29 - [11 + 6] = 12$$

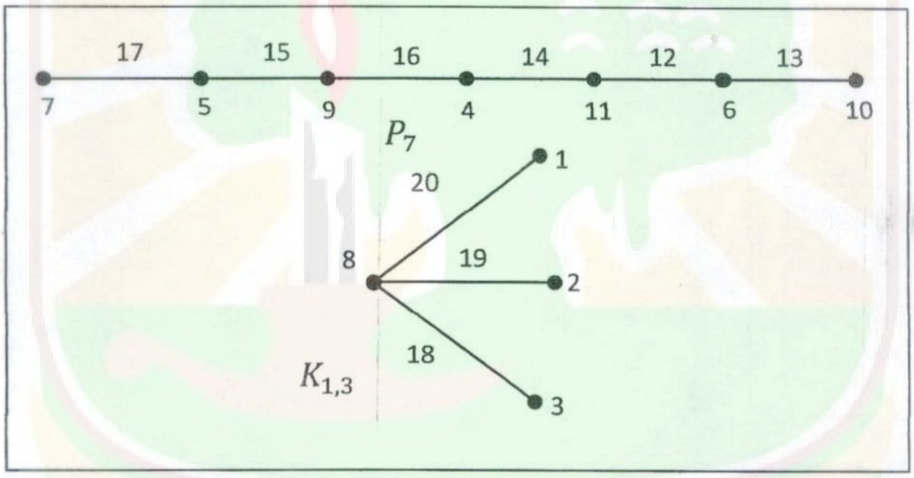
$$f(u_6u_7) = k - [f(u_6) + f(u_7)] = 29 - [6 + 10] = 13$$

$$f(v_1w) = k - [f(v_1) + f(w)] = 29 - [1 + 8] = 20$$

$$f(v_2w) = k - [f(v_2) + f(w)] = 29 - [2 + 8] = 19$$

$$f(v_3w) = k - [f(v_3) + f(w)] = 29 - [3 + 8] = 18$$

bila nilai-nilai pelabelan sisi ini dimasukkan ke dalam graf $F \cong P_7 \cup K_{1,3}$, dapat diperoleh graf dengan pelabelan titik dan sisi, seperti Gambar 3.2.37



Gambar 3.2.37 Pelabelan sisi ajaib super untuk *forest* $F \cong P_7 \cup K_{1,3}$.

Pada Gambar 3.2.37, terlihat bahwa pelabelan di atas merupakan pelabelan sisi ajaib super, karena untuk setiap u, v titik di $F \cong P_7 \cup K_{1,3}$ dan uv sisi maka $f(u) + f(v) + f(uv) = 29$. Ini berarti konstanta ajaib dari graf $F \cong P_5 \cup K_{1,1}$ adalah 29.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh pada Bab III, yaitu Pembahasan, dapat disimpulkan bahwa graf hutan (*forest*) F merupakan gabungan dari graf lintasan dengan m titik P_m, dimana $m = 4, 5, 6, 7$ dan graf bipartit lengkap dengan $(1, n)$ titik $K_{1,n}$, dimana $n = 1, 2, 3$, sehingga dapat ditulis $F \cong P_m \cup K_{1,n}$. Graf hutan $F \cong P_m \cup K_{1,n}$ yang mempunyai $m + n + 1$ titik dan $m + n - 1$ sisi adalah pelabelan sisi ajaib super bila dibedakan atas 4 kasus untuk m yaitu, $m \equiv 0 \pmod 4$, $m \equiv 1 \pmod 4$, $m \equiv 2 \pmod 4$ dan $m \equiv 3 \pmod 4$. Dalam hal ini, konstanta ajaib super dari graf hutan tersebut adalah $(m + n + 1) + (m + n - 1) + s$ dengan $s = \min\{f(u) + f(v) | uv \in E(F)\}$.

Akibatnya diperoleh label sisi $f(uv) = k - f(u) - f(v)$ untuk uv adalah sisi-sisi dari F.

4.2 Saran

Pada skripsi ini, Penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan masalah pelabelan sisi ajaib super pada graf lintasan gabung graf bipartit lengkap. Maka dari itu, untuk Penulisan skripsi selanjutnya, Penulis menyarankan untuk mengkaji mengenai pelabelan super sisi ajaib pada jenis graf lainnya. Misalnya graf dua lintasan pada graf *forest*.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Centeno, R. M. F, dkk. 2005.*On Edge-Magic Labelling of Certain Disjoint Unions of Graphs*. Australian journal of Combinatorics, 225-242.

[2] Wallis, W. D, dkk. 2000. *Edge-Magic Total Labelings*. Australasian Journal of Combinatorics, pp 177-190.

[3] Bondy, J.A. dan Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Applications*. London: The Macmillan Press Ltd.

[4] Munir, R. 2003. *Matematika Diskrit*. Bandung. Informatika.

[5] Haq, Asis As' Adi. 2010. *Pewarnaan Pada Graf Bipartisi Komplit* $K_{m.n}$ *dan Graf Tripartisi* $T_{2,n-1\ n}$ *dengan m, n Adalah Bilangan Asli (Skripsi)*. Universitas Islam Negeri (Uin) Maulana Malik Ibrahim Malang.

[6] Ngurah, Anak Agung Gede .2001. *Pelabelan Ajaib dan Anti Ajaib*. ITB.Bandung.*Tesis-S2,* tidak diterbitkan.

[7] J. Y. Park, J.H. Choi, and J-H. Bae, *On Super Edge-Magic Labelling of Some Graphs*, Bull. Korean Math. Soc. 45 (2008), 11-21.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Centeno, R. M. F, dkk. 2005.*On Edge-Magic Labelling of Certain Disjoint Unions of Graphs*. Australian journal of Combinatorics, 225-242.

[2] Wallis, W. D, dkk. 2000. *Edge-Magic Total Labelings*. Australasian Journal of Combinatorics, pp 177-190.

[3] Bondy, J.A. dan Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Applications*. London: The Macmillan Press Ltd.

[4] Munir, R. 2003. *Matematika Diskrit*. Bandung. Informatika.

[5] Haq, Asis As' Adi. 2010. *Pewarnaan Pada Graf Bipartisi Komplit* $K_{m.n}$ *dan Graf Tripartisi* $T_{2,n-1\ n}$ *dengan m, n Adalah Bilangan Asli (Skripsi)*. Universitas Islam Negeri (Uin) Maulana Malik Ibrahim Malang.

[6] Ngurah, Anak Agung Gede .2001. *Pelabelan Ajaib dan Anti Ajaib*. ITB.Bandung.*Tesis-S2,* tidak diterbitkan.

[7] J. Y. Park, J.H. Choi, and J-H. Bae, *On Super Edge-Magic Labelling of Some Graphs*, Bull. Korean Math. Soc. 45 (2008), 11-21.