BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Persamaan Schrödinger nonliner diskrit (SNLD) merupakan model diskrit nonlinier yang paling fundamental, karena persamaannya mendeskripsikan banyak fenomena penting dalam berbagai aplikasi, seperti dinamika sistem osilator nonharmonik terikat, perambatan berkas optik pada pandu gelombang nonlinier terikat, dan dinamika kondensasi Bose-Einstein [*Bose-Einstein Condentation (BEC)*][1]. Persamaan SNLD menarik untuk dikaji karena memiliki solusi khusus yang dikenal dengan istilah *soliton*. Solusi ini memiliki profil dan kecepatan yang tetap ketika merambat [2]. Dalam aplikasinya di bidang optik, soliton dapat direkayasa sebagai pembawa informasi yang dapat merambat pada media dengan jarak tempuh yang sangat jauh tanpa mengalami gangguan yang berarti. Kenyataan ini berperan penting dalam pengembangan teknologi informasi dan komunikasi di masa depan.

Bentuk umum dari persamaan SNLD diberikan oleh [1]

$$i\dot{\psi}_n = -C(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) + F(\psi_{n+1}, \psi_n, \psi_{n-1}), \tag{1.1.1}$$

dimana $\psi_n \equiv \psi_n(t) \in \mathbb{C}$ adalah fungsi gelombang pada waktu $t \in \mathbb{R}^+$ dan *site* $n \in \mathbb{Z}$, $\dot{\psi}_n$ menyatakan turunan fungsi ψ_n terhadap t, C menyatakan konstanta pengikat *(coupling constant)* dan F merupakan suku nonlinier. Pada persamaan SNLD (1.1.1) suku nonlinier F mempunyai beberapa bentuk, diantaranya [1]:

1. Kenonlinieran bertipe kubik:

$$F_{cub} = -|\psi_n|^2\psi_n. \tag{1.1.2}$$

2. Kenonlinieran bertipe kuintik:

$$F_{quin} = |\psi_n|^4\psi_n. \tag{1.1.3}$$

3. Kenonlinieran bertipe Ablowitz-Ladik (AL):

$$F_{AL} = -\frac{1}{2}|\psi_n|^2(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}). \tag{1.1.4}$$

Persamaan SNLD dengan suku nonlinear kubik (1.1.2) dan kuintik (1.1.3) dikenal sebagai persamaan yang *non-integrable* (tidak dapat diekspresikan solusi solitonnya secara eksak) [1]. Pada tahun 1975-1976, Ablowitz dan Ladik [4] memperkenalkan persamaan SNLD dengan suku nonlinier (1.1.4) dan menunjukkan bahwa persamaan tersebut *integrable*, dimana solusi eksaknya diberikan oleh [4]:

$$\psi_n(t) = \sinh(\chi)\text{sech}[\chi(n - ct)]e^{i(k+\omega t+\alpha)}, \tag{1.1.5}$$

dimana χ, k, α adalah parameter, $c = 2\sinh(\chi)\sin(k)/\chi$ dan $\omega = 2(\cosh(\chi)\cos(k)$ $-1)$.

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk mengaproksimasi solusi persamaan *non-integrable* adalah metode aproksimasi variasional (AV) [5]. Metode ini dikembangkan berdasarkan prinsip aksi terkecil (*least action*), atau dikenal juga dengan prinsip Hamiltonian. Prinsip ini menyatakan bahwa persamaan gerak ditentukan oleh titik-titik kritis dari aksi, yaitu integral dari Lagrangian terhadap waktu [6]. Keberhasilan metode ini sangat bergantung pada fungsi penduga (ansatz) yang digunakan dalam menghampiri solusi yang diinginkan.

Pada masalah persamaan SNLD kubik, metode AV telah digunakan oleh Aceves dkk [7] untuk mengaproksimasi solusi soliton *onsite*, yaitu solusi soliton yang berpusat pada satu *site*. Kemudian Kaup dkk [8] menerapkan metode AV untuk menghampiri solusi soliton *intersite*, yaitu soliton yang berpusat diantara dua *site*. Baru-baru ini, Syafwan [9] menggunakan metode AV untuk menentukan hampiran solusi soliton *twisted*, yaitu soliton intersite yang berbeda fasa, pada persamaan SNLD kubik dengan penambahan *parametik driving*. Fungsi ansatz yang digunakan dalam penelitian-penelitian tersebut berlaku untuk kasus $C \approx 0$ atau dikenal dengan istilah limit *anti-continuum*.

Untuk menetapkan validasi AV secara umum, Chong dkk [10] telah mengembangkan suatu teorema yang dapat dijadikan sebagai ukuran validasi hasil AV secara tepat pada kasus limit *anti-continuum*. Chong dkk mengkonfirmasikan bahwa fungsi penduga untuk soliton dengan parameter yang lebih banyak memberikan aproksimasi yang lebih akurat.

Dalam tesis ini, metode AV akan diterapkan untuk menentukan hampiran solusi *twisted* pada persamaan SNLD dengan kenonlinieran bertipe kubik-kuintik, yaitu diberikan oleh [14]

$$i\dot{\psi}_n = -C(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) - B|\psi_n|^2\psi_n + Q|\psi_n|^4\psi_n, \qquad (1.1.6)$$

dimana B dan Q berturut-turut menyatakan koefisien kenonlinieran kubik dan kuintik. Munculnya persamaan SNLD kubik-kuintik (1.1.6) tidak lepas dari hasil eksperimen terkini [14] yang menunjukkan bahwa efek nonlinier pada beberapa material pandu gelombang lebih baik dimodelkan dengan penambahan kenonlinearan kuintik, yaitu ketika $B, Q > 0$.

Metode AV pada persamaan SNLD kubik kuintik untuk soliton tipe *onsite* dan *intersite* telah dibahas secara berturut-turut dalam [11] dan [12]. Selanjutnya metode AV untuk soliton bertipe *twisted* juga telah dibahas dalam [13], yang memperbaiki hasil yang diperoleh sebelumnya dalam [9].

Studi pada tesis ini merupakan pengembangan dari penelitian Chong dkk [14], dimana aproksimasi solusi yang akan dicari adalah soliton *twisted* dengan menggunakan fungsi ansatz seperti yang diusulkan dalam [13].

1.2 Perumusan Masalah

Pada penelitian ini, kajian pada [13] tentang aproksimasi variasional pada persamaan SNLD kubik-kuintik (1.1.6) akan dilanjutkan dengan menggunakan fungsi ansatz seperti yang diusulkan dalam [13]. Selanjutnya akan diperiksa validasi hampiran solusi yang diperoleh dengan merujuk pada referensi [10].

1.3 Pembatasan Masalah

Penerapan metode AV dalam memperoleh solusi soliton *twisted* pada persamaan SNLD kubik-kuintik (1.1.6) dibatasi untuk solusi stasioner yang bernilai riil pada kasus limit *anti-continuum*, yaitu ketika $C \approx 0$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Menentukan hampiran solusi soliton *twisted* pada persamaan SNLD kubik-kuintik (1.1.6) dengan menggunakan metode AV.
2. Membandingkan hasil yang diperoleh secara analitik (AV) dengan hasil numerik.
3. Memeriksa validitas hasil yang diperoleh dari metode AV.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini bermanfaat dalam memperkaya kajian teoritis tentang soliton *twisted* pada persamaan Schrödinger nonlinier diskrit kubik-kuintik (1.1.6).

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan dalam tesis ini dibagi atas empat bab. Pada Bab I dibahas latar belakang masalah, rumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penelitian. Konsep dasar dan materi penunjang sebagai landasan teori diberikan pada Bab II. Selanjutnya pada Bab III dibahas penerapan metode AV dalam menentukan hampiran solusi soliton *twisted* pada persamaan SNLD kubik-kuintik beserta perhitungan numerik dan validasinya. Hasil yang diperoleh kemudian disimpulkan pada Bab IV.