

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi modern sangat bergantung pada kemampuan manusia dalam memodelkan fenomena alam dalam bahasa matematika. Dalam berbagai bidang, seperti dari mekanika antariksa, sirkuit elektronik, dan dinamika ekonomi, fenomena tersebut dipelajari melalui konsep sistem dinamis. Sistem dinamis memungkinkan untuk memahami suatu keadaan berubah dan berinteraksi dari waktu ke waktu.

Dalam matematika, pendekatan yang paling fundamental dan telah lama digunakan adalah sistem *Linear Time-Invariant* (LTI). Sistem LTI memiliki karakteristik bahwa parameter sistem tidak bergantung terhadap waktu, sehingga analisisnya relatif sederhana. Dalam sistem ini, kita dapat memprediksi perilaku masa depan hanya dengan menghitung angka-angka tetap yang menunjukkan kekuatan dan arah perubahan sistem. Karena sifatnya yang tidak berubah, perhitungan matematika yang digunakan cukup menggunakan rumus standar yang sudah umum diketahui oleh para insinyur dan matematikawan. Namun, kemudahan analisis tersebut memiliki kelemahan, yakni asumsi bahwa kondisi lingkungan dan komponen sistem

akan selalu tetap selamanya. Di dunia nyata, hampir tidak ada sistem yang benar-benar kaku dan tidak terpengaruh oleh usia, suhu, atau perubahan beban kerja.

Sistem *Linear Time-Varying* (LTV) mengatasi keterbatasan sistem LTI dengan memodelkan fenomena aktual. Pada sistem LTV, parameter berubah seiring berjalannya waktu. Perubahan ini dapat terjadi secara alami dalam berbagai situasi, seperti penurunan massa pesawat terbang karena konsumsi bahan bakar [1], penurunan kekakuan struktur jembatan seiring waktu, perubahan fisiologis selama perawatan, dan inflasi dan suku bunga dalam model ekonomi makro. Sistem LTV memberikan representasi terhadap realitas fisik yang lebih akurat, namun peningkatan kompleksitas ini diiringi dengan peningkatan kompleksitas matematis.

Tantangan utama dalam sistem LTV yaitu cara menentukan solusi yang tepat. Rugh [2] menunjukkan bahwa untuk menentukan solusi sistem LTV kita membutuhkan sebuah "peta perubahan" yang disebut dengan matriks transisi keadaan. Namun, menentukan peta ini cukup sulit karena ia harus memcatat setiap perubahan kecil yang terjadi setiap detik. Wu [3] memperkenalkan konsep baru yang disebut pasangan eigen diperluas (*extended eigenpairs*), yang mendefinisikan nilai eigen dan vektor eigen yang bergantung pada waktu. konsep ini memperluas definisi nilai eigen klasik dan memungkinkan untuk menganalisis sistem LTV secara menyeluruh.

Permasalahan kestabilan asimtotik sistem LTV merupakan tantangan kedua yang tidak kalah penting. Dalam penerapannya, masih banyak upaya

yang dilakukan untuk menganalisis sistem LTV hanya melihat nilai eigen $A(t)$. Wu [3] membuktikan kekeliruan metode ini dengan contoh nyata di mana sebuah sistem terlihat tenang di setiap detiknya, namun sebenarnya ia sedang bergerak menuju kehancuran atau ketidakstabilan. Hal ini terjadi karena arah gerak sistem pada sistem LTV bergantung terhadap waktu. Akibatnya, untuk menganalisis kestabilan asimtotik dari sistem LTV memerlukan dasar teoritis yang mempertimbangkan perilaku lengkap solusi, bukan hanya sekedar potret sesaat.

Kestabilan asimtotik menjamin bahwa jika sistem diberikan gangguan kecil atau memiliki kondisi awal yang tak nol, keadaan sistem akan meluruh kembali ke titik kesetimbangan seiring berubahnya waktu. Tanpa jaminan kestabilan ini, model sistem LTV beresiko untuk menghasilkan hasil yang divergen (tidak terbatas). Dalam penerapannya, hal ini dapat berarti mesin yang meledak, jembatan yang runtuh, atau kegagalan sistem kendali pesawat yang fatal. Oleh karena itu, Wang [4] mengembangkan upaya untuk memperoleh solusi eksplisit dan syarat kestabilan untuk kelas tertentu sistem LTV. Perkembangan ini memberikan perspektif baru untuk menerapkan teori sistem LTV dalam teknologi modern yang membutuhkan ketepatan tinggi.

Berdasarkan pertimbangan mendalam tersebut, penelitian skripsi ini bertujuan untuk mengkaji secara komprehensif solusi dan kestabilan asimtotik pada sistem *Linear Time-Varying* menggunakan pasangan eigen diperluas. Hal ini dapat dicapai dengan menggabungkan gagasan klasik dari Rugh [2] dan Wu [3] serta hasil terbaru dari Wang [4]. Penelitian ini diharapkan dapat

memberikan kontribusi teoritis yang jelas dalam menentukan solusi dan syarat kestabilan sistem yang parameternya yang bergantung pada waktu.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, penelitian ini difokuskan pada pemecahan masalah-masalah berikut

1. Bagaimana menentukan solusi umum pada sistem *Linear Time-Varying* (LTV) dengan menggunakan metode pasangan eigen diperluas (*extended eigenpairs*)?
2. Bagaimana menentukan kestabilan asimtotik sistem *Linear Time-Varying* (LTV) berdasarkan analisis terhadap perilaku norm solusi yang dinyatakan dalam pasangan eigen diperluas (*extended eigenpairs*)?

1.3 Batasan Masalah

Agar pembahasan dalam penelitian ini lebih spesifik dan mendalam, beberapa batasan masalah ditetapkan sebagai berikut:

1. Penelitian ini hanya mengkaji sistem linear bergantung pada waktu pada waktu kontinu.
2. Fokus analisis dibatasi pada kestabilan asimtotik di titik kesetimbangan nol, untuk memastikan sistem dapat kembali ke kondisi setimbang seiring bertambahnya waktu.

3. Penentuan solusi dilakukan melalui pendekatan analitik dengan menggunakan konsep matriks transisi keadaan dan *extended eigenpairs*.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan permasalahan di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan solusi umum pada sistem *Linear Time-Varying* (LTV) dengan metode pasangan eigen diperluas (*extended eigenpairs*).
2. Menentukan kestabilan asimtotik sistem *Linear Time-Varying* (LTV) berdasarkan analisis terhadap perilaku norm solusi yang dinyatakan dalam pasangan eigen diperluas (*extended eigenpairs*).

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut : Bab I Pendahuluan yang memuat latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian dan, sistematika penulisan. Bab II Landasan teori yang memuat materi dasar dan materi pendukung yang digunakan untuk penyelesaian masalah dalam tugas akhir ini. Bab III Pembahasan yang menampilkan hasil analisis berdasarkan penerapan metode *extended eigenpairs* pada sistem LTV. Bab IV Kesimpulan yang memuat kesimpulan yang diperoleh dari hasil penelitian terkait solusi eksplisit dan kriteria stabilitas sistem LTV.