

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Analisis fungsional adalah salah satu cabang matematika yang membahas mengenai sifat-sifat fungsional, yaitu operator linear pada ruang vektor real. Salah satu pengembangan dari cabang analisis fungsional adalah terkait ruang norm serta sifat-sifat topologi yang terkait pada ruang norm.

Norm dapat dipandang sebagai fungsi yang digunakan untuk mengukur panjang. Suatu ruang vektor yang dilengkapi dengan norm, disebut sebagai ruang norm atau ruang bernorm (*normed space*). Dalam hal ini, norm perlu memiliki sifat-sifat kepositifan, linearitas dan ketaksamaan segitiga. Gähler [1] memperkenalkan konsep dari norm-2 yang secara geometris dapat dipandang sebagai fungsi untuk menghitung "luas". Pada ruang

$$\ell^p := \left\{ x = (\xi_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty, p \geq 1, \xi_n \in \mathbb{R} \right\},$$

Gunawan [2] menunjukkan bahwa ruang norm-2 dapat menginduksi suatu norm, yakni  $\|x\|_p^* := (\|x, a\|_p^p + \|x, b\|_p^p)^{1/p}$  untuk  $\{a, b\}$  adalah himpunan yang bebas linear. Kemudian, dalam penelitian tersebut juga dibuktikan ekuivalensi dari  $\|\cdot\|_p^*$  dengan norm biasa pada  $\ell^p$ , yaitu diperoleh  $\|x\|_p \leq \|x\|_p^* \leq 2^{1/p} \|x\|_p$ . Selanjutnya, Idris, dkk [3] membuktikan ekuivalensi antara  $\|\cdot\|_p^*$  dan norm biasa

pada  $\ell^p$  dengan cara yang berbeda, yaitu diperoleh

$$\frac{2 \|a, b\|_p}{3(\|a\|_p + \|b\|_p)} \|x\|_p \leq \|x\|_o \leq 2^{1-1/p} (\|a\|_p^p + \|b\|_p^p)^{1/p} \|x\|_p,$$

untuk  $x \in \ell^p$  dan  $\{a, b\}$  himpunan bebas linear.

Di sisi lain, Gordji, dkk [4] memperkenalkan konsep norm *cone* yang menggunakan perumuman bilangan real positif (*cone*) sebagai daerah hasil dari norm. Selanjutnya, Sahiner dan Yigit [5] menggabungkan konsep norm-2 dan norm *cone* menjadi norm-2 *cone*. Dalam penelitian tersebut, dikaji sifat-sifat kekonvergenan barisan di norm-2 *cone* dan teorema titik tetap dengan menggunakan pemetaan kontraktif. Lebih jauh, Sadjidon, dkk [6] mengaitkan norm-2 *cone* dengan norm-2 pada  $\ell^2$  dengan mendefinisikan norm-2 *cone*  $\|\cdot, \cdot\| : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  sebagai  $\|x, y\|_C := \sum_{k=1}^n e_k \|x, y\|_{\ell^2}$ , untuk  $x, y \in \ell^2$  dan  $\{e_1, e_2, \dots, e_i, \dots\}$  adalah basis kanonik dari  $\mathbb{R}^n$ . Hal ini memberikan penghubung antara ruang norm-2 dan norm-2 *cone*. Kemudian pada 2022, Sadjidon, dkk [7] mendefinisikan norm *cone*  $\|\cdot\|_C : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  sebagai

$$\|x\|_C := \sum_{k=1}^n e_k \|x\|,$$

untuk  $(\ell^2, \|\cdot\|)$  ruang norm,  $x \in \ell^2$  dan  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  basis kanonik dari  $\mathbb{R}^n$ .

Berdasarkan paparan di atas, terlihat bahwa belum ada yang mengkaji keterkaitan antara ruang norm *cone* dan ruang norm-2 *cone*. Terutama, ekuivalensi antara norm *cone* yang diinduksi dari norm-2 *cone* dan norm *cone* lainnya, khususnya pada ruang barisan  $\ell^p$ . Hal ini yang membedakan penelitian ini dari studi sebelumnya. Dalam penelitian ini, juga dikaji beberapa kajian topologi seperti barisan konvergen, barisan Cauchy, dan sifat kelengkapan dari ruang

barisan  $\ell^p$  terhadap norm *cone* yang diinduksi. Pada akhirnya, sifat-sifat tersebut akan digunakan untuk memformulasikan sebuah Teorema Titik Tetap di  $\ell^p$  terhadap norm *cone* yang diinduksi.

## 1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana norm *cone* yang diinduksi dari norm-2 *cone*?
2. Bagaimana ekuivalensi antara norm *cone* yang diinduksi dari norm-2 *cone* dengan norm *cone* biasa?
3. Bagaimana membuktikan ruang norm *cone* dengan norm *cone* yang diinduksi norm-2 *cone* adalah ruang Banach *cone* dan aplikasinya pada Teorema Titik Tetap?

## 1.3 Batasan Masalah

Rumusan masalah di atas hanya dibahas pada ruang barisan  $\ell^p$  untuk  $p \geq 1$ .

## 1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini antara lain:

1. Mengkonstruksi norm *cone* yang diinduksi dari norm-2 *cone* pada  $\ell^p$ ,

2. Membuktikan ekuivalensi antara norm *cone* yang diinduksi dari norm-2 *cone* dan norm *cone* pada  $\ell^p$ ,
3. Membuktikan ruang norm *cone* dengan norm *cone* yang diinduksi dari norm-2 *cone* adalah ruang Banach *cone*, dan dari hasil tersebut diformulasikan sebuah Teorema Titik Tetap.

## 1.5 Sistematika Penulisan

Proposal tesis ini terdiri dari Bab I Pendahuluan, yang menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah batasan masalah dan tujuan penelitian. Kemudian Bab II Tinjauan Pustaka menjelaskan tentang beberapa konsep dan teori pendukung yang digunakan dalam penelitian. Bab III Pembahasan menjelaskan tentang pembahasan dari penelitian ini. Bab IV Kesimpulan dan Saran memaparkan ringkasan dari hasil penelitian ini dan rekomendasi pengembangan penelitian yang terkait.