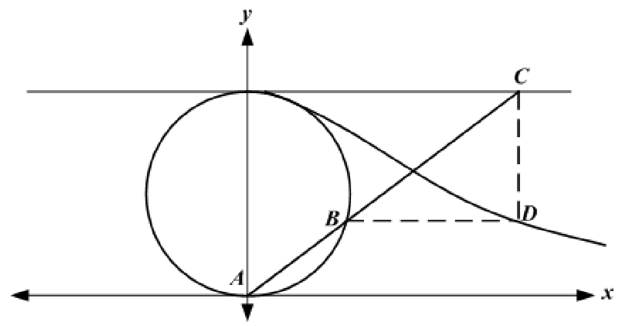
BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Suatu fungsi $f(x) = \pi^{-1}(1 + x^2)^{-1}$ dengan $x \in \mathbb{R}$, yang dikenal saat ini sebagai fungsi kepadatan peluang distribusi Cauchy baku, berasal dari penelitian para matematikawan selama lebih dari tiga abad. Penelitian tersebut berawal dari kurva yang dipelajari oleh Pierre de Fermat pada tahun 1630 yang kemudian dipelajari oleh Sir Isaac Newton, Gottfried Leibniz, Christian Huygens, Luigi Guido Grandi, dan Maria Gaenata Agnesi.[**10**]

Pada tahun 1703, Guido Grandi mengkonstrusi kurva yang dipelajari Fermat dan pada tahun 1718 diberi nama *versoria* (Latin) atau *versiera* (Italia), yang berarti *rope that turns a sail*. Penamaan tersebut berdasarkan bentuk kurva yang dapat dilihat pada Gambar 1.1. Karya Guido Grandi ini ditulis oleh Maria Agnesi dalam bukunya, *Instituzioni analitiche iklan uso della giovent italiana*, yang diterbitkan pada tahun 1748. Sebelum tahun 1760, John Colson menerjemahkan buku Maria Agnesi ke dalam bahasa inggris yang dipublikasikan pada tahun 1801. Oleh karena kekeliruan Colson menerjemahkan *la versiera* menjadi *l'aversiera* yang berarti *the witch* atau *the she-devil*, kurva ini lebih dikenal dengan nama *Witch of Agnesi* pada abad ke-19 hingga sekarang.[**10**]



Gambar 1.1. *Witch of Agnesi.*

Sebelum tahun 1824, bentuk fungsi kepadatan peluang distribusi Cauchy baku belum muncul hingga Augustin Louis Cauchy memperkenalkannya pada tahun 1853 [**10**]. Distribusi Cauchy merupakan distribusi peluang kontinu. Distribusi Cauchy yang dinotasikan dengan $X \sim Cauchy(a, b)$, dimana X adalah peubah acak dan a, b adalah parameter, memiliki fungsi kepadatan peluang sebagai berikut

$$f_X(x) = \frac{b}{\pi(b^2 + (x-a)^2)}, \tag{1.1}$$

untuk setiap $-\infty < x < \infty$, $-\infty < a < \infty$, dan $b > 0$.

Dalam ilmu fisika, distribusi Cauchy dikenal sebagai distribusi Lorentz (Hendrik Lorentz), distribusi Cauchy Lorentz, fungsi Lorentzian, atau distribusi Breit-Wigner yang menjelaskan profil energi dan resonansi nuklir.

Suatu distribusi dapat ditentukan karakterisasinya. Karakterisari dari suatu distribusi yang dimaksud adalah nilai harapan, variansi, *skewness*, kurtosis, fungsi pembangkit momen, dan fungsi karakteristik. Dalam hal ini, distribusi Cauchy hanya memiliki satu karakteristik, yaitu fungsi karakteristik seperti yang telah dibahas oleh Yulita [**11**].

Fungsi karakteristik dari suatu peubah acak X dinotasikan dengan $\varphi_X(t)$ dan didefinisikan sebagai

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}], \tag{1.2}$$

dimana $e^{itX} = cos(tX) + i\ sin(tX)$ dan i adalah bilangan imajiner [**4,6**]. Definisi fungsi karakteristik hampir sama dengan definisi fungsi pembangkit momen. Perbedaannya hanya pada keberadaan bilangan imajiner yang menunjukkan bahwa ruang lingkup fungsi karakteristik adalah ruang kompleks sedangkan fungsi pembangkit momen terbatas pada ruang riil saja. Dengan kata lain, fungsi karakteristik lebih bersifat umum daripada fungsi pembangkit momen. Oleh karena itu, suatu distribusi bisa saja tidak memiliki fungsi pembangkit momen, tetapi fungsi karakteristiknya selalu ada. Hal inilah yang berlaku pada distribusi Cauchy.

Jika distribusi Cauchy diberikan suatu konstanta penstabil maka distribusi Cauchy ini akan memiliki nilai harapan, variansi, *skewness*, kurtosis, dan fungsi pembangkit momen. Selain itu, distribusi Cauchy dengan konstanta penstabil tentunya juga memiliki fungsi karakteristik [**11**]. Fungsi karakteristik dari suatu peubah acak dapat digunakan untuk menentukan konvolusi dari distribusi.

Konvolusi adalah penjumlahan dari peubah-peubah acak bebas. Dengan menggunakan konvolusi dapat ditentukan distribusi baru dari suatu peubah acak yang merupakan jumlah dari peubah-peubah acak dari distribusi sebelumnya. Misalkan penjumlahan peubah acak

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \tag{1.3}$$

untuk semua peubah acak $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$ yang berdistribusi Cauchy. Dengan menggunakan fungsi kepadatan peluang untuk masing-masing peubah acak Cauchy maka dapat diperoleh fungsi kepadatan peluang f_{S_n}. Konvolusi dari peubah acak X_i yang berdistribusi Cauchy dapat ditentukan untuk parameter yang sama dan parameter yang berbeda. Hal tersebut telah dibahas oleh Oktasari dkk [**7**].

Belum banyak literatur yang membahas tentang konvolusi distribusi Cauchy. Karena itu, akan sangat menarik untuk mengkaji lebih jauh tentang konvolusi distribusi Cauchy ini. Khususnya, konvolusi dari distribusi Cauchy dengan konstanta penstabil. Hal ini karena keunikan dari distribusi Cauchy, dimana distribusi Cauchy yang hanya memiliki fungsi karakteristik jika diberi suatu konstanta penstabil akan memiliki semua karakterisasi yang diinginkan. Untuk itu, pada penelitian ini akan dikaji tentang konvolusi dan karakterisasi dari distribusi Cauchy dengan konstanta penstabil.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas pada tesis ini adalah

1. Bagaimana konvolusi dari distribusi Cauchy dengan konstanta penstabil
2. Bagaimana karakterisasi dari konvolusi distribusi Cauchy dengan konstanta penstabil

1.3 Pembatasan Masalah

Karena kompleksitas fungsi kompleks, masalah yang akan dikaji pada tesis ini dibatasi pada konvolusi dan karakterisasi distribusi Cauchy baku dengan konstanta penstabil.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian pada tesis ini adalah menentukan konvolusi dan karakterisasi dari distribusi Cauchy baku dengan konstanta penstabil.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memperluas wawasan penulis serta pembaca pada umumnya, memberikan sumbangan terhadap perkembangan ilmu pengetahuan tentang konvolusi dan karakterisasi distribusi Cauchy baku dengan konstanta penstabil, dan dapat dijadikan referensi untuk menentukan konvolusi dan karakterisasi dari distribusi lain.