

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah salah satu cabang ilmu matematika yang mempelajari mengenai terminologi, jenis dan sifat graf. Menurut Chartrand dan Lesniak, suatu graf  $G$  adalah himpunan tak kosong berhingga  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  yang disebut himpunan titik dan  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  merupakan himpunan sisi. Teori graf dapat diterapkan dalam menggambarkan berbagai macam struktur agar menjadi mudah untuk dipahami, seperti pada jaringan komunikasi, transportasi, riset operasi dan sebagainya.

Seiring perkembangan zaman teori graf diperkenalkan berbagai konsep baru, diantaranya dimensi metrik dari suatu graf yang diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1975. Pada tahun 1976, Harary dan Melter secara independen juga memperkenalkan konsep yang sama. Misalkan  $G$  adalah suatu graf terhubung nontrivial dengan himpunan titik  $V(G)$ . Suatu himpunan  $W \subset V(G)$  merupakan himpunan pembeda dari  $G$  jika  $d(u, x) \neq d(v, x)$  untuk sembarang titik  $u, v \in V(G)$  dan beberapa titik  $x \in W$ , dimana  $d(u, x)$  menyatakan jarak, yaitu panjang lintasan *path* terpendek dari titik  $x$ . Himpunan pembeda dengan kardinalitas terkecil disebut himpunan pembeda minimum atau basis dan banyaknya anggota pada basis disebut dimensi metrik. Hingga saat ini telah muncul beber-

apa variasi dari himpunan pembeda dan salah satunya yaitu himpunan pembeda lokal yang diperkenalkan oleh Okamoto et al [1].

Dimensi metrik adalah salah satu konsep yang berkaitan dengan teori graf. Dalam menentukan dimensi metrik dari suatu graf, terdapat beberapa konsep yang digunakan. Pertama adalah konsep jarak antara dua titik pada suatu graf dan konsep lainnya adalah himpunan pembeda. F. Harary dan R. A. Melter adalah matematikawan yang pertama kali memperkenalkan penelitian tentang konsep dimensi metrik [2].

Dimensi metrik dalam kehidupan sehari-hari dapat ditemukan pada berbagai sistem. Pertama dalam sistem navigasi jalan, persimpangan jalan dapat dimodelkan sebagai titik dan jalan raya sebagai sisi, sehingga posisi kendaraan dapat ditentukan secara unik hanya dengan mengetahui jarak ke sejumlah titik referensi GPS (*global positioning system*) minimum di mana dalam teori graf disebut sebagai dimensi metrik. Kedua pada jaringan komunikasi, dimana posisi pengguna dapat dilacak berdasarkan jarak relatif terhadap beberapa menara BTS (*base transceiver station*), tanpa harus melibatkan semua menara yang ada.

Diberikan suatu graf terhubung  $G$ , misalkan  $u$  dan  $v$  adalah titik-titik dalam  $G$ . Misal  $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\}$  suatu himpunan terurut dari titik-titik dalam graf terhubung  $G$  dan titik  $v$  di  $V(G)$  representasi jarak dari titik  $v$  terhadap  $W$  adalah  $r(v|W) = \{d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k)\}$ . Jika  $r(v|W)$  untuk setiap titik  $v \in V(G)$  berbeda, maka  $W$  disebut himpunan pembeda dari  $G$ . Himpunan dengan kardinalitas (banyak anggota) minimum disebut

himpunan pemisah minimum atau basis metrik. Kardinalitas dari basis metrik disebut metrik dari  $G$ , yang dinotasikan  $\dim(G)$ . Dengan demikian dimensi metrik pada graf  $G$  adalah kardinalitas minimum himpunan pembeda  $G$  [3].

Saputro dkk membahas dimensi metrik graf yang dihasilkan dari operasi perkalian *lexicographic* [4]. Selain itu Rinurwati dkk membahas dimensi metrik lokal dari graf yang memiliki  $m$ -pendant [5]. Tomescu dkk membahas dimensi metrik pada beberapa graf reguler infinit [6]. M. Ali dkk membahas graf-graf yang memuat siklus dan yang memiliki dimensi metrik konstan [7] dan S Wahyudi dkk membahas dimensi metrik dari pengembangan graf kincir [8].

Pada [9] telah dibahas tentang penentuan dimensi metrik dari graf bipartit lengkap  $K_{s,t}(s, t \geq 1)$ ,  $K_s + K_t(s \geq 1, t \geq 2)$  dan graf lengkap  $K_s + (K_1 \cup K_t)(s, t \geq 1)$ . Selanjutnya pada [10] dibahas dimensi metrik graf lintasan  $(P_m)$  dan graf lengkap  $(K_n)$  dimana  $P_m + P_n, K_m + G$  untuk sebarang graf terhubung  $G$  dan  $P_m + K_n$ . Pada tahun 2025, Ponraj ddk[11] menentukan pelabelan terhadap beberapa graf yang memuat siklus. Salah satu graf yang ditentukan adalah graf Djembe yang dinotasikan dengan  $(Dj_n)$ . Sedangkan graf roda  $W_n$  adalah graf yang dibentuk dari siklus  $(C_{n-1})$  dengan menambahkan satu titik pusat  $w$  yang dihubungkan ke semua titik pada siklus [9].

Berdasarkan penelusuran literatur graf Djembe merupakan modifikasi dari graf roda. Graf roda terbentuk dari sebuah lingkaran dengan satu titik pusat yang dihubungkan ke semua titik lingkaran. Pada graf Djembe setiap titik pada lingkarannya juga dihubungkan dengan membentuk lengkungan didalamnya yang membentuk seperti alat musik Djembe. Penelitian ini menentukan

dimensi metrik graf Djembe ( $Dj_n$ ). Karena penentuan dimensi metrik pada graf Djembe belum pernah ada yang meneliti. Jadi dimensi metrik pada graf Djembe dimulai dari  $n \geq 3$ , karena jika  $n \geq 2$  maka tidak akan memenuhi definisi.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana menentukan dimensi metrik pada graf Djembe ( $Dj_n$ ), dengan syarat  $n \geq 3$ .

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah, tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan dimensi metrik pada graf Djembe ( $Dj_n$ ).

## 1.4 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tesis ini terdiri dari Bab I sebagai pendahuluan yang terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan. Pada Bab II terdiri dari landasan teori, definisi graf dan konsep dasar graf serta materi tentang dimensi metrik. Pada Bab III terdiri dari hasil dan pembahasan dari dimensi metrik graf Djembe ( $Dj_n$ ). Pada bab IV terdiri dari kesimpulan dan saran.