

**Metode Persamaan Riccati Proyektif dan Aplikasinya
pada Penyelesaian Persamaan Lotka-Voltera Diskrit dan
Korteweg-de Vries Diskrit**

TESIS

**OLEH
DEASY WAHYUNI
NBP. 1220433007**



**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2016**

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

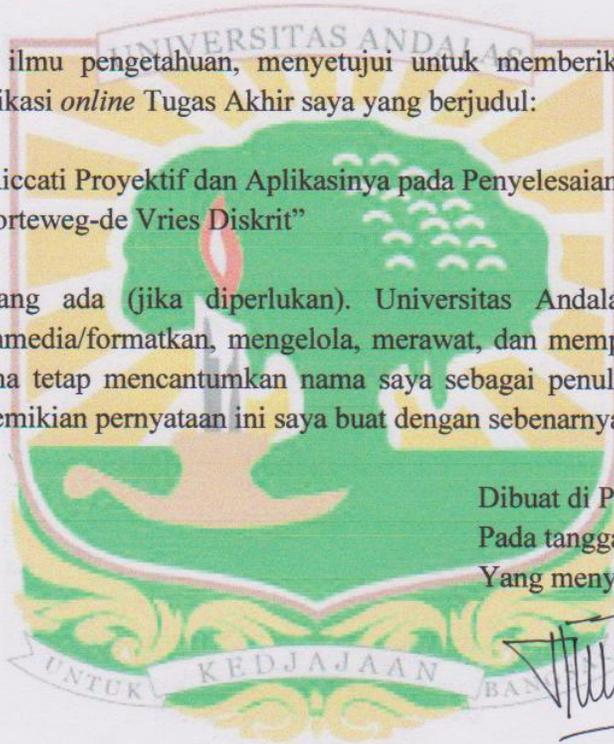
Saya mahasiswa Universitas Andalas yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama lengkap : Deasy Wahyuni, S.Si
No. BP : 1220433007
Program Studi : Matematika
Fakultas : MIPA
Jenis Tugas Akhir : Tesis

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Andalas hak atas publikasi *online* Tugas Akhir saya yang berjudul:

“Metode Persamaan Riccati Proyektif dan Aplikasinya pada Penyelesaian Persamaan Lotka-Volterra Diskrit dan Korteweg-de Vries Diskrit”

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Universitas Andalas juga berhak untuk menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola, merawat, dan mempublikasikan karya saya tersebut di atas selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta. Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.



Dibuat di Padang
Pada tanggal 26 Februari 2016
Yang menyatakan,

(Deasy Wahyuni, S.Si)

Judul Penelitian : Metode Persamaan Riccati Proyektif dan Aplikasinya pada Penyelesaian Persamaan Lotka-Voltera Diskrit dan Korteweg-de Vries Diskrit

Nama Mahasiswa : Deasy Wahyuni

No. Buku Pokok : 1220433007

Program Studi : Magister Matematika

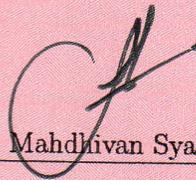
Tesis ini telah diuji dan dipertahankan di depan sidang panitia ujian akhir Magister Matematika pada Program Pascasarjana Universitas Andalas dan dinyatakan lulus pada tanggal 26 Februari 2016.

Menyetujui,

1. Komisi Pembimbing

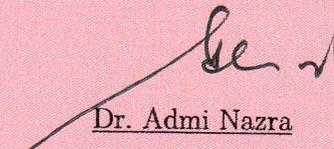
Ketua

Anggota



Dr. Mahdihan Syafwan

NIP. 19820803 200604 1 001



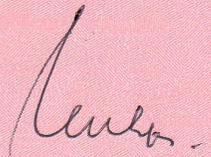
Dr. Admi Nazra

NIP. 19730330 199903 1 008

2. Koordinator Program Studi

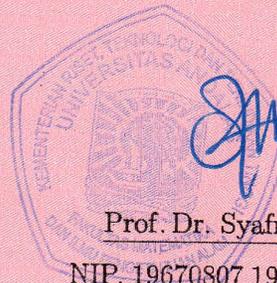
3. Dekan FMIPA

Magister Matematika



Dr. Muhafzan

NIP. 19670602 199302 1 002



Prof. Dr. Syafrizal Sy

NIP. 19670807 199309 1 001

Metode Persamaan Riccati Proyektif dan Aplikasinya pada Penyelesaian Persamaan Lotka-Voltera Diskrit dan Korteweg-de Vries Diskrit

Oleh: DEASY WAHYUNI

(Di bawah bimbingan Dr. Mahdhivan Syafwan Dan Dr. Admi Nazra)

RINGKASAN

Tesis ini membahas penurunan metode persamaan Riccati proyektif dan langkah-langkahnya dalam menyelesaikan persamaan diferensial beda. Secara khusus, metode ini digunakan untuk menyelesaikan persamaan Lotka-Voltera diskrit dan Korteweg-de Vries diskrit.

Pandang bentuk umum dari persamaan diferensial-beda berikut:

$$H(u_{n+n_1}(t), \dots, u_{n+n_k}(t), u'_{n+n_1}(t), \dots, u'_{n+n_k}(t), \dots, u_{n+n_1}^{(r)}(t), \dots, u_{n+n_k}^{(r)}(t)) = 0, \quad (0.0.1)$$

dengan $n, n_j \in \mathbb{Z}$, dimana u_i menyatakan variabel tak-bebas ke- i , t menyatakan variabel bebas, dan $u_i^{(r)}(t)$ menyatakan turunan ke- r dari u_i terhadap t . Adapun langkah-langkah umum dalam metode persamaan Riccati proyektif adalah:

(i) Lakukan transformasi gelombang berjalan

$$u_n(t) = U(\xi_n),$$

dengan $\xi_n = dn + ct + \xi_0$, ke persamaan diferensial-beda yang ingin diselesaikan.

(ii) Tulis solusi persamaan yang dihasilkan pada langkah (i) dalam bentuk

$$U(\xi_n) = A_0 + \sum_{i=1}^N (A_i f(\xi_n) + B_i g(\xi_n)) f^{i-1}(\xi_n), \quad (0.0.2)$$

dimana A_0, A_i, B_i adalah konstanta-konstanta yang akan ditentukan nilainya nanti, N diperoleh dengan melakukan proses *dominant balance*, yaitu antara orde tertinggi yang muncul pada suku nonlinier dan suku turunan, sedangkan $f(\xi_n)$ dan $g(\xi_n)$ memenuhi persamaan Riccati proyektif. Persamaan Riccati proyektif tersebut mempunyai tiga tipe solusi yaitu: $pq < 0$, $pq > 0$ dan $q = 0$.

(iii) Substitusikan persamaan (0.0.2), persamaan Riccati proyektif ke dalam persamaan yang dihasilkan pada langkah (i) dan tetapkan nol untuk semua koefisien dari $f^i(\xi_n)g^j(\xi_n)$, dengan $j = 0, 1$ dan $i = 0, 1, \dots$, sehingga diperoleh sistem persamaan aljabar nonlinier terhadap A_0, A_i, B_i, c, d .

(iv) Selesaikan sistem persamaan yang dihasilkan pada langkah (iii) dengan bantuan software Maple, sehingga diperoleh solusi untuk A_0, A_i, B_i, c, d .

(v) Substitusikan nilai-nilai A_0, A_i, B_i, c, d yang diperoleh ke persamaan (0.0.2), sehingga didapatkan solusi untuk persamaan diferensial-beda.

Dari perhitungan yang dilakukan diperoleh beberapa solusi, termasuk solusi soliton.

**Metode Persamaan Riccati Proyektif dan Aplikasinya
pada Penyelesaian Persamaan Lotka-Voltera Diskrit dan
Korteweg-de Vries Diskrit**

TESIS

**Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister
Matematika pada Program Pascasarjana Universitas Andalas**

OLEH :

DEASY WAHYUNI

1220433007



**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS**

PADANG

2016

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Dengan ini saya menyatakan bahwa tesis yang saya tulis dengan judul: **"Metode Persamaan Riccati Proyektif dan Aplikasinya pada Penyelesaian Persamaan Lotka-Voltera Diskrit dan Korteweg-de Vries Diskrit"** adalah hasil kerja/karya saya sendiri dan bukan merupakan jiplakan dari hasil kerja/karya orang lain, kecuali kutipan yang sumbernya dicantumkan. Jika di kemudian hari pernyataan ini tidak benar, maka status kelulusan dan gelar yang saya peroleh menjadi batal dengan sendirinya.

Judul Penelitian : Metode Persamaan Riccati Proyektif dan Aplikasinya pada Penyelesaian Persamaan Lotka-Voltera Diskrit dan Korteweg-de Vries Diskrit

Nama Mahasiswa : Deasy Wahyuni

No. Buku Pokok : 1220433007

Program Studi : Magister Matematika

Tesis ini telah diuji dan dipertahankan di depan sidang panitia ujian akhir Magister Matematika pada Program Pascasarjana Universitas Andalas dan dinyatakan lulus pada tanggal 26 Februari 2016.

Menyetujui,

1. Komisi Pembimbing

Ketua

Anggota

Dr. Mahdhivan Syafwan

NIP. 19820803 200604 1 001

Dr. Admi Nazra

NIP. 19730330 199903 1 008

**2. Koordinator Program Studi
Magister Matematika**

3. Dekan FMIPA

Dr. Muhafzan

NIP. 19670602 199302 1 002

Prof. Dr. Syafrizal Sy

NIP. 19670807 199309 1 001

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Deasy Wahyuni, S.Si dilahirkan di Dumai pada tanggal 16 Desember 1987. Penulis merupakan anak pertama dari tiga bersaudara dari pasangan suami istri H. Marwan dan Hj. Delima Dewi, B.Ac. Penulis mengikuti pendidikan di TK Lancang kuning Dumai-Riau pada tahun 1992-1994, SDN 010 Dumai-Riau pada tahun 1994-2000, MtS Al-Huda Dumai-Riau pada tahun 2000-2003, SMAN 2 Dumai-Riau pada tahun 2003-2006 dan melanjutkan pendidikan strata satu (S1) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau tahun 2006-2012. Pada tahun 2012, penulis diterima sebagai mahasiswa Program Studi Pascasarjana Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Allah SWT yang senantiasa memberikan rahmat dan karunia-Nya sehingga tesis yang berjudul **Metode Persamaan Riccati Proyektif dan Aplikasinya pada Penyelesaian Persamaan Lotka-Voltera Diskrit dan Korteweg-de Vries Diskrit** dapat diselesaikan. Tujuan penulisan tesis ini adalah merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister of Sains (M.Si) pada Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas Padang.

Dalam menyelesaikan tesis ini, penulis memperoleh bantuan moril maupun materil dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan sebagai ketua komisi pembimbing dan Bapak Dr. Admi Nazra sebagai anggota komisi pembimbing yang selalu meluangkan waktu, membimbing serta memberi saran dan masukan kepada penulis dalam menyelesaikan tesis ini.
2. Bapak Prof. Dr. Syafrizal Sy, Bapak Dr. Jenizon dan Ibu Dr. Lyra Yulianti selaku penguji yang telah meluangkan waktu serta memberi saran dan masukan kepada penulis dalam penyempurnaan tesis ini.
3. Bapak Dr. Muhafzan selaku penguji ujian akhir dan Koordinator Pendidikan Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas.

4. Bapak dan Ibu dosen beserta staf Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas, terima kasih atas ilmu yang telah diberikan kepada penulis selama ini.
5. Teristimewa kepada kedua orangtuaku yang tercinta dan adik-adikku tersayang dan seluruh keluarga besar yang selalu mendukung penulis.
6. Seluruh mahasiswa/i Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas.
7. Seluruh mahasiswa/i Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas.
8. Pihak yang telah memberikan do'a dan membantu penyelesaian tesis ini.

Penulisan tesis ini tentunya masih jauh dari kesempurnaan dan tidak luput dari berbagai kekurangan, karena terbatasnya ilmu dan pengalaman yang penulis miliki. Oleh karena itu, penulis dengan sepuh hati mengharapkan kritik dan saran agar kedepannya diperoleh hasil yang lebih baik.

Penulis berharap agar tesis ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkannya, aamiin.

Padang, Februari 2016

Deasy Wahyuni

ABSTRAK

Dalam tesis ini akan dijelaskan kembali penurunan persamaan metode Riccati Proyektif dalam menyelesaikan persamaan diferensial-beda. Secara khusus metode ini diterapkan pada penyelesaian persamaan Lotka-Voltera diskrit dan persamaan Korteweg-de Vries diskrit. Dengan bantuan Maple, diperoleh sejumlah solusi eksak dari persamaan tersebut termasuk solusi soliton dalam bentuk fungsi sinh dan cosh.

Kata kunci : Metode persamaan Riccati proyektif, persamaan Lotka-Voltera diskrit, persamaan Korteweg-de Vries diskrit, persamaan diferensial-beda.

ABSTRACT

In this thesis we will explain the derivation of projective Riccati equations method in solving difference-differential equations. In particular, this method is applied to solve a discrete Lotka-Volterra equation and a discrete Koerteweg-de Vries equation. With the help of Maple, we obtain a number of exact solutions to the equations, including soliton solutions expressed by hyperbolic functions of *sinh* and *cosh*.

Kata kunci : projective Riccati equation method, discrete Lotka-Volterra equation, discrete Korteweg-de Vries equation, difference differential equations.

DAFTAR ISI

ABSTRAK	i
ABSTRACT	i
DAFTAR ISI	ii
DAFTAR LAMBANG	iv
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Pembatasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	3
1.6 Sistematika Penulisan	3
II LANDASAN TEORI	5
2.1 Sekilas tentang Persamaan Diferensial-Beda	5
2.2 Notasi Orde	7
2.3 Prinsip <i>Dominant Balance</i>	9

2.4	Penurunan Metode Persamaan Riccati Proyektif	10
2.4.1	Konstruksi Awal	10
2.4.2	Analisis Persamaan Riccati Proyektif	12
2.4.3	Langkah-Langkah Metode Persamaan Riccati Proyektif	21

III PENERAPAN METODE PERSAMAAN RICCATI PROYEK-

TIF		23
------------	--	-----------

3.1	Persamaan Lotka-Volterra Diskrit	23
-----	--	----

3.2	Persamaan KdV Diskrit	32
-----	---------------------------------	----

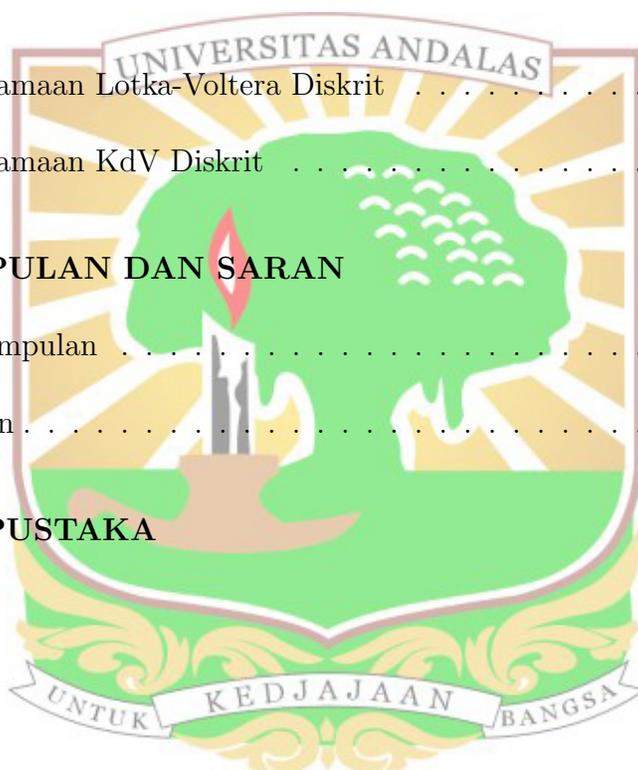
IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1	Kesimpulan	42
-----	----------------------	----

4.2	Saran	42
-----	-----------------	----

DAFTAR PUSTAKA

43



DAFTAR LAMBANG

\mathbb{Z} himpunan bilangan bulat

\ll jauh lebih kecil

\gg jauh lebih besar

u_i variabel tak bebas ke- i

t variabel bebas

$u_i^{(r)}(t)$ turunan ke- r dari u_i terhadap t

d bilangan gelombang

c kecepatan gelombang

ξ_0 beda fasa

w_H solusi homogen

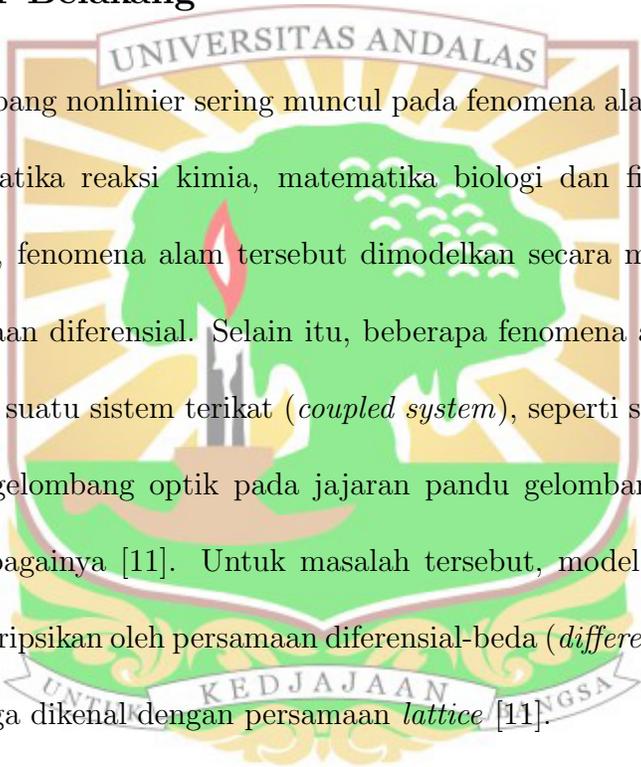
w_P solusi partikular



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang



Gelombang nonlinier sering muncul pada fenomena alam, seperti dinamika fluida, kinematika reaksi kimia, matematika biologi dan fisika optik. Dalam banyak kasus, fenomena alam tersebut dimodelkan secara matematis dalam sebuah persamaan diferensial. Selain itu, beberapa fenomena alam seringkali juga terjadi dalam suatu sistem terikat (*coupled system*), seperti sistem *predator-prey*, perambatan gelombang optik pada jajaran pandu gelombang, dinamika rantai atom dan sebagainya [11]. Untuk masalah tersebut, model matematikanya biasanya dideskripsikan oleh persamaan diferensial-beda (*differential-difference equation*) atau juga dikenal dengan persamaan *lattice* [11].

Meningkatnya kajian terhadap model-model persamaan diferensial dan persamaan diferensial-beda dalam menjelaskan fenomena gelombang nonlinier (kontinu dan diskrit), membuat semakin berkembangnya metode-metode alternatif dalam menyelesaikan persamaan-persamaan tersebut secara eksak. Beberapa di antara metode yang sering digunakan adalah metode tanh, metode invers scattering, metode dekomposisi adomain dan metode persamaan Riccati proyektif

[4,12,14].

Pada tesis ini akan dikaji kembali secara lebih detail penurunan dan penerapan metode persamaan Riccati proyektif dalam menyelesaikan persamaan diferensial-beda nonlinier. Metode ini digagas pertama kali oleh Conte dan Musette pada tahun 1992 dalam menentukan solusi soliton pada persamaan diferensial parsial nonlinier yang dapat dinyatakan sebagai polinomial dari dua fungsi elementer yang memenuhi suatu sistem Riccati proyektif [2]. Solusi soliton sendiri adalah gelombang nonlinier terlokalisasi (gelombang soliter) yang memiliki sifat dapat mempertahankan bentuknya saat merambat pada kecepatan konstan, meskipun setelah berinteraksi dengan gelombang soliter lainnya [3].

Pada tahun 2003, Yan mengembangkan lebih lanjut metode Contes dan Musette ini dengan memperkenalkan persamaan Riccati proyektif yang lebih umum [13]. Selanjutnya Zhen dan Hong-Qing pada tahun 2006 menerapkan metode persamaan Riccati proyektif ini pada dua persamaan diferensial-beda nonlinier, yaitu persamaan Lotka-Volterra dan Korteweg-de Vries (KdV) diskrit [14]. Tesis ini akan mengeksplorasi kembali referensi [14] dengan melakukan beberapa perbaikan pada penulisan persamaan dan menampilkan visualisasi solusi yang diperoleh.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah bagaimana penurunan Metode Persamaan Riccati Proyektif dan penerapannya dalam menyelesaikan

lesaikan persamaan Lotka-Voltera dan Persamaan Korteweg-de Vries (KdV) Diskrit.

1.3 Pembatasan Masalah

Penerapan metode persamaan Riccati proyektif pada tesis ini dibatasi untuk menyelesaikan Persamaan Lotka-Voltera dan Korteweg-de Vries (KdV) diskrit.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah menjelaskan penurunan metode persamaan Riccati proyektif serta penerapannya dalam menyelesaikan persamaan Lotka-Voltera dan KdV diskrit.

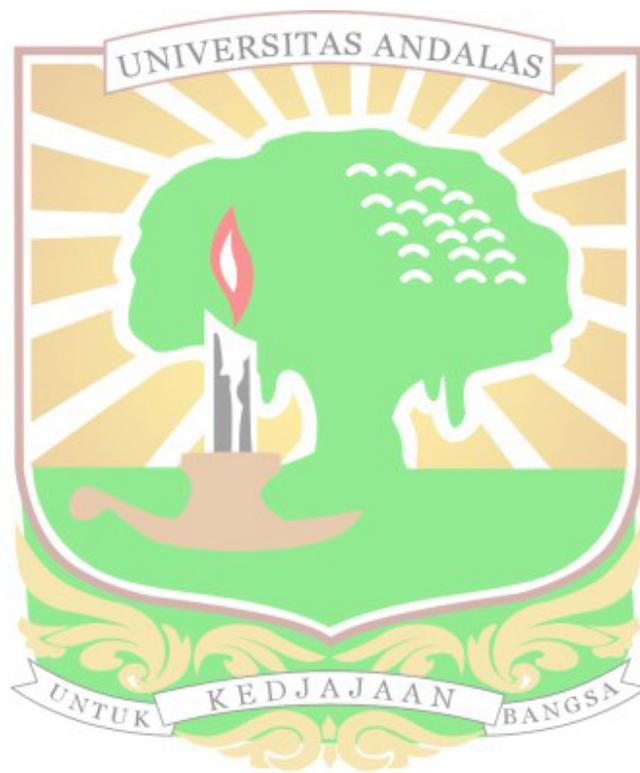
1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian pada tesis ini diharapkan dapat memperkaya kajian tentang metode-metode penyelesaian persamaan diferensial-beda .

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam tesis ini adalah dengan membaginya menjadi empat Bab. Bab I menjelaskan tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan. Bab II berisi tentang persamaan diferensial-beda, notasi orde, prinsip *dominant balance* dan penurunan metode persamaan Riccati proyektif. Selanjutnya, Bab

III memuat tentang penerapan metode persamaan Riccati proyektif. Terakhir, Bab IV berisi kesimpulan dan saran.



BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas terlebih dahulu tinjauan umum tentang persamaan diferensial-beda dan penurunan metode persamaan Riccati proyektif serta topik-topik terkait yang menjadi dasar dari pembahasan selanjutnya.

2.1 Sekilas tentang Persamaan Diferensial-Beda

Persamaan diferensial-beda (*differential-difference equation*), atau dikenal juga dengan persamaan *lattice*, adalah suatu kelas khusus dari persamaan diferensial biasa dengan tak-hingga banyaknya variabel tak-bebas, yang dinotasikan dengan $u_n = u_n(t)$, dimana $n \in \mathbb{Z}$ [11]. Salah satu sifat penting dari persamaan ini adalah berlakunya invarian translasional, yaitu memenuhi transformasi [11]

$$u_n(t) \rightarrow u_{n+1}(t).$$

Persamaan diferensial-beda yang akan menjadi objek kajian pada tesis ini adalah:

1. Persamaan Lotka-Volterra diskrit, yang diberikan oleh [7]

$$u'_n = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}). \quad (2.1.1)$$

Persamaan ini merupakan generalisasi dari persamaan Lotka-Voltera atau persamaan mangsa-pemangsa (*predator-prey*) untuk dua spesies, yang diberikan oleh [10]

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy, \\ \frac{dy}{dt} &= \delta xy - \gamma y,\end{aligned}$$

dimana

- x adalah banyaknya mangsa,
- y adalah banyaknya pemangsa,
- $\frac{dx}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt}$ adalah laju pertumbuhan populasi mangsa dan pemangsa terhadap waktu,
- t menyatakan waktu,
- α dan γ menyatakan laju pertumbuhan alami (kelahiran dan kematian)
- β dan δ adalah parameter riil positif yang mendeskripsikan interaksi antar dua spesies.

Pada persamaan (2.1.1), fenomena mangsa-pemangsa terjadi pada tak-hingga spesies, dimana spesies ke- n memangsa spesies ke- $(n+1)$ dan dimangsa oleh spesies ke- $(n-1)$ (dalam hal ini faktor pertumbuhan alami diabaikan).

2. Persamaan Korteweg-de Vries (KdV) diskrit, yang diberikan oleh [6]

$$u'_n = u_n^2(u_{n+1} - u_{n-1}). \quad (2.1.2)$$

Persamaan (2.1.2) dinyatakan demikian karena pada limit kontinu persamaan tersebut dapat diturunkan menjadi [6]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{48} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (2.1.3)$$

yang merupakan persamaan KdV (kontinu). Persamaan KdV sendiri merupakan persamaan yang memodelkan perambatan gelombang air pada lorong (*channel*) yang tidak terlalu lebar [3]. Persamaan ini dirumuskan pertama kali oleh Dederik Johannes Korteweg dan mahasiswa PhD-nya, Gustav de Vries, pada tahun 1895, dalam menjelaskan fenomena gelombang soliton yang dilaporkan pertama kali oleh John Scott Russell pada tahun 1834 [3]. Soliton sendiri adalah gelombang nonlinier terlokalisasi (gelombang soliter) yang memiliki sifat dapat mempertahankan bentuknya saat merambat pada kecepatan konstan, meskipun setelah berinteraksi dengan gelombang soliter lainnya [3].

2.2 Notasi Orde

Salah satu langkah penting pada penyelesaian persamaan diferensial-beda dengan menggunakan metode persamaan Riccati proyektif adalah melakukan proses *balance* terhadap ukuran (orde besaran) dari suku-suku persamaan yang terbentuk. Berikut diperkenalkan terlebih dahulu notasi-notasi yang akan dipakai pada proses ini beserta penjelasannya [8].

(1) Notasi $\mathcal{O}(\cdot)$

Jika

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = A,$$

dimana A adalah suatu konstanta tak-nol, maka kita tulis

$$f(\varepsilon) = \mathcal{O}(g(\varepsilon)) \text{ bilamana } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Dalam hal ini dikatakan bahwa $f(\varepsilon)$ adalah orde $g(\varepsilon)$ untuk $\varepsilon \rightarrow 0$. Lebih lanjut, fungsi $g(\varepsilon)$ disebut fungsi pengukur (*gauge function*) karena digunakan untuk mengukur orde besaran dari $f(\varepsilon)$. Sebagai contoh, $\sin(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ dan $\cos(\varepsilon) = \mathcal{O}(1)$ bilamana $\varepsilon \rightarrow 0$.

(2) Notasi $o(\cdot)$ atau \ll

Jika

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 0,$$

maka kita tulis

$$f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon)) \text{ atau } f(\varepsilon) \ll g(\varepsilon) \text{ bilamana } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Dalam hal ini $f(\varepsilon)$ dikatakan jauh lebih kecil daripada $g(\varepsilon)$ untuk $\varepsilon \rightarrow 0$.

Sebagai contoh, $\sin(\varepsilon) = o(1)$ dan $\cos(\varepsilon) = o(\varepsilon^{-1})$ bilamana $\varepsilon \rightarrow 0$.

2.3 Prinsip *Dominant Balance*

Prinsip *dominant balance* digunakan untuk menentukan orde besaran (*order of magnitude*) dari suku-suku suatu persamaan. Prinsip ini menyatakan bahwa dalam suatu persamaan paling tidak ada dua suku *leading-order* (orde tertinggi) yang mempunyai orde yang sama [1].

Sebagai ilustrasi, perhatikan persamaan kuadrat berikut:

$$\varepsilon x^2 + 2x - 1 = 0, \quad (2.3.1)$$

dimana $\varepsilon \ll 1$. Misalkan solusi asimtotik dari persamaan tersebut mempunyai suku *leading-order*

$$x = \varepsilon^{-\alpha} X, \quad (2.3.2)$$

dimana $\alpha > 0$ dan $X = \mathcal{O}(1)$. Substitusi (2.3.2) ke (2.3.1) menghasilkan

$$\varepsilon^{1-2\alpha} X^2 + 2\varepsilon^{-\alpha} X - 1 = 0. \quad (2.3.3)$$

Selanjutnya akan ditinjau tiga kasus :

- (i) Misalkan suku pertama dan suku ketiga adalah dua suku *leading-order*.

Pada kasus ini berlaku

$$\varepsilon^{1-2\alpha} X^2 = \mathcal{O}(\varepsilon^0) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}.$$

Berdasarkan hasil di atas, maka suku kedua menjadi $2\varepsilon^{-\frac{1}{2}} X = \mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$.

Namun hal ini tidak konsisten dengan asumsi yang dibuat karena $\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \gg \varepsilon^0$.

(ii) Misalkan suku kedua dan suku ketiga adalah dua suku *leading-order*.

Pada kasus ini berlaku

$$2\varepsilon^{-\alpha}X = \mathcal{O}(\varepsilon^0) \Rightarrow \alpha = 0.$$

Hal ini tidak sesuai dengan syarat bahwa $\alpha > 0$.

(iii) Misalkan suku pertama dan suku kedua adalah dua suku *leading-order*.

Pada kasus ini berlaku

$$\varepsilon^{1-2\alpha}X^2 = \mathcal{O}(\varepsilon^{-\alpha}) \Rightarrow \alpha = 1.$$

Dari hasil di atas, maka suku ketiga menjadi $1 = \mathcal{O}(\varepsilon^0)$. Perhatikan bahwa

$1 \ll \varepsilon^{-1}$. Jadi α haruslah 1.

Dengan menulis $X = X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \dots$, solusi asimtotik dari persamaan (2.3.1)

dapat diekspresikan dalam bentuk deret sebagai berikut:

$$x = \varepsilon^{-1}X_0 + X_1 + \varepsilon X_2 + \dots$$

2.4 Penurunan Metode Persamaan Riccati Proyektif

2.4.1 Konstruksi Awal

Pandang bentuk umum dari persamaan diferensial-beda berikut:

$$H(u_{n+n_1}(t), \dots, u_{n+n_k}(t), u'_{n+n_1}(t), \dots, u'_{n+n_k}(t), \dots, u_{n+n_1}^{(r)}(t), \dots, u_{n+n_k}^{(r)}(t)) = 0, \quad (2.4.1)$$

dengan $n, n_j \in \mathbb{Z}$, dimana u_i menyatakan variabel tak-bebas ke- i , t menyatakan variabel bebas, dan $u_i^{(r)}(t)$ menyatakan turunan ke- r dari u_i terhadap t .

Selanjutnya perkenalkan transformasi gelombang berjalan

$$u_n(t) = U(\xi_n), \quad (2.4.2)$$

dengan

$$\xi_n = dn + ct + \xi_0, \quad (2.4.3)$$

dimana $d > 0$ menyatakan bilangan gelombang, $c \neq 0$ menyatakan kecepatan gelombang, dan $\xi_0 \in \mathbb{R}$ menyatakan beda fasa. Dengan demikian persamaan (2.4.1) menjadi

$$H(U(\xi_{n+n_1}), \dots, U(\xi_{n+n_k}), U'(\xi_{n+n_1}), \dots, U'(\xi_{n+n_k}), \dots, U^{(r)}(\xi_{n+n_1}), \dots, U^{(r)}(\xi_{n+n_k})) = 0. \quad (2.4.4)$$

Ingin ditentukan solusi dari persamaan (2.4.4) yang berbentuk [14]

$$U(\xi_n) = A_0 + \sum_{i=1}^N (A_i f(\xi_n) + B_i g(\xi_n)) f^{i-1}(\xi_n), \quad (2.4.5)$$

dimana A_0 , A_i dan B_i adalah konstanta-konstanta yang akan ditentukan nilainya nanti.

Dengan menggunakan prinsip *dominant balance* (dalam hal ini antara orde tertinggi dari suku nonlinier dan orde tertinggi dari suku turunan), nilai N dapat ditentukan.

Untuk sebarang bilangan bulat n , $f(\xi_n)$ dan $g(\xi_n)$ memenuhi persamaan Riccati proyektif

$$f'(\xi_n) = pf(\xi_n)g(\xi_n), \quad (2.4.6)$$

$$g'(\xi_n) = q + pg^2(\xi_n) - rf(\xi_n). \quad (2.4.7)$$

dengan $p, q, r \in \mathbb{R}$ dan $p \neq 0$.

Selanjutnya $f(\xi_{n+k})$ dan $g(\xi_{n+k})$ dapat ditulis sebagai fungsi terhadap $f(\xi_n)$ dan $g(\xi_n)$, yaitu

$$f(\xi_{n+k}) = \Psi(f(\xi_n), g(\xi_n)), \quad (2.4.8)$$

$$g(\xi_{n+k}) = \Phi(f(\xi_n), g(\xi_n)). \quad (2.4.9)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.4.6), (2.4.7), (2.4.8) dan (2.4.9), substitusikan persamaan (2.4.5) ke persamaan (2.4.4) dan tetapkan nol untuk semua koefisien dari $f(\xi_n)^i g(\xi_n)^j$ dengan $j = 0, 1$ dan $i = 0, 1, \dots$, sehingga diperoleh sistem persamaan aljabar nonlinier terhadap A_0, A_i, B_i, c dan d . Dengan menyelesaikan sistem persamaan tersebut, maka solusi dari persamaan diferensial-beda dapat ditentukan dalam bentuk (2.4.5).

2.4.2 Analisis Persamaan Riccati Proyektif

Dari persamaan (2.4.6) diperoleh

$$g(\xi_n) = \frac{f'(\xi_n)}{pf(\xi_n)}, \quad (2.4.10)$$

dengan $p \neq 0$ dan $f'(\xi_n) \neq 0$. Substitusi persamaan (2.4.10) ke persamaan (2.4.7) menghasilkan

$$f''(\xi_n)f(\xi_n) - 2[f(\xi_n)]'^2 - pq[f(\xi_n)]^2 + pr[f(\xi_n)]^3 = 0. \quad (2.4.11)$$

Untuk mendapatkan solusi persamaan (2.4.11), diperkenalkan transformasi berikut:

$$f(\xi_n) = \frac{1}{w(\xi_n)}, \quad w(\xi_n) \neq 0. \quad (2.4.12)$$

Dengan menggunakan aturan rantai, turunan pertama dari $f(\xi_n)$ diberikan oleh

$$\begin{aligned} \frac{df(\xi_n)}{d\xi_n} &= \frac{df(\xi_n)}{dw(\xi_n)} \frac{dw(\xi_n)}{d\xi_n} = -\frac{1}{w^2} \cdot w' = -\frac{f}{w} \cdot w' \\ &\Leftrightarrow \frac{f'(\xi_n)}{f(\xi_n)} = -\frac{w'}{w}. \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Substitusi persamaan (2.4.13) ke persamaan (2.4.10) menghasilkan

$$g = -\frac{w'}{pw}. \quad (2.4.14)$$

Lebih lanjut, turunan kedua dari $f(\xi_n)$ diberikan oleh

$$f'' = \frac{-(f'w' + fw'')w - fw'w'}{w^2}, \quad (2.4.15)$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$f'' = \frac{2(w')^2}{w^3} - \frac{w''}{w^2}. \quad (2.4.16)$$

Substitusikan persamaan (2.4.12), (2.4.13) dan (2.4.16) ke persamaan (2.4.11), sehingga diperoleh

$$w'' + pqw - pr = 0. \quad (2.4.17)$$

Untuk menentukan solusi persamaan (2.4.17), pandang tiga kasus berikut:

Kasus (i): $pq < 0$

Pada kasus ini, persamaan (2.4.17) merupakan persamaan diferensial biasa orde dua nonhomogen. Persamaan karakteristik dari versi homogenya diberikan oleh

$$m^2 + pq = 0 \quad (2.4.18)$$

solusi dari persamaan (2.4.18) adalah

$$\Leftrightarrow m_{1,2} = \pm\sqrt{-pq}.$$

Karena $pq < 0$, maka akar-akar m_1 dan m_2 bernilai riil berbeda, sehingga solusi homogen dari persamaan (2.4.17) adalah

$$w_H = Ae^{\sqrt{-pq}\xi_n} + Be^{-\sqrt{-pq}\xi_n},$$

dengan A dan B suatu konstanta integrasi. Karena

$$e^{\pm t} \Leftrightarrow \cosh(t) \pm \sinh(t), \quad (2.4.19)$$

maka w_H dapat ditulis kembali menjadi

$$w_H = s \cosh(\sqrt{-pq}\xi_n) + h \sinh(\sqrt{-pq}\xi_n) \quad (2.4.20)$$

dengan $s = A + B$ dan $h = A - B$. Untuk menentukan solusi partikular, misalkan $w_P = c$, sehingga dari persamaan (2.4.17) diperoleh

$$c = \frac{r}{q}.$$

Jadi solusi umum dari persamaan (2.4.17) diberikan oleh

$$w = w_H + w_P = \frac{1}{q} (r + qs \cosh(\sqrt{-pq}\xi_n) + qh \sinh(\sqrt{-pq}\xi_n)). \quad (2.4.21)$$

Jika $p = -1$ dan $q = 1$, maka dengan mensubstitusikan persamaan (2.4.21) ke persamaan (2.4.12), diperoleh

$$f(\xi_n) = \frac{1}{r + s \cosh(\xi_n) + h \sinh(\xi_n)}. \quad (2.4.22)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (2.4.21) ke persamaan (2.4.14), didapatkan

$$g(\xi_n) = \frac{s \sinh(\xi_n) + h \cosh(\xi_n)}{r + s \cosh(\xi_n) + h \sinh(\xi_n)}. \quad (2.4.23)$$

Dengan mengkuadratkan persamaan (2.4.23) diperoleh

$$g^2(\xi_n) = \frac{s^2 \sinh^2(\xi_n) + 2hs \sinh(\xi_n) \cosh(\xi_n) + h^2 \cosh^2(\xi_n)}{(r + s \cosh(\xi_n) + h \sinh(\xi_n))^2}. \quad (2.4.24)$$

Selanjutnya manipulasi aljabar dan penyederhanaan pada persamaan (2.4.24) memberikan

$$g^2(\xi_n) = 1 - \frac{2r}{r + s \cosh(\xi_n) + h \sinh(\xi_n)} + \frac{(r^2 + h^2 - s^2)}{(r + s \cosh(\xi_n) + h \sinh(\xi_n))^2}. \quad (2.4.25)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.4.22), maka persamaan (2.4.25) dapat ditulis menjadi

$$g^2(\xi_n) = 1 - 2rf(\xi_n) + (r^2 + h^2 - s^2)f^2(\xi_n). \quad (2.4.26)$$

Dari persamaan (2.4.22) dan persamaan (2.4.23) diperoleh masing-masing

$$\cosh(\xi_n) = \frac{1}{f(\xi_n)s} - \frac{r}{s} - \frac{h}{s} \sinh(\xi_n) \quad (2.4.27)$$

dan

$$\sinh(\xi_n) = \frac{1}{g(\xi_n)h - s}((h - sg(\xi_n)) \cosh(\xi_n) - gr). \quad (2.4.28)$$

Substitusi persamaan (2.4.28) ke persamaan (2.4.27) menghasilkan

$$\cosh(\xi_n) = \frac{-f(\xi_n)rs - g(\xi_n)h + s}{f(\xi_n)(-h^2 + s^2)}. \quad (2.4.29)$$

Selanjutnya substitusi persamaan (2.4.27) ke persamaan (2.4.28) menghasilkan

$$\sinh(\xi_n) = \frac{f(\xi_n)hr + g(\xi_n)s - h}{f(\xi_n)(-h^2 + s^2)}. \quad (2.4.30)$$

Karena

$$\sinh(a + b) = \sinh(a) \cosh(b) + \cosh(a) \sinh(b) \quad (2.4.31)$$

dan

$$\cosh(a + b) = \cosh(a) \cosh(b) + \sinh(a) \sinh(b), \quad (2.4.32)$$

maka

$$\begin{aligned} f(\xi_{n+k}) &= f(\xi_n + \xi_{n+k} - \xi_n) \equiv f(\xi_n + \omega_k) \\ &= \frac{r + s \cosh(\xi_n + \omega_k) + h \sinh(\xi_n + \omega_k)}{-f(\xi_n)} \\ &= \frac{-\sinh(\omega_k)g(\xi_n) - rf(\xi_n) + \cosh(\omega_k)f(\xi_n)r - \cosh(\omega_k)}{-f(\xi_n)}. \end{aligned} \quad (2.4.33)$$

Dengan cara yang sama, untuk $g(\xi_{n+k})$ diperoleh

$$\begin{aligned} g(\xi_{n+k}) &= g(\xi_n + \xi_{n+k} - \xi_n) \equiv g(\xi_n + \omega_k) \\ &= \frac{s \cosh(\xi_n + \omega_k) + h \sinh(\xi_n + \omega_k)}{r + s \cosh(\xi_n + \omega_k) + h \sinh(\xi_n + \omega_k)} \\ &= \frac{-\sinh(\omega_k) - \cosh(\omega_k)g(\xi_n) + \sinh(\omega_k)f(\xi_n)r}{-f(\xi_n)r - \sinh(\omega_k)g(\xi_n) + rf(\xi_n) \cosh(\omega_k) - \cosh(\omega_k)}. \end{aligned} \quad (2.4.34)$$

Kasus (ii): $pq > 0$

Pandang kembali persamaan karakteristik dari versi homogen persamaan (2.4.17) yang diberikan oleh persamaan (2.4.18). Karena $pq > 0$, maka diperoleh dua akar kompleks saling konjugat, $m_{1,2} = \pm i\sqrt{pq}$, sehingga solusi homogenya adalah

$$w_H = A \cos(\sqrt{pq}\xi_n) + B \sin(\sqrt{pq}\xi_n), \quad (2.4.35)$$

dimana A dan B adalah konstanta integrasi yang bernilai kompleks. Untuk menentukan solusi partikular, misalkan $w_P = c$, sehingga dari persamaan (2.4.17) diperoleh

$$c = \frac{r}{q}.$$

Jadi solusi umum dari persamaan (2.4.17) untuk kasus $pq > 0$ adalah

$$w = w_H + w_P = \frac{1}{q} (r + s \cos(\sqrt{pq}\xi_n) + h \sin(\sqrt{pq}\xi_n)), \quad (2.4.36)$$

dimana $s = Aq$ dan $h = Bq$.

Misalkan $p = 1$ dan $q = 1$, maka diperoleh

$$w = r + s \cos(\xi_n) + h \sin(\xi_n). \quad (2.4.37)$$

Akibatnya persamaan (2.4.12) menjadi

$$f(\xi_n) = \frac{1}{r + s \cos(\xi_n) + h \sin(\xi_n)}. \quad (2.4.38)$$

Selanjutnya karena

$$w' = -s \sin(\xi_n) + h \cos(\xi_n), \quad (2.4.39)$$

maka persamaan (2.4.14) menjadi

$$g(\xi_n) = \frac{s \sin(\xi_n) - h \cos(\xi_n)}{r + s \cos(\xi_n) + h \sin(\xi_n)}. \quad (2.4.40)$$

Dengan mengkuadratkan persamaan (2.4.40) diperoleh

$$g^2(\xi_n) = \frac{s^2 \sin^2(\xi_n) - 2hs \sin(\xi_n) \cos(\xi_n) + h^2 \cos^2(\xi_n)}{(r + s \cos(\xi_n) + h \sin(\xi_n))^2}. \quad (2.4.41)$$

Selanjutnya manipulasi aljabar dan penyederhanaan pada persamaan (2.4.41) memberikan

$$g^2(\xi_n) = -1 + \frac{2r}{r + s \cos(\xi_n) + h \sin(\xi_n)} - \frac{(r^2 - h^2 - s^2)}{(r + s \cosh(\xi_n) + h \sinh(\xi_n))^2}. \quad (2.4.42)$$

Dari persamaan (2.4.38), persamaan (2.4.42) dapat ditulis kembali menjadi

$$g^2 = -1 + 2rf(\xi_n) - (r^2 - h^2 - s^2)f^2(\xi_n). \quad (2.4.43)$$

Selesaikan persamaan (2.4.38) dan (2.4.40) sehingga diperoleh solusi untuk $\cos(\xi_n)$ dan $\sin(\xi_n)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \cos(\xi_n) &= -\frac{f(\xi_n)rs + g(\xi_n)h - s}{(s^2 + h^2)f(\xi_n)}, \\ \sin(\xi_n) &= -\frac{-h - g(\xi_n)s + hf(\xi_n)r}{(s^2 + h^2)f(\xi_n)}. \end{aligned} \quad (2.4.44)$$

Dengan melakukan cara yang sama pada kasus **(i)**, diperoleh

$$f(\xi_{n+k}) = -\frac{f(\xi_n)}{-rf(\xi_n) - \cos(\omega_k) + \cos(\omega_k)f(\xi_n)r + \sin(\omega_k)g(\xi_n)}, \quad (2.4.45)$$

$$g(\xi_{n+1}) = \frac{-\cos(\omega_k)g(\xi_n) + \sin(\omega_k)f(\xi_n)r - \sin(\omega_k)}{-rf(\xi_n) - \cos(\omega_k) + \cos(\omega_k)f(\xi_n)r + \sin(\omega_k)g(\xi_n)}. \quad (2.4.46)$$

Kasus (iii): $q = 0$

Pandang kembali persamaan karakteristik dari versi homogen persamaan (2.4.17) yang diberikan oleh persamaan (2.4.18). Untuk kasus $q = 0$, akar-akar karakteristik dari versi homogen persamaan (2.4.17) diberikan oleh $m_{1,2} = 0$. Jadi solusi homogenya adalah

$$w_H = A + B\xi_n, \quad (2.4.47)$$

dengan A dan B suatu konstanta integrasi.

Untuk menentukan solusi partikular, misalkan

$$w_P = D\xi_n^2, \quad (2.4.48)$$

sehingga dari persamaan (2.4.17) diperoleh $D = \frac{pr}{2}$. Jadi solusi partikularnya adalah

$$w_P = \frac{1}{2}pr\xi_n^2. \quad (2.4.49)$$

Dengan demikian solusi umum dari persamaan (2.4.17) untuk kasus $q < 0$ adalah

$$w = w_H + w_P = \frac{1}{2}(pr\xi_n^2 + C_1\xi_n - C_2), \quad (2.4.50)$$

dengan $C_1 = 2B$ dan $C_2 = -A$.

Substitusikan persamaan (2.4.50) ke persamaan (2.4.12) dan (2.4.14), sehingga diperoleh berturut-turut

$$f(\xi_n) = \frac{2}{pr\xi_n^2 + C_1\xi_n - C_2} \quad (2.4.51)$$

dan

$$g(\xi_n) = -\frac{2pr\xi_n + C_1}{(pr\xi_n^2 + C_1\xi_n - C_2)p}. \quad (2.4.52)$$

Dengan mengkuadratkan persamaan (2.4.52) diperoleh

$$g^2(\xi_n) = \frac{4p^2r^2\xi_n^2 + 4rp\xi_nC_1 + C_1^2}{(pr\xi_n^2 + C_1\xi_n - C_2)^2 p^2}. \quad (2.4.53)$$

Selanjutnya manipulasi aljabar dan penyederhanaan pada persamaan (2.4.53)

diperoleh

$$g^2(\xi_n) = \frac{4r}{(pr\xi_n^2 + C_1\xi_n - C_2)p} + \frac{C_1^2 + 4C_2pr}{(pr\xi_n^2 + C_1\xi_n - C_2)^2 p^2}. \quad (2.4.54)$$

Dari persamaan (2.4.51), persamaan (2.4.54) dapat ditulis kembali menjadi

$$g^2(\xi_n) = \frac{2rf(\xi_n)}{p} + \frac{(C_1^2 + 4C_2pr)f^2(\xi_n)}{4p^2}. \quad (2.4.55)$$

Penyelesaian persamaan (2.4.51) dan persamaan (2.4.52) untuk C_1 dan C_2

diberikan oleh

$$C_1 = -\frac{2p(f(\xi_n)r + g(\xi_n))}{f(\xi_n)} \quad (2.4.56)$$

dan

$$C_2 = -\frac{f^3(\xi_n)pr + 2g^2(\xi_n)p + 2}{f(\xi_n)}. \quad (2.4.57)$$

Dengan cara yang sama pada kasus (i), kita peroleh

$$f(\xi_{n+k}) = \frac{2f(\xi_n)}{pr\omega_k^2 f(\xi_n) - 2pg(\xi_n)\omega_k + 2} \quad (2.4.58)$$

dan

$$g(\xi_{n+k}) = \frac{2g(\xi_n) - 2f(\xi_n)r\omega_k}{pr\omega_k^2 f(\xi_n) - 2pg(\xi_n)\omega_k + 2}. \quad (2.4.59)$$

2.4.3 Langkah-Langkah Metode Persamaan Riccati Proyektif

Adapun langkah-langkah umum dalam metode ini adalah:

- (i) Lakukan transformasi gelombang berjalan

$$u_n(t) = U(\xi_n),$$

dengan $\xi_n = dn + ct + \xi_0$, ke persamaan diferensial-beda yang ingin diselesaikan.

- (ii) Tulis solusi persamaan yang dihasilkan pada langkah (i) dalam bentuk

$$U(\xi_n) = A_0 + \sum_{i=1}^N (A_i f(\xi_n) + B_i g(\xi_n)) f^{i-1}(\xi_n), \quad (2.4.60)$$

dimana A_0, A_i, B_i adalah konstanta-konstanta yang akan ditentukan nilainya nanti, N diperoleh dengan melakukan proses *dominant balance*, yaitu antara orde tertinggi yang muncul pada suku nonlinier dan suku turunan, sedangkan $f(\xi_n)$ dan $g(\xi_n)$ memenuhi persamaan Riccati proyektif (2.4.6) dan (2.4.7). Perhatikan bahwa persamaan Riccati proyektif tersebut mempunyai tiga tipe solusi (lihat pembahasan pada subbab sebelumnya).

- (iii) Substitusikan persamaan (2.4.60), persamaan Riccati proyektif (2.4.6) dan (2.4.7) ke dalam persamaan yang dihasilkan pada langkah (i) dan tetapkan nol untuk semua koefisien dari $f^i(\xi_n)g^j(\xi_n)$, dengan $j = 0, 1$ dan $i = 0, 1, \dots$, sehingga diperoleh sistem persamaan aljabar nonlinier terhadap A_0, A_i, B_i, c, d .

- (iv) Selesaikan sistem persamaan yang dihasilkan pada langkah (iii) dengan bantuan software Maple, sehingga diperoleh solusi untuk A_0, A_i, B_i, c, d .
- (v) Substitusikan nilai-nilai A_0, A_i, B_i, c, d yang diperoleh ke persamaan (2.4.60), sehingga didapatkan solusi untuk persamaan diferensial-beda.



BAB III

PENERAPAN METODE PERSAMAAN

RICCATI PROYEKTIF

Pada bab ini akan dibahas penerapan metode persamaan Riccati proyektif pada penyelesaian persamaan Lotka-Volterra dan KdV diskrit.

3.1 Persamaan Lotka-Volterra Diskrit

Pandang kembali persamaan Lotka-Volterra diskrit, yaitu:

$$u'_n = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}). \quad (3.1.1)$$

Dengan melakukan transformasi gelombang berjalan

$$u_n(t) = U(\xi_n),$$

dimana $\xi_n = dn + ct + \xi_0$, persamaan (3.1.1) menjadi

$$cU'(\xi_n) = U(\xi_n)[U(\xi_{n+1}) - U(\xi_{n-1})]. \quad (3.1.2)$$

Selanjutnya tulis solusi persamaan (3.1.2) dalam bentuk

$$U(\xi_n) = A_0 + \sum_{i=1}^N (A_i f(\xi_n) + B_i g(\xi_n)) f^{i-1}(\xi_n), \quad (3.1.3)$$

Substitusi persamaan (3.1.3) ke persamaan (3.1.2) menghasilkan

$$\begin{aligned}
& c(A_1 f'(\xi_n) + B_1 g'(\xi_n) + \dots + N A_N f^{N-1}(\xi_n) f'(\xi_n) + B_N f^{N-1}(\xi_n) g'(\xi_n) \\
& \quad + B_N(N-1)(g(\xi_n) + f^{N-2}(\xi_n) f'(\xi_n))) \\
& = A_0 A_1 (f(\xi_{n+1}) - f(\xi_{n-1})) + A_0 B_1 (g(\xi_{n+1}) - g(\xi_{n-1})) \\
& \quad + A_1^2 f(\xi_n) (f(\xi_{n+1}) - f(\xi_{n-1})) + A_1 B_1 f(\xi_n) (g(\xi_{n+1}) - g(\xi_{n-1})) + \dots \\
& \quad + A_1 B_1 g(\xi_n) (f(\xi_{n+1}) - f(\xi_{n-1})) + B_1^2 g(\xi_n) (g(\xi_{n+1}) - g(\xi_{n-1})) + \dots \\
& \quad + A_N^2 f^N(\xi_n) (f^N(\xi_{n+1}) - f^N(\xi_{n-1})) \\
& \quad + A_N B_N g(\xi_n) f^{N-1}(\xi_n) (f^N(\xi_{n+1}) - f^N(\xi_{n-1})) \\
& \quad + A_N B_N f^N(\xi_n) (g(\xi_{n+1}) f^{N-1}(\xi_{n+1}) - g(\xi_{n-1}) f^{N-1}(\xi_{n-1})).
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Pada persamaan (3.1.4), diketahui bahwa orde tertinggi dari suku turunan adalah $(N-1)m + (m+1) = Nm + 1$, sedangkan orde tertinggi dari suku nonlinier adalah $2Nm$. Dengan menggunakan prinsip *dominant balance*, berlaku

$$Nm + 1 = 2Nm \Leftrightarrow Nm = 1.$$

Karena N dan m bilangan bulat positif, maka haruslah $N = 1$ dan $m = 1$. Dengan menggunakan $N = 1$, maka persamaan (3.1.3) menjadi

$$U(\xi_n) = A_0 + A_1 f(\xi_n) + B_1 g(\xi_n), \tag{3.1.5}$$

dimana $f(\xi_n)$ dan $g(\xi_n)$ memenuhi persamaan Riccati proyektif (2.4.6) dan (2.4.7).

Selanjutnya akan kita tinjau perkasus menurut analisis metode persamaan Riccati proyektif yang telah dibahas pada bab sebelumnya.

Kasus (i): $pq < 0$

Berdasarkan penjelasan pada bab sebelumnya, pada kasus ini terdapat hubungan antara $f(\xi_n)$ dan $g(\xi_n)$ yang diberikan oleh

$$g^2(\xi_n) = 1 - 2rf(\xi_n) + (r^2 + h^2 - s^2)f^2(\xi_n). \quad (3.1.6)$$

Selanjutnya dari persamaan (2.4.33) dan (2.4.34) diperoleh

$$f(\xi_{n\pm 1}) = \frac{-f(\xi_n)}{-\sinh(\omega_{\pm 1})g(\xi_n) - rf(\xi_n) + \cosh(\omega_{\pm 1})f(\xi_n)r - \cosh(\omega_{\pm 1})}, \quad (3.1.7)$$

$$g(\xi_{n\pm 1}) = \frac{-\sinh(\omega_{\pm 1}) - \cosh(\omega_{\pm 1})g(\xi_n) + \sinh(\omega_{\pm 1})f(\xi_n)r}{-f(\xi_n)r - \sinh(\omega_{\pm 1})g(\xi_n) + rf(\xi_n)\cosh(\omega_{\pm 1}) - \cosh(\omega_{\pm 1})}. \quad (3.1.8)$$

Karena $\omega_k = \xi_{n+k} - \xi_n$ dan $\xi_n = dn + ct + \xi_0$, maka $\omega_{\pm 1}$ dapat ditulis sebagai

$$\omega_1 = \xi_{n+1} - \xi_n = d(n+1) + ct + \xi_0 - (dn + ct + \xi_0) = d,$$

$$\omega_{-1} = \xi_{n-1} - \xi_n = d(n-1) + ct + \xi_0 - (dn + ct + \xi_0) = -d.$$

Dengan mengganti $\omega_{\pm 1} = \pm d$, substitusikan persamaan Riccati proyektif (2.4.6)-(2.4.7), persamaan (3.1.6), (3.1.7) dan (3.1.8) ke dalam persamaan (3.1.4) untuk $N = 1$. Selanjutnya tetapkan nol untuk semua koefisien dari $f^i(\xi_n)g^j(\xi_n)$, dengan $j = 0, 1$ dan $i = 0, 1, \dots$, sehingga diperoleh sistem persamaan nonlinier berikut:

$$f^1g^0 : 2(A_1 - A_0r) \sinh(d) + cr = 0,$$

$$f^2g^0 : cB_1(s^2 - h^2 - 3r^2) + 2A_0B_1(h^2 - s^2) \sinh(d) \cosh(d) - 2(3A_1 - A_0r) \sinh(d) = 0,$$

$$f^3g^0 : cr[(s^2 - h^2) \cosh(d) + 2(2s^2 - h^2 - 2r^2)] \cosh(d) + c(-3s^2 + 3h^2 + 4r^2)$$

$$+2A_1[(2r^2 - s^2 + h^2) + (-s^2 + h^2) \cosh(d)] \sinh(d) + 2A_1 \sinh(d) = 0,$$

$$f^4 g^0 : [(r^2 h^2 - 2h^2 s^2 + h^4 + s^4) \cosh(d) + 2(h^2 - 2s^2 - r^2)] \cosh(d)$$

$$+2(h^2 - r^4 + 3r^2 - 3r^2 h^2) = 0,$$

$$f^1 g^1 : -cA_1 + 2(A_0 A_1 - B_1^2 r) \sinh(d) = 0,$$

$$f^2 g^1 : [(A_1^2 + B_1^2 r) + B_1^2 \cosh(d)] \sinh(d) - cA_1 r (h^2 - s^2) \cosh(d) + A_1 r = 0,$$

$$f^3 g^1 : [(h^2 - s^2) \cosh(d) + 2r^2 + (s^2 - h^2 - r^2)] \cosh(d) = 0.$$

Dengan menggunakan bantuan software Maple, diperoleh solusi untuk sistem persamaan di atas sebagai berikut:

$$A_1 = -2A_0 r + 2A_0 r \cosh(d), \quad B_1 = 0,$$

$$c = 2A_0 \sinh(d), \quad h = \pm \sqrt{s^2 - \frac{2r^2}{1 + \cosh(d)}}, \quad (3.1.9)$$

dengan A_0 , d , s , dan r adalah konstanta sebarang, asalkan

$$s^2 > \frac{2r^2}{1 + \cosh(d)}. \quad (3.1.10)$$

Perhatikan bahwa penetapan $d > 0$ di awal menjamin nilai pecahan pada parameter h tetap terdefinisi.

Selanjutnya substitusikan parameter-parameter pada persamaan (3.1.9) ke persamaan (2.4.22) dan (2.4.23), sehingga didapatkan solusi

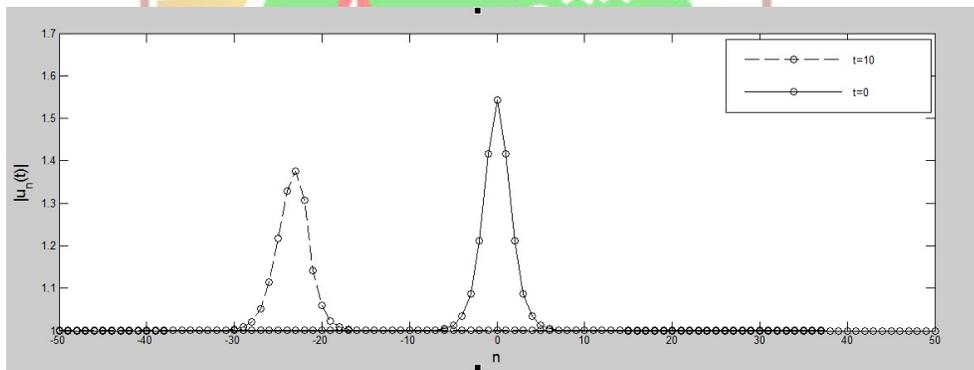
$$u_n(t) \equiv U(\xi_n) = A_0 + \frac{-2A_0 r + 2A_0 r \cosh(d)}{r + s \cosh(\xi_n) \pm \sqrt{s^2 - \frac{2r^2}{1 + \cosh(d)}} \sinh(\xi_n)}, \quad (3.1.11)$$

dimana $\xi_n = dn + 2A_0 \sinh(d)t + \xi_0$, dengan A_0, d, r, s dan ξ_0 adalah konstanta-konstanta yang dapat dipilih sebarang namun memenuhi syarat (3.1.10).

Khusus untuk nilai-nilai konstanta

$$A_0 = d = r = s = 1, \quad \xi_0 = 0,$$

dan dengan mengambil tanda +, profil solusi (3.1.11) pada saat $t = 0$ dan $t = 10$ ditunjukkan oleh Gambar 3.1.1. Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa solusi yang diperoleh merupakan soliton yang berjalan ke arah kiri dengan kecepatan konstan $c = 2A_0 \sinh(d) \approx 2,35$.



Gambar 3.1.1. Profil Solusi Persamaan Lotka Volterra Diskrit untuk Kasus (i)

Kasus (ii): $pq > 0$

Berdasarkan penjelasan pada bab sebelumnya, hubungan antara $f(\xi_n)$ dan $g(\xi_n)$ pada kasus ini diberikan oleh

$$g^2(\xi_n) = -1 + 2rf(\xi_n) - (r^2 - h^2 - s^2)f^2(\xi_n). \quad (3.1.12)$$

Selanjutnya $f(\xi_{n\pm 1})$ dan $g(\xi_{n\pm 1})$ dapat diperoleh dari persamaan (2.4.45)

dan (2.4.46), yaitu

$$f(\xi_{n\pm 1}) = \frac{f(\xi_n)}{-rf(\xi_n) - \cos(\pm d) + \cos(\pm d)f(\xi_n)r + \sin(\pm d)g(\xi_n)},$$

$$g(\xi_{n\pm 1}) = \frac{-\cos(\pm d)g(\xi_n) + \sin(\pm d)f(\xi_n)r - \sin(\pm d)}{-rf(\xi_n) - \cos(\pm d) + \cos(\pm d)f(\xi_n)r + \sin(\pm d)g(\xi_n)},$$

dengan mengganti $\omega_{\pm 1} = \pm d$. Dengan cara yang sama pada kasus (i), diperoleh sistem persamaan nonlinier berikut:

$$f^0 g^0 : B_1 + A_0[A_0 B_1 + A_0 \cos(d)] \sin(d) - B_1 \cos^2(d) = 0,$$

$$f^1 g^0 : [(-4A_0 + 3A_1)r + A_1 \cos(d)] \sin(d) + r(c - 3B_1) + 3B_1 r \cos^2(d) = 0,$$

$$f^2 g^0 : B_1[(-r^2 + s^2 + h^2) \cos(d) + 2cr^2] \cos(d) \\ + (5A_0 r^2 - 8A_1 r - A_0 h^2 - A_0 s^2) s^2 \sin(d) - 3r(c + r) = 0,$$

$$f^3 g^0 : [r(ch^2 - B_1 h^2 - B_1 s^2 + B_1 + cs^2) + A_0 r(h^2 - s^2) + A_1(h^2 + s^2) \sin(d)] \cos^2(d)$$

$$+ (2A_0 r^3 - 3A_1 r^2 - 2A_1 h^2 - 2A_1 s^2) \sin(d) \cos(d)$$

$$+ (-2A_0 r^3 + 7A_1 r^2 - 3A_1 h^2 - 3A_1 s^2 + A_0 r h^2 + A_0 r s^2) \sin(d)$$

$$+ r(-2cs^2 + 2ch^2 - 4cr^2) \sin(d) + B_1(s^2 + h^2 - r^2)$$

$$+ c(4r^3 - 3rh^2 - 3rs^2) = 0,$$

$$f^4 g^0 : c[h^2(r^2 + s^2) + s^2(s^2 - r^2)] \cos(d)$$

$$+ [A_1((rs^2 + h^2 - 2r^2) + r(-s^2 + 2r^2 - h^2) \cos^2(d))] \sin(d)$$

$$+ c(3r^2 h^2 - h^2 s^2 - 2r^4 + 3r^2 s^2 - s^4 - h^4) = 0,$$

$$f^1 g^1 : 2(-2B_1^2 r - A_0 A_1) \sin(d) - B_1(A_0 - A_1) \cos^2(d)$$

$$+ B_1(A_0 r - A_1) + A_1(c - B_1) = 0,$$

$$f^2 g^1 : B_1^2[(s^2 + h^2) \cos(d) + (-3r^2 - 2h^2 - 2s^2)] \sin(d) \cos(d)$$

$$+ (-2A_1^2 + 5B_1^2 r^2 - B_1^2 h^2 - B_1^2 s^2) \sin(d) + A_1[-1 + 2cr] \cos(d) + A_1 B_1 r = 0,$$

$$f^3 g^1 : (s^2 + h^2)[cA_1 - B_1^2 r \sin(d)] \cos^2(d)$$

$$+ B_1^2 r \sin(d)(-2r^2 + h^2 + s^2) + cA_1(-s^2 + 2r^2) = 0.$$

Dengan bantuan software Maple, diperoleh solusi untuk A_1, B_1, c, w sebagai berikut:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{4A_0 r(-r^2 + s^2 + h^2)}{h^2 + s^2}, \quad B_1 = 0, \\ c &= \frac{\pm 4r A_0 \sqrt{-r^2 + s^2 + h^2}}{h^2 + s^2}, \\ d &= \arctan\left(\frac{\pm 2r \sqrt{h^2 + s^2 - r^2}}{s^2 + h^2}, \frac{2r^2 - h^2 - s^2}{s^2 + h^2}\right), \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

dengan $A_0, r, s,$ dan h adalah konstanta sebarang asalkan $s \neq 0, h \neq 0$ dan $s^2 + h^2 > r^2$. Substitusikan parameter-parameter pada persamaan (3.1.13) ke persamaan (2.4.38) dan (2.4.40), diperoleh solusi

$$u_n(t) \equiv U(\xi_n) = A_0 + \frac{-4r A_0 (s^2 + h^2 - r^2)}{(s^2 + h^2)(r + s \cos(\xi_n) + h \sin(\xi_n))}, \quad (3.1.14)$$

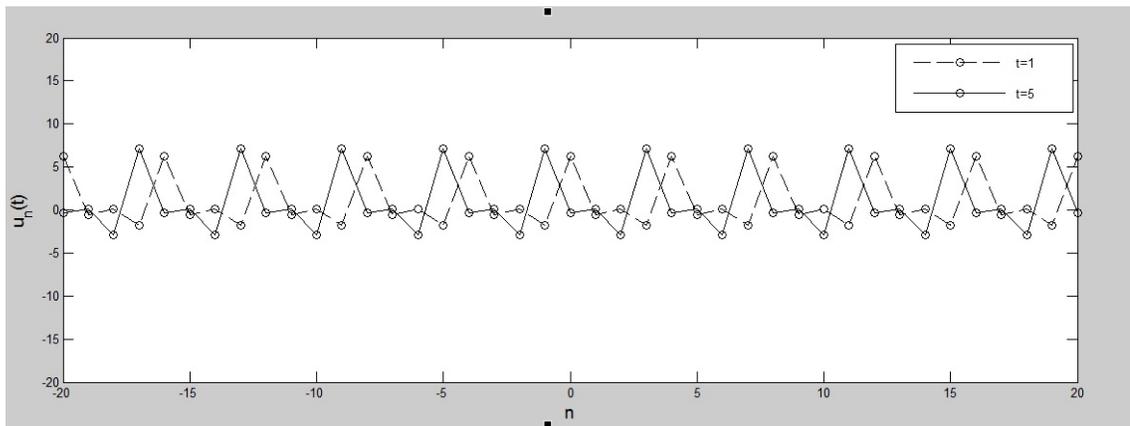
dimana

$$\xi_n = \arctan\left(\frac{\pm 2r \sqrt{h^2 + s^2 - r^2}}{s^2 + h^2}, \frac{2r^2 - h^2 - s^2}{s^2 + h^2}\right) n + \frac{4r A_0 \sqrt{s^2 + h^2 - r^2}}{s^2 + h^2} t + \xi_0.$$

Profil solusi (3.1.14) pada saat $t = 1$ dan $t = 5$ untuk nilai-nilai konstanta

$$A_0 = d = r = s = 1, \quad \xi_0 = 0,$$

dan dengan mengambil tanda +, ditunjukkan pada Gambar 3.1.2. Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa solusi berjalan ke arah kanan sambil berosilasi secara bergantian di setiap site- n .



Gambar 3.1.2. Profil Solusi Persamaan Lotka-Voltera Diskrit untuk Kasus (ii)

Kasus (iii): $q = 0$

Berdasarkan penjelasan pada bab sebelumnya, pada kasus ini terdapat hubungan antara $f(\xi_n)$ dan $g(\xi_n)$ yang diberikan oleh

$$g^2(\xi_n) = \frac{2rf(\xi_n)}{p} + \frac{(C_1^2 + 4C_2pr)f^2(\xi_n)}{4p^2}. \quad (3.1.15)$$

Selanjutnya dari persamaan (2.4.58) dan (2.4.59) dan dengan mengganti $\omega_{\pm 1} = \pm d$, diperoleh

$$f(\xi_{n\pm 1}) = \frac{2f(\xi_n)}{prd^2 f(\xi_n) - 2pg(\xi_n)(\pm d) + 2} \quad (3.1.16)$$

dan

$$g(\xi_{n\pm 1}) = \frac{2g(\xi_n) - 2f(\xi_n)r(\pm d)}{prd^2f(\xi_n) - 2pg(\xi_n)(\pm d) + 2}. \quad (3.1.17)$$

Dengan cara yang sama pada kasus (i), diperoleh sistem persamaan nonlinier berikut:

$$f^1g^0 : c + 2dA_0 = 0,$$

$$f^2g^0 : 4d^2pr(A_0rd - c) - \frac{d(8A_0C_2pr + 2A_0C_1^2 + 24A_1rp)}{p} - \frac{c(-C_1^2 - 4C_2pr)}{p} = 0,$$

$$f^3g^0 : -\frac{4dA_1C_1^2}{p} + dr(-2cdC_1^2 - 8cprC_2 + cr^2d^3p^2 - 16A_1C_2 + 4A_1B_1rd^2p) = 0,$$

$$f^4g^0 : -\frac{C_1^4}{4p} - C_2^2r(2C_1^2 - 4pr) + d^2pr^2(C_1^2 + prC_2) = 0,$$

$$f^1g^1 : -d(A_0A_1p + 8B_1^2r) + 4pcA_1 = 0,$$

$$f^2g^1 : p(-4(pcA_1rd - 2(A_1^2 + B_1^2C_2r)) - 4B_1^2r^2d^2) + \frac{2B_1^2C_1^2}{p} = 0,$$

$$f^3g^1 : C_1^2 + 4pC_2r - 3r^2d^2 = 0.$$

Dengan bantuan software Maple, diperoleh solusi untuk A_1, B_1, c, C_2 sebagai berikut:

$$A_1 = -2d^2rA_0p, \quad B_1 = 0, \quad c = 2dA_0, \quad C_2 = -\frac{C_1^2 - p^2r^2d^2}{4rp}, \quad (3.1.18)$$

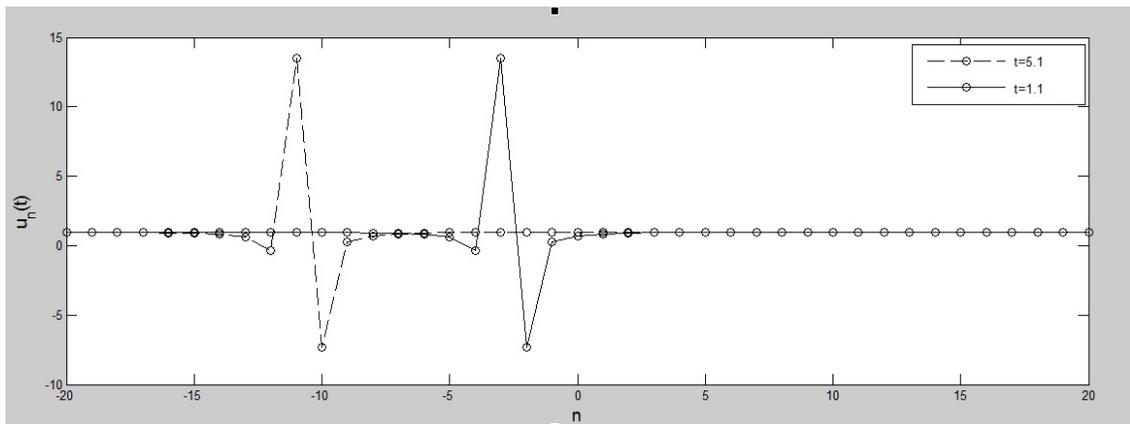
dengan A_0, r, p, d, C_1 dapat dipilih sebarang asalkan $r \neq 0$ dan $p \neq 0$.

Substitusikan parameter-parameter pada persamaan (3.1.18) ke persamaan (2.4.51) dan (2.4.52), sehingga didapatkan solusi

$$u_n(t) \equiv U(\xi_n) = A_0 - \frac{2A_0d^2pr}{pr\xi_n^2 + C_1\xi_n - \frac{p^2r^2d^2 - C_1^2}{4rp}}, \quad (3.1.19)$$

dengan $\xi_n = dn + 2A_0dt + \xi_0$.

Profil solusi (3.1.19) pada saat $t = 1.1$ dan $t = 5.1$ untuk nilai-nilai konstanta $A_0 = r = p = d = C_1 = 1$ dan $\xi_0 = 0$ ditunjukkan pada Gambar 3.1.3. Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa solusi yang diperoleh merupakan soliton yang berjalan ke arah kiri dengan kecepatan konstan $c = 2A_0d = 2$.



Gambar 3.1.3. Profil Solusi Persamaan Lotka-Voltera Diskrit untuk Kasus (iii)

3.2 Persamaan KdV Diskrit

Pandang kembali persamaan KdV diskrit

$$u'_n = u_n^2(u_{n+1} - u_{n-1}). \quad (3.2.1)$$

Dengan mensubstitusikan transformasi gelombang berjalan

$$u_n(t) = U(\xi_n),$$

dengan $\xi_n = dn + ct + \xi_0$, pada persamaan (3.2.1), diperoleh

$$cU'(\xi_n) = U^2(\xi_n)[U(\xi_{n+1}) - U(\xi_{n-1})]. \quad (3.2.2)$$

Asumsikan solusi dari persamaan (3.2.2) dapat ditulis dalam bentuk

$$U(\xi_n) = A_0 + A_1f(\xi_n) + B_1g(\xi_n) + A_2f^2(\xi_n) + B_2f(\xi_n)g(\xi_n). \quad (3.2.3)$$

Dalam hal ini $f(\xi_n)$ dan $g(\xi_n)$ memenuhi persamaan Riccati proyektif (2.4.6) dan (2.4.7).

Selanjutnya akan kita tinjau perkasus menurut analisis metode persamaan Riccati proyektif yang telah dijelaskan pada subbab sebelumnya.

Kasus (i): $pq < 0$

Dengan melakukan prosedur yang sama seperti penyelesaian pada persamaan Lotka-Voltera, pada kasus ini diperoleh tiga keluarga solusi untuk nilai-nilai parameter, yaitu:

$$A_1 = -A_0r + \cosh(d)A_0r, \quad A_2 = B_1 = B_2 = 0,$$

$$c = 2 \sinh(d)A_0^2, \quad h = \sqrt{s^2 - r^2}, \quad (3.2.4)$$

$$A_2 = A_0(1 - \cosh^2(d))(h^2 - s^2), \quad A_1 = B_1 = B_2 = r = 0,$$

$$c = 2A_0^2 \sinh(d) \cosh(d), \quad (3.2.5)$$

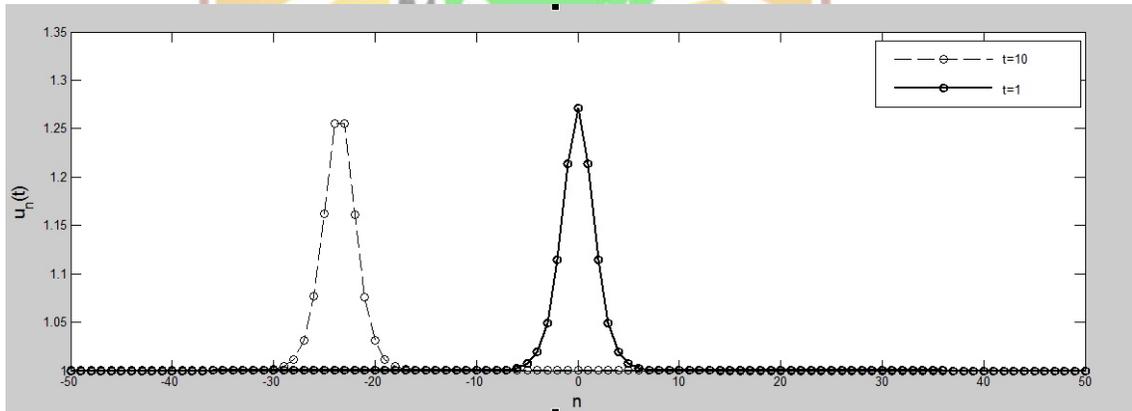
$$A_1 = 2(\cosh(d) - 1)rA_0, \quad A_2 = -2(\cosh(d) - 1)r^2A_0, \quad B_1 = B_2 = 0,$$

$$c = 2 \sinh(d)A_0^2, \quad h = \pm s. \quad (3.2.6)$$

Substitusikan parameter-parameter pada persamaan (3.2.4) ke persamaan (2.4.22) dan (2.4.23), diperoleh solusi tipe I

$$u_n(t) \equiv U(\xi_n) = A_0 + \frac{-A_0 r + A_0 \cosh(d)r}{r + s \cosh(\xi_n) \pm \sqrt{s^2 - r^2} \sinh(\xi_n)}, \quad (3.2.7)$$

dimana $\xi_n = dn + 2A_0^2 \sinh(d)t + \xi_0$, dengan A_0, d, r, s dan ξ_0 adalah konstanta-konstanta yang dapat dipilih sebarang dengan syarat $s^2 > r^2$. Profil solusi (3.2.7) pada saat $t = 1$ dan $t = 10$ untuk nilai-nilai konstanta $A_0 = d = r = s = 1$ dan dengan mengambil tanda $+$, ditunjukkan pada Gambar 3.2.4. Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa solusi yang diperoleh merupakan soliton yang berjalan secara konstan ke arah kiri dengan kecepatan $c = 2A_0^2 \sinh(d) \approx 2.35$.

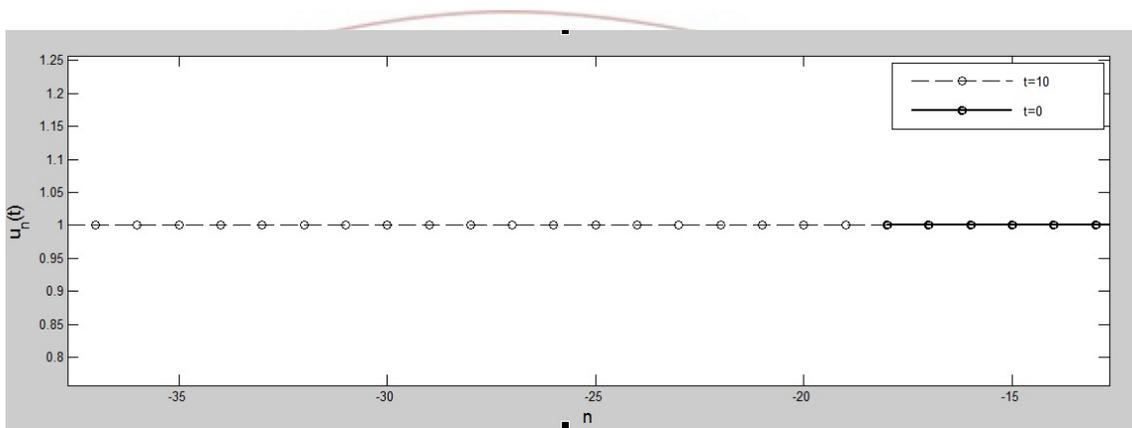


Gambar 3.2.4. Profil Solusi Tipe I dari Persamaan KdV Diskrit untuk Kasus (i)

Selanjutnya dengan mensubstitusikan parameter-parameter pada persamaan (3.2.5) ke persamaan (2.4.22) dan (2.4.23), diperoleh solusi tipe II

$$u_n(t) \equiv U(\xi_n) = A_0 + \frac{A_0 r + (1 - \cosh^2(d))}{(s \cosh(\xi_n) + h \sinh(\xi_n))^2}, \quad (3.2.8)$$

dimana $\xi_n = dn + 2A_0^2 \sinh(d) \cosh(d)t + \xi_0$, dengan A_0, d, h, s dan ξ_0 adalah konstanta sebarang. Profil solusi (3.2.8) pada saat $t = 0$ dan $t = 10$ untuk nilai-nilai konstanta $A_0 = d = h = s = 1$ dan $\xi_0 = 0$ ditunjukkan pada Gambar 3.2.5. Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa solusi yang diperoleh merupakan solusi konstan yang berjalan ke arah kiri dengan kecepatan $c = 2A_0^2 \sinh(d) \cosh(d) \approx 3,62$.



Gambar 3.2.5. Profil Solusi Tipe II dari Persamaan KdV Diskrit untuk Kasus (i)

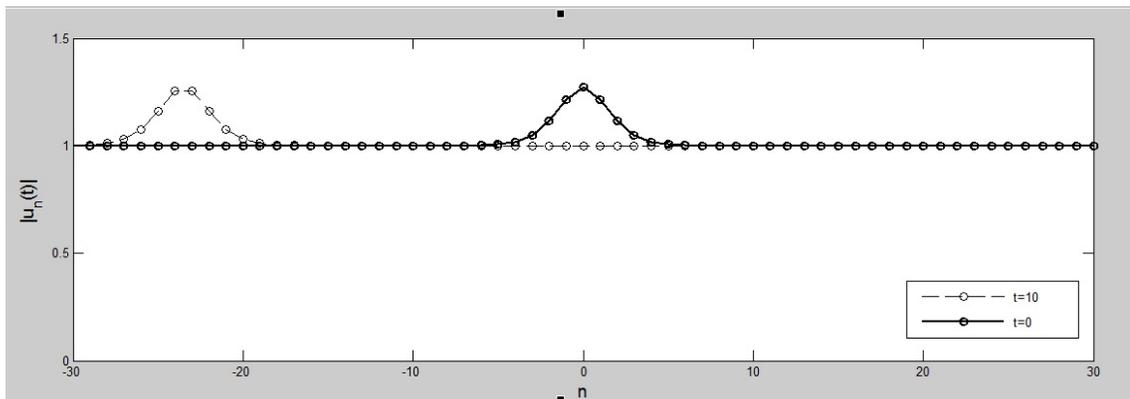
Akhirnya, dengan mensubstitusikan parameter-parameter pada persamaan (3.2.6) ke persamaan (2.4.22) dan (2.4.23), diperoleh solusi Tipe III

$$u_n(t) \equiv U(\xi_n) = A_0 + \frac{2(\cosh(d) - 1)rA_0}{(r + s \cosh(\xi_n) + s \sinh(\xi_n))},$$

$$- \frac{2(\cosh(d) - 1)r^2A_0}{(r + s \cosh(\xi_n) \pm s \sinh(\xi_n))^2}, \quad (3.2.9)$$

dimana $\xi_n = dn + 2A_0^2 \sinh(d) \cosh(d)t + \xi_0$, dengan A_0, d, h, s dan ξ_0 konstanta sebarang.

Profil solusi (3.2.9) pada saat $t = 0$ dan $t = 10$ untuk nilai-nilai konstanta $A_0 = d = h = s = 1$ dan $\xi_0 = 0$ ditunjukkan pada Gambar 3.2.6 (dengan mengambil tanda +). Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa solusi yang diperoleh adalah soliton yang berjalan secara konstan ke arah kiri dengan kecepatan $c = 2A_0^2 \sinh(d) \cosh(d) \approx 3,62$.



Gambar 3.2.6. Profil Solusi Tipe III dari Persamaan KdV Diskrit untuk Kasus (i)

Kasus (ii): $pq > 0$

Dengan mengikuti prosedur seperti pada persamaan Lotka-Voltera, pada kasus ini sistem persamaan nonlinier yang terbentuk mempunyai tiga keluarga solusi untuk nilai-nilai parameter, yaitu:

$$A_1 = A_0 \cos(d)r - A_0 r, \quad c = 2A_0^2 \sin(d), \quad h = \pm \sqrt{r^2 - s^2}, \quad A_2 = B_1 = B_2 = 0, \quad (3.2.10)$$

$$A_2 = -A_0 \sin^2(d)(s^2 + h^2), \quad c = 2A_0^2 \sin(d) \cos(d), \quad A_1 = B_1 = B_2 = r = 0, \quad (3.2.11)$$

$$A_2 = -2rA_0(\cos(d) - 1), \quad A_1 = 2rA_0(\cos(d) - 1), \\ c = 2A_0^2 \sin(d), \quad h = \pm is, \quad B_1 = B_2 = 0. \quad (3.2.12)$$

Substitusikan nilai-nilai parameter pada persamaan (3.2.10), (3.2.11) dan (3.2.12) ke persamaan (3.2.3), sehingga berturut-turut diperoleh

- Solusi Tipe I

$$u_n(t) \equiv U(\xi_n) = A_0 + \frac{A_0 \cos(d)r - A_0 r}{r + s \cos(\xi_n) \pm \sqrt{r^2 - s^2} \sin(\xi_n)}, \quad (3.2.13)$$

dimana $\xi_n = dn + 2A_0^2 \sinh(d)t + \xi_0$, dengan A_0, d, h, s dan ξ_0 adalah konstanta sebarang namun memenuhi $r^2 > s^2$.

- Solusi Tipe II

$$u_n(t) \equiv U(\xi_n) = A_0 - \frac{A_0 \sin^2(d)(s^2 + h^2)}{(s \cos(\xi_n) + h \sinh(\xi_n))^2}, \quad (3.2.14)$$

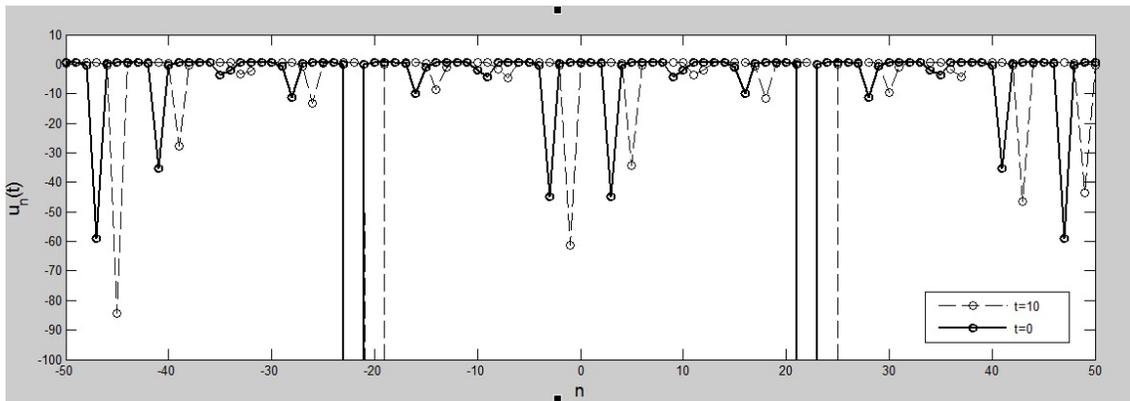
dimana $\xi_n = dn + 2A_0^2 \sin(d) \cos(d)t + \xi_0$, dengan A_0, d, h, s dan ξ_0 adalah konstanta sebarang.

- Solusi Tipe III

$$u_n(t) \equiv U(\xi_n) = A_0 + \frac{2rA_0(\cos(d) - 1)}{(r + s \cos(\xi_n) \pm is \sinh(\xi_n))} \\ - \frac{2r^2A_0(\cos(d) - 1)}{(r + s \cos(\xi_n) \pm is \sin(\xi_n))^2}, \quad (3.2.15)$$

dimana $\xi_n = dn + 2A_0^2 \sin(d)t + \xi_0$, $i = \sqrt{-1}$, dengan A_0, d, r, s dan ξ_0 adalah konstanta sebarang.

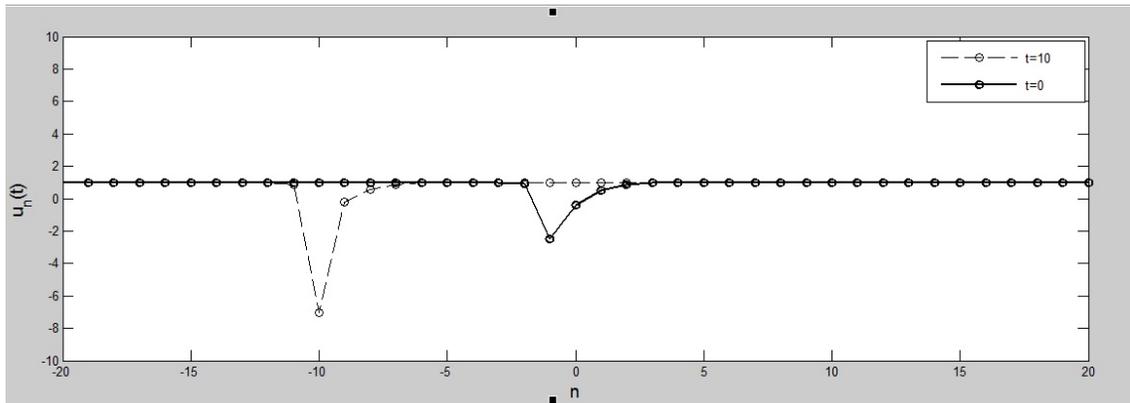
Profil solusi (3.2.13) pada saat $t = 0$ dan $t = 10$ untuk nilai-nilai konstanta $A_0 = d = h = s = 1$ dan $\xi_0 = 0$ (dengan mengambil tanda +) ditunjukkan pada Gambar 3.2.7. Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa solusi yang diperoleh berjalan ke arah kiri dengan kecepatan konstan $c = 2A_0^2 \sinh(d) \approx 2,35$ sambil berosilasi di setiap site- n .



Gambar 3.2.7. Profil Solusi Tipe I dari Persamaan KdV Diskrit untuk Kasus (ii)

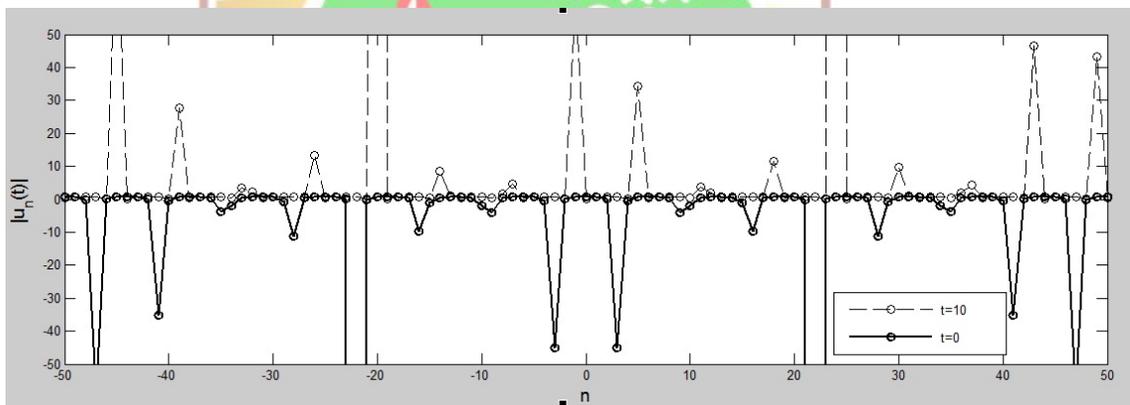
Adapun profil solusi (3.2.14) pada saat $t = 0$ dan $t = 10$ untuk nilai-nilai konstanta $A_0 = d = h = s = 1$ dan $\xi_0 = 0$ ditunjukkan pada Gambar 3.2.8. Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa solusi yang diperoleh berupa soliton yang berjalan ke arah kiri dengan kecepatan konstan $c = 2A_0^2 \sin(d) \cos(d) \approx 3,62$ dimana puncaknya mengalami osilasi.

Selanjutnya profil solusi (3.2.15) pada saat $t = 0$ dan $t = 10$ untuk nilai-nilai konstanta $A_0 = d = r = s = 1$ dan $\xi_0 = 0$ (dengan mengambil tanda +) ditunjukkan pada Gambar 3.2.9. Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa solusi yang diperoleh berjalan ke arah kiri dengan kecepatan konstan $c = 2A_0^2 \sin(d) \approx$



Gambar 3.2.8. Profil Solusi Tipe II dari Persamaan KdV Diskrit untuk Kasus (ii)

0.03 sambil mengalami osilasi secara bergantian di setiap site- n .



Gambar 3.2.9. Profil Solusi Tipe III dari Persamaan KdV Diskrit untuk Kasus (ii)

Kasus (iii): $q = 0$

Pada kasus ini, sebagaimana prosedur yang dilakukan pada persamaan Lotka-Voltera, diperoleh sistem persamaan nonlinier untuk parameter yang meng-

hasilkan solusi

$$A_1 = -\frac{A_0 p r d^2}{2}, \quad A_2 = -\frac{2B_2^2}{A_0 p^2 d^2}, \quad B_1 = 0,$$

$$c = 2A_0^2 d, \quad C_2 = -\frac{-16B_2^2 + A_0^2 p^2 d^4 C_1^2}{4A_0^2 d^4 p^3 r}, \quad (3.2.16)$$

dimana $A_0 \neq 0, d \neq 0, r \neq 0$, dan $p \neq 0$.

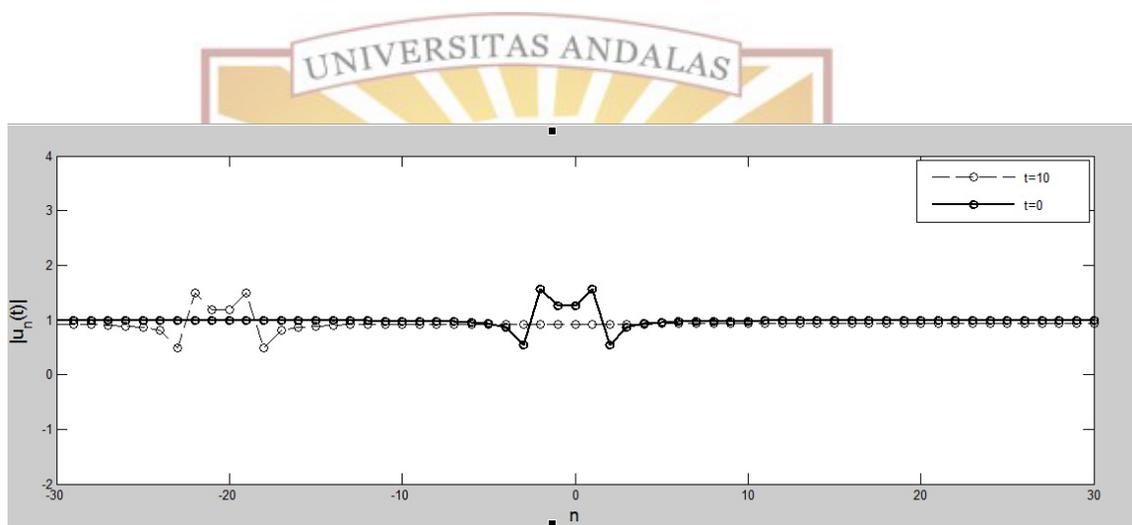
Substitusikan nilai-nilai parameter pada persamaan (3.2.16) ke persamaan (2.4.51) dan (2.4.52), sehingga diperoleh solusi

$$u_n(t) \equiv U(\xi_n) = A_0 - \frac{A_0 d^2 p r}{p r \xi_n^2 + C_1 \xi_n + \frac{-16B_2^2 + A_0^2 d^4 p^2 C_1^2}{4A_0^2 d^4 p^3 r}}$$

$$- \frac{8B_2^2 A_0^{-1} p^{-2} d^{-2} + 2B_2(2p r \xi_n + C_1) p^{-1}}{\left(p r \xi_n^2 + C_1 \xi_n + \frac{-16B_2^2 + A_0^2 d^4 p^2 C_1^2}{4A_0^2 d^4 p^3 r} \right)}, \quad (3.2.17)$$

dimana $\xi_n = dn + 2A_0^2 dt + \xi_0$, dengan d, C_1, A_0, B_2, p, r dan ξ_0 dapat dipilih sebarang asalkan $A_0 \neq 0, d \neq 0, r \neq 0$ dan $p \neq 0$.

Profil solusi (3.2.17) pada saat $t = 0$ dan $t = 10$ untuk nilai-nilai konstanta $d = C_1 = A_0 = B_2 = p = r = 1$ dan $\xi_0 = 0$ ditunjukkan pada Gambar 3.2.10. Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa solusi yang diperoleh berupa soliton yang mengalami osilasi dan berjalan ke arah kiri dengan kecepatan konstan $c = 2A_0^2 d = 2$.



Gambar 3.2.10. Profil Solusi Persamaan KdV Diskrit untuk Kasus (iii)

BAB IV

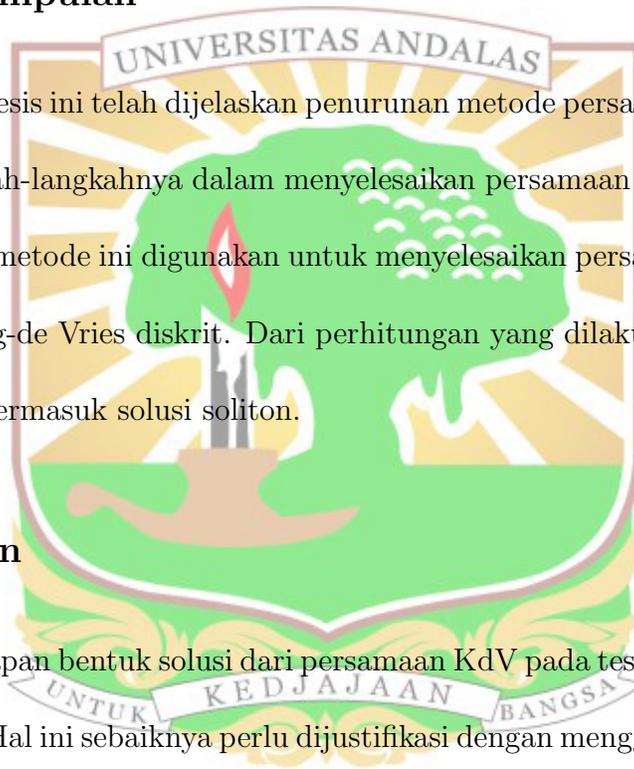
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

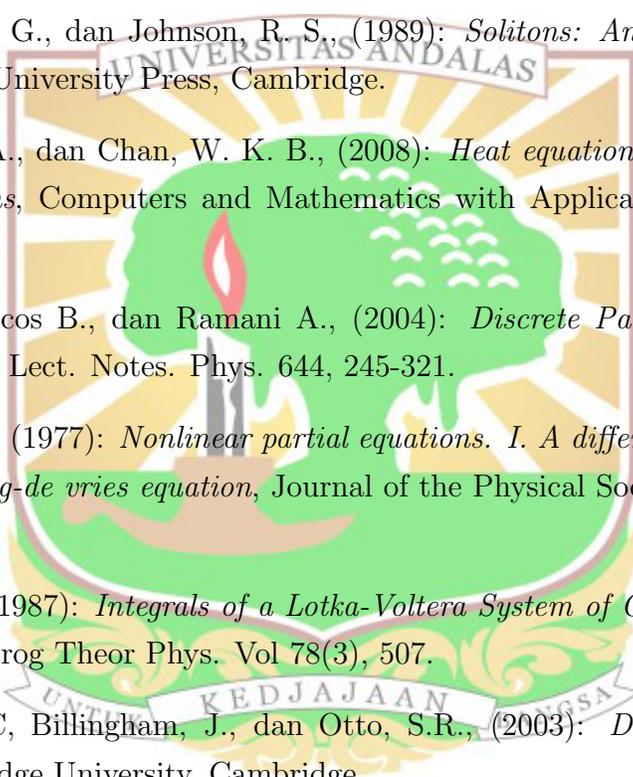
Pada tesis ini telah dijelaskan penurunan metode persamaan Riccati proyektif dan langkah-langkahnya dalam menyelesaikan persamaan diferensial beda. Secara khusus, metode ini digunakan untuk menyelesaikan persamaan Lotka-Volterra dan Korteweg-de Vries diskrit. Dari perhitungan yang dilakukan diperoleh beberapa solusi, termasuk solusi soliton.

4.2 Saran

Penetapan bentuk solusi dari persamaan KdV pada tesis ini adalah berdasarkan asumsi. Hal ini sebaiknya perlu dijustifikasi dengan menggunakan sifat Painleve diskrit [5]. Selanjutnya metode persamaan Riccati proyektif ini disarankan juga dapat diterapkan dalam menyelesaikan persamaan diferensial beda nonlinier yang lain, seperti persamaan Ablowitz-Ladik dan persamaan Schrödinger saturable diskrit.



DAFTAR PUSTAKA

- 
- [1] Bender, C. M., dan Orszag, S. A., (1999): *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, Springer-Verlag, New York.
- [2] Conte, R., dan Musette, M., (1992): *Link Between Solitary Waves and Projective Riccati Equations*, J. Phys. A 25, 5609.
- [3] Drazin, P. G., dan Johnson, R. S., (1989): *Solitons: An Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [4] Gorguis, A., dan Chan, W. K. B., (2008): *Heat equation and its comparative solutions*, Computers and Mathematics with Applications 55 (12), 2973-2980.
- [5] Grammaticos B., dan Ramani A., (2004): *Discrete Painleve Equations: A Review*, Lect. Notes. Phys. 644, 245-321.
- [6] Hirota, R., (1977): *Nonlinear partial equations. I. A difference analogue of the korteweg-de vries equation*, Journal of the Physical Society of Japan 43(4), 1425.
- [7] Itoh, Y., (1987): *Integrals of a Lotka-Volterra System of Odd Number of Variables*, Prog Theor Phys. Vol 78(3), 507.
- [8] King, A.C, Billingham, J., dan Otto, S.R., (2003): *Differential equations*, Cambridge University, Cambridge.
- [9] Li, B dan Chen, Y., (2003): *Nonlinear Partial Differential Equations Solved by Projective Riccati Eqquations Ansatz*, Chinese Academy of Science. Vol 58a, 511.
- [10] *LotkaVolterra equations*. https://en.wikipedia.org/wiki/Lotka%E2%80%93Volterra_equations, diakses pada 2 Januari 2016.
- [11] Scott, A., (2005): *Encyclopedia of Nonlinear Science*, Routledge, New York and London.

- [12] Wazwaz, A. M., (2009): *Partial Equations and Solitary Waves Theory*, Springer, Berlin Heidelberg.
- [13] Yan, Z., (2003): *Generalized method and its application in the higher-order nonlinear Schrödinger equation in nonlinear optical fibres*, *Chaos, Solitons and Fractals* 16, 759.
- [14] Zhen, W., dan Hong-Qing, Z., (2006). *New Exact Solutions to Some Difference Differential Equations*, *Chinese Physics* 15(10), 2210-2215.

