

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Operator *vec* merupakan suatu operator yang mentransformasikan suatu matriks berukuran $m \times n$ menjadi vektor kolom berukuran $mn \times 1$ dengan menumpuk kolom pertama sampai kolom terakhir secara berurutan hingga membentuk satu vektor [1]. Transformasi matriks menjadi vektor kolom menginspirasi terciptanya operator baru yaitu operator *vech*, *vecb*, *vecd*, dan *vecp* [1–4].

Henderson dan Searle [1] mendefinisikan operator *vec* dari suatu matriks dengan menumpuk kolom pertama hingga terakhir dalam satu kolom, dan operator *vech* dari matriks bujur sangkar dengan melakukan hal yang sama, tetapi memulai setiap kolom pada elemen diagonalnya. Demikian pula, Szatrowski [2] mendefinisikan operator *vec* yang disimbolkan dengan $\langle A \rangle$, yaitu mentransformasikan matriks bujur sangkar menjadi vektor kolom dengan cara menumpuk entri diagonal utama kemudian entri di atas diagonal utama yang dimulai dari baris pertama sampai baris terakhir. Magnus dan Neudecker [3] juga memperkenalkan dua matriks transformasi L dan D , yang entri-entrinya hanya berisi elemen nol dan satu. Jika A adalah matriks sebarang berukuran $n \times n$, maka matriks L mengeliminasi elemen

supradiagonal (di atas diagonal utama) dari A , sementara matriks D melakukan transformasi invers untuk A matriks simetri. Beberapa sifat matriks L dan D diberikan, khususnya yang berkaitan dengan *Kronecker products*. Kegunaan kedua matriks ditunjukkan dalam tiga bidang statistik matematika dan aljabar matriks: estimasi maksimum *likelihood* dari distribusi normal multivariat, evaluasi Jacobian dari transformasi dengan argumen matriks simetri atau segitiga bawah, dan solusi persamaan matriks.

Dalam [4], Koning dkk. membahas mengenai blok hasilkali Kronecker, yaitu perluasan dari hasilkali Kronecker biasa yang beroperasi pada matriks blok. Selanjutnya, [4] mendefinisikan operator *vecb* yang mentransformasikan blok-blok dalam sebuah matriks menjadi vektor yang memperhatikan struktur blok. Pada [5], Nagakura mendefinisikan suatu operator *vecd* yang mentransformasikan suatu matriks bujur sangkar menjadi vektor kolom dengan menyusun dari entri diagonal utama kemudian dibawah diagonal utama dan seterusnya. Dalam hal ini, Nagakura [6] juga menemukan dan membuktikan beberapa sifat dan hubungan antara *vech*, *vecd*, matriks permutasi, dan matriks duplikasi.

Jika operator *vec* didefinisikan pada matriks berukuran $m \times n$, maka operator *vech* dan *vecd* didefinisikan pada matriks A berukuran $n \times n$ atau matriks bujur sangkar. Misalkan A adalah matriks $n \times n$, maka *vech*(A) adalah vektor kolom berukuran $\frac{n(n+1)}{2} \times 1$, diperoleh dari *vec*(A) dengan menghilangkan entri-entri di atas diagonal utama [1], dan *vecd*(A) adalah vektor kolom berukuran $\frac{n(n+1)}{2} \times 1$, dengan menyusun entri pada diagonal

utama dan entri pada diagonal-diagonal di bawah diagonal utama [5]. Oleh karena terdapat kesamaan elemen-elemen pada operator $vech$ dan $vecd$, maka [5] mendefinisikan suatu matriks yang mengaitkan antara operator $vech$ dan $vecd$ yang dinotasikan dengan B_n^* berukuran $\frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2}$, sedemikian sehingga diperoleh hubungan $B_n^* vech(A) = vecd$. Pada [5] disebutkan terdapat matriks duplikasi D_n berukuran $n^2 \times \frac{n(n+1)}{2}$, sedemikian sehingga diperoleh hubungan $D_n vech(S) = vec(S)$, dengan S adalah matriks simetri berukuran $n \times n$. Dalam [5] juga disebutkan matriks penting lainnya yang terkait dengan operator $vech$ yaitu matriks eliminasi L_n berukuran $\frac{n(n+1)}{2} \times n^2$ yang mengubah $vec(A)$ menjadi $vech(A)$ dengan matriks A berukuran $n \times n$, sedemikian sehingga diperoleh hubungan $vech(A) = L_n vec(A)$.

Pada penelitian sebelumnya telah didefinisikan oleh Hidayah dkk. [7] dan Noviana dkk. [8] suatu operator baru yaitu operator $vech^*$, $vecp^*$ dan $vecd^*$. Dalam penelitian ini akan didefinisikan operator baru yang disebut $vech^\wedge$ berdasarkan entri diagonal utama dan entri di atas diagonal utama, selanjutnya akan ditentukan pengonstruksian suatu matriks $B_n^{\wedge(h)}$ yang mentransformasikan operator $vecd^*$ menjadi $vech^\wedge$, matriks $D_n^{\wedge(h)}$ yang mentransformasikan operator $vech^\wedge$ menjadi vec , dan matriks $L_n^{\wedge(h)}$ yang mentransformasikan operator vec menjadi $vech^\wedge$ serta beberapa sifat yang diperoleh terkait operator $vech^\wedge$ dan $vecd^*$ dengan matriks permutasi, matriks duplikasi, dan matriks eliminasi.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan uraian sebelumnya, maka pada tesis ini akan dibahas beberapa hal berikut.

1. Bagaimana pendefinisian operator $\hat{vech}$?
2. Bagaimana bentuk umum suatu matriks yang mentransformasikan operator $vecd^*$ menjadi $\hat{vech}$, operator $\hat{vech}$ menjadi vec dan operator vec menjadi $\hat{vech}$?
3. Bagaimana sifat-sifat dari matriks transformasi tersebut dan hubungannya dengan matriks permutasi, duplikasi, dan eliminasi?

1.3 Tujuan Penelitian

1. Mendefinisikan operator $\hat{vech}$.
2. Menentukan suatu matriks yang mentransformasikan operator $vecd^*$ menjadi $\hat{vech}$, operator $\hat{vech}$ menjadi vec , dan operator vec menjadi $\hat{vech}$.
3. Mengkaji sifat-sifat dari matriks transformasi tersebut dan hubungannya dengan matriks permutasi, duplikasi, dan eliminasi.

1.4 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut: Bab I Pendahuluan, terdiri dari: latar belakang, perumusan

masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan. Bab II Landasan Teori, yang berisi tentang definisi-definisi dan teori-teori dasar yang digunakan sebagai acuan pada pembahasan. Bab III Pembahasan, berisi uraian terkait hasil yang diperoleh mengenai operator vec , $vecd^*$, dan $vech^\wedge$. Bab IV Kesimpulan, berisi kesimpulan dari hasil penelitian.

