BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Salah satu persamaan yang sering dipelajari, baik dalam aspek teori maupun dalam konteks aplikasinya, adalah persamaan Schrödinger nonlinier diskrit (SNLD). Hal ini disebabkan karena persamaan tersebut memodelkan banyak fenomena penting, seperti dinamika sistem osilator tak harmonik terikat (*coupled*), perambatan sinar optik pada larik pandu gelombang nonlinier, dan dinamika kondensasi Bose-Einstein [*Bose-Einstein Condention (BEC)*] [1]. Terkait dengan aplikasi yang disebut terakhir, BEC adalah wujud zat yang didinginkan sampai suhu mendekati 0^0 Kelvin dan diprediksi secara teori eksistensinya oleh S.N Bose dan A. Einstein pada tahun 1925 [2]. Eksperimen pertama yang berhasil membuktikan keberadaan BEC tersebut dilakukan oleh Wolfgang Ketterle, Eric Cornell dan Carl Wiemann pada tahun 1995, sehingga menghantarkan mereka meraih hadiah Nobel di bidang fisika pada tahun 2001 [3].

Bentuk umum dari persamaan SNLD diberikan oleh [4]

$$i\dot{\phi}_n = \varepsilon(\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}) + F(\phi_{n+1}, \phi_n, \phi_{n-1}), \qquad (1.1.1)$$

dimana $\phi_n \equiv \phi_n(t) \in \mathbb{C}$ adalah fungsi gelombang pada waktu $t \in \mathbb{R}^+$ dan site $n \in \mathbb{Z}$, $\dot{\phi}_n$ menyatakan turunan fungsi ϕ_n terhadap t, $\varepsilon > 0$ merupakan konstanta pengikat (*coupling constant*) dan F menyatakan suku nonlinier yang mempunyai beberapa bentuk, diantaranya [4]:

1. Kenonlinieran bertipe Ablowitz-Ladik(AL):

$$F_{AL} = \frac{1}{2}|\phi_n|^2(\phi_{n+1} + \phi_{n-1}). \tag{1.1.2}$$

2. Kenonlinieran bertipe kubik:

$$F_{cub} = |\phi_n|^2\phi_n. \tag{1.1.3}$$

Pada tahun 1975-1976, Ablowitz dan Ladik [5] menunjukkan bahwa persamaan SNLD dengan suku nonlinier (1.1.2) adalah persamaan yang *integrable* (dapat diekspresikan solusi solitonnya secara eksak), dimana solusi soliton eksaknya diberikan oleh [5]:

$$\phi_n(t) = \sinh(\chi)\text{sech}[\chi(n - ct)]e^{i(k+\omega t+\alpha)}, \tag{1.1.4}$$

dimana χ, k, α adalah parameter, $c = 2\sinh(\chi)\sin(k)/\chi$ dan $\omega = 2(\cosh(\chi)\cos(k)$ $-1)$. Sedangkan, persamaan SNLD dengan suku nonlinier (1.1.3) dikenal sebagai persamaan yang *nonintegrable* (tidak dapat diekspresikan solusi solitonnya secara eksak) [4].

Hal yang paling menarik dari persamaan SNLD adalah eksistensi solusi soliton yang dimilikinya. Soliton merupakan gelombang yang memiliki sifat dapat mempertahankan bentuknya dan merambat pada kecepatan konstan [7]. Dalam konteks aplikasinya, Tagg [6] menjelaskan penggunaan soliton dalam sistem komunikasi serat optik. Dalam hal ini, soliton dapat dimanfaatkan untuk menyediakan transmisi sinyal yang sangat akurat dalam jarak tempuh yang sangat jauh. Hal ini sangat penting dalam pengembangan teknologi dan komunikasi masa depan.

Untuk persamaan *nonintegrable*, diperlukan pendekatan analitik yang menghampiri solusinya. Salah satu metode yang sering digunakan untuk menentukan hampiran solusi tersebut adalah metode aproksimasi variasional (selanjutnya disingkat AV). Metode ini dikembangkan berdasarkan prinsip aksi terkecil (*least action*), atau dikenal juga dengan prinsip Hamiltonian, yang menyatakan bahwa persamaan gerak suatu sistem ditentukan oleh titik-titik kritis dari aksi yang dilakukan oleh sistem tersebut [8]. Keberhasilan metode ini sangat bergantung pada fungsi penduga (ansatz) yang digunakan dalam menghampiri solusi yang diinginkan.

Metode AV telah digunakan pada berbagai persamaan, termasuk dalam menentukan hampiran solusi soliton pada persamaan SNLD dengan kenonlinieran bertipe kubik (1.1.3). Aceves dkk [9] menggunakan metode AV untuk mengaproksimasi solusi soliton *onsite*, yaitu solusi soliton yang berpusat pada satu site. Selain itu, metode AV juga diterapkan untuk menghampiri solusi soliton *intersite*, yaitu solusi soliton yang berpusat pada dua site dengan konfigurasi simetris oleh Cuevas dkk [10]. Selanjutnya, Kaup dkk [11] menyempurnakan formulasi metode AV sehingga dapat menghampiri solusi soliton *intersite* asimetris. Fungsi ansatz yang digunakan dalam [9] dan [10] tersebut berlaku untuk kasus $\varepsilon \approx 0$ atau dikenal dengan istilah limit *anti-continuum*.

Validasi dari metode AV biasanya dilakukan secara visual melalui perbandingan numerik untuk beberapa nilai parameter tertentu. Namun Chong dkk [12] telah mengembangkan suatu teorema yang dapat dijadikan sebagai ukuran validasi hasil AV secara tepat. Chong dkk mengkonfirmasikan bahwa fungsi penduga untuk soliton dengan jumlah parameter yang lebih banyak memberikan aproksimasi yang lebih akurat.

Pada tesis ini, metode AV akan diterapkan untuk menentukan hampiran soliton *intersite* pada persamaan berikut:

$$i\dot{\phi}_n = \varepsilon(\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}) + \frac{\alpha}{2}|\phi_n|^2(\phi_{n+1} + \phi_{n-1}) + (1-\alpha)|\phi_n|^2\phi_n. \quad (1.1.5)$$

Penerapan metode AV pada Persamaan (1.1.5) belum pernah dikaji sebelumnya. Persamaan (1.1.5) dapat dipandang sebagai persamaan yang menginterpolasi persamaan SNLD Ablowitz-Ladik (1.1.2) pada saat $\alpha = 1$ dan persamaan SNLD kubik (1.1.3) pada saat $\alpha = 0$. Untuk selanjutnya persamaan tersebut dinamakan persamaan Schrödinger nonlinier diskrit Ablowitz Ladik-kubik atau disingkat persamaan SNLD AL-kubik.

1.2 Perumusan Masalah

Dalam penelitian ini akan dikaji bagaimana memperoleh aproksimasi solusi soliton *intersite* pada persamaan SNLD AL-Kubik (1.1.5) dengan menggunakan metode AV. Selanjutnya akan diperiksa bagaimana validasi hampiran solusi soliton yang diperoleh dengan merujuk pada referensi [12].

1.3 Pembatasan Masalah

Penerapan metode AV dalam memperoleh solusi soliton *intersite* pada persamaan SNLD AL-kubik (1.1.5) dibatasi untuk kasus solusi stasioner yang bernilai riil.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Menentukan hampiran solusi soliton *intersite* pada persamaan SNLD AL-kubik (1.1.5) dengan menggunakan metode AV.

2. Membandingkan hasil-hasil yang diperoleh secara analitik (AV) dengan hasil-hasil numerik.

3. Memeriksa validasi hasil yang diperoleh dari metode AV.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini bermanfaat dalam memperkaya kajian teoritis tentang soliton pada persamaan Schrödinger nonlinear diskrit (SNLD).

1.6 Sistematika Penulisan

Tulisan ini dibagi atas empat bab. Pada Bab I dibahas latar belakang penelitian, rumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan. Konsep dasar dan materi penunjang sebagai landasan teori diberikan pada Bab II. Selanjutnya pada Bab III dibahas penerapan metode AV dalam menentukan hampiran solusi soliton *intersite* pada persamaan SNLD AL-kubik beserta perhitungan numerik dan validasinya. Hasil-hasil yang diperoleh kemudian disimpulkan pada Bab IV.