BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler dalam memecahkan masalah jembatan di atas sungai Pregel di Konisberg, Rusia. Pada tahun 1736, Leonhard Euler mencoba membuktikan kemungkinan untuk melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel di Konisberg, Rusia dalam sekali waktu. Masalah jembatan Konisberg ini dinyatakan ke dalam bentuk graf dengan keempat daerah tersebut sebagai titik dan ketujuh jembatan sebagai sisi yang menghubungkan pasangan titik yang bersesuaian.

Salah satu kajian dalam teori graf adalah bilangan kromatik lokasi. Konsep bilangan kromatik lokasi pertama kali dikaji oleh Chartrand, dkk. [1] pada tahun 2002. Konsep bilangan kromatik lokasi ini adalah perpaduan dari konsep dimensi partisi dan pewarnaan titik. Himpunan titik $V(G)$ dipartisi menjadi subhimpunan, yaitu $S_1, S_2, ..., S_k$. Notasikan Π sebagai suatu himpunan terurut dari k-partisi, yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$. Misalkan terdapat suatu titik v di G, maka representasi v terhadap Π didefinisikan sebagai $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), d(v, S_2), ..., d(v, S_k))$. Jika setiap titik pada G mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π, maka Π disebut partisi pembeda. Dimensi partisi dari graf G merupakan kardinalitas minimum dari partisi pembeda. Pewarnaan titik pada graf adalah pemberian warna pada setiap titik dengan syarat setiap titik yang bertetangga harus memiliki warna yang berbeda. Jika warna yang digunakan sebanyak k maka graf G dikatakan mempunyai k-pewarnaan. Banyaknya warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai graf G dinyatakan dengan bilangan kromatik yang dinotasikan dengan $\chi(G)$.

Menurut Chartrand, dkk.[1], bilangan kromatik lokasi didefinisikan sebagai berikut. Misalkan c adalah suatu pewarnaan titik pada graf G dengan k warna. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, ..., S_n\}$, S_i menyatakan himpunan titik yang berwarna i, untuk $1 \leq i \leq k$, adalah partisi dari himpunan titik $V(G)$ oleh pewarnaan c. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari titik v adalah k-pasang terurut $(d(v, S_1), d(V, S_2), ..., d(v, S_k))$ dengan $d(v, S_i) = \min\{d(v, x)|x \in S_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$, dimana $d(v, x)$ adalah jarak antara dua titik v dan x. Jika semua titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari graf G.

Pada tahun 2002, Chartrand, dkk. memperoleh bilangan kromatik lokasi dari graf lintasan dan graf lingkaran. Bilangan kromatik lokasi dari graf lintasan yang dinotasikan dengan graf P_n adalah $\chi_L(P_n) = 3$ untuk $n \geq 3$. Bilangan kromatik lokasi dari graf lingkaran yang dinotasikan dengan graf C_n adalah $\chi_L(C_n) = 3$ untuk n ganjil dan $\chi_L(C_n) = 4$ untuk n genap. Pada tahun 2011, Asmiati, dkk. [2] menentukan bilangan kromatik lokasi amalgamasi bintang yang dihubungkan oleh suatu lintasan. Pada tahun 2012, Asmiati, dkk. [3] berhasil memperoleh bilangan kromatik lokasi untuk graf kembang api. Pada tahun yang sama, Asmiati dan Baskoro [4] berhasil mengkarakterisasi semua graf yang memuat siklus dengan bilangan kromatik lokasi tiga. Wellyanti, dkk. [5] menemukan bilangan kromatik lokasi untuk pohon n-ary lengkap di tahun 2013. Pada tahun 2015, Welyyanti, dkk. [6] memberikan batas atas untuk bilangan kromatik lokasi graf terhubung dimana setiap komponen memuat satu titik dominan. Selanjutnya, Asmiati, dkk. [7] telah menemukan bilangan kromatik lokasi dari amalgamasi bintang yang dihubungkan oleh suatu lintasan. Hartiansyah dan Darmaji [8] telah menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf hasil amalgamasi sisi dari graf bintang dengan orde $m+1$ dan graf lengkap dengan orde n. Bilangan kromatik lokasi dari amalgamasi graf bintang yang dihubungkan oleh suatu graf lingkaran juga telah ditemukan oleh Soleha, dkk. [9]. Pada tahun 2023, Welyyanti, dkk. [10] menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf amalgamasi kipas berekor.

Bilangan kromatik lokasi amalgamasi sisi graf lingkaran menjadi kajian dalam penelitian ini. Misalkan terdapat m buah graf lingkaran C_n, dinotasikan $C_n^1, ..., C_n^j, ..., C_n^m$, untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$. Banyaknya graf lingkaran yang diamalgamasikan, dinotasikan m dan banyaknya titik pada setiap graf lingkaran, dinotasikan n. Graf C_n^j menyatakan graf lingkaran ke-j dari m buah graf lingkaran yang diamalgamasikan dengan $1 \leq j \leq m$. Amalgamasi sisi graf lingkaran adalah suatu operasi amalgamasi sisi pada m buah graf lingkaran, dengan cara mengidentifikasi sisi yang bersesuaian di setiap graf lingkaran. Sisi $v_{j,1}v_{j,n}$ adalah sisi yang diidentifikasi dari graf C_n^j. Selanjutnya, sisi tersebut disatukan sehingga membentuk sisi baru yang dinamakan sisi xy. Amalgamasi sisi dari m graf lingkaran dinotasikan dengan $amal_s(C_n^j; v_{j,1}v_{j,n})$. Pada penelitian ini, kajian terkait bilangan kromatik lokasi untuk $amal_s(C_n^j; v_{j,1}v_{j,n})$ dibatasi untuk $n = 3, 4$, dan $m \geq 2$.

1.2 Rumusan Masalah

Perumusan masalah pada tugas akhir ini adalah menentukan bilangan kromatik lokasi dari amalgamasi sisi graf lingkaran $amal_s(C_n^j; v_{j,1}v_{j,n})$ dengan $n = 3, 4$, $1 \leq j \leq m$, dan $m \geq 2$.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah untuk memperoleh bilangan kromatik lokasi dari amalgamasi sisi graf lingkaran $amal_s(C_n^j; v_{j,1}v_{j,n})$ dengan $n = 3, 4$, $1 \leq j \leq m$, dan $m \geq 2$.

1.4 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam tugas akhir ini adalah BAB I Pendahuluan yang terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, serta tujuannya. BAB II Landasan teori yang membahas mengenai teori-teori sebagai dasar acuan yang digunakan dalam pembahasan dan mendukung masalah yang dibahas. BAB III membahas tentang metode untuk memperoleh bilangan kromatik lokasi amalgamasi sisi graf lingkaran $amal_s(C_n^j; v_{j,1}v_{j,n})$ dengan $n = 3, 4$, $1 \leq j \leq m$, dan $m \geq 2$. BAB IV merupakan kesimpulan peneliti yang telah diperoleh dalam tugas akhir ini. Hasil baru pada penelitian ini diberi tanda $\diamondsuit$.