BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Misalkan diberikan graf G dan H sebarang. Notasi $F \to (G, H)$ menyatakan bahwa pada sebarang pewarnaan merah-biru terhadap semua sisi graf F, senantiasa diperoleh F yang memuat subgraf merah yang isomorfik dengan G atau subgraf biru yang isomorfik dengan H. Selanjutnya, suatu *pewarnaan*-(G, H) pada graf F didefinisikan sebagai suatu pewarnaan merah-biru terhadap semua sisi graf F sedemikian sehingga F tidak memuat subgraf merah G sekaligus tidak memuat subgraf biru H. Jika suatu graf F^* mempunyai pewarnaan-(G, H), maka dinotasikan $F^* \nrightarrow (G, H)$.

Dengan menggunakan notasi panah di atas, didefinisikan dua jenis bilangan Ramsey berikut. *Bilangan Ramsey graf*, dinotasikan $R(G, H)$, didefinisikan sebagai banyaknya titik minimum dari graf lengkap K_n yang memenuhi $K_n \to (G, H)$ dan $K_n - v \nrightarrow (G, H)$ untuk sebarang titik v di K_n. Sementara *bilangan Ramsey sisi*, dinotasikan $\hat{r}(G, H)$, didefinisikan sebagai banyaknya sisi minimum dari suatu graf F yang memenuhi $F \to (G, H)$ dan $F - e \nrightarrow (G, H)$ untuk sebarang sisi e di F.

Nilai eksak $\hat{r}(G, H)$ terkait dengan banyaknya sisi minimal yang dipunyai suatu graf F sedemikian sehingga $F \rightarrow (G, H)$ dan $F - e \nrightarrow (G, H)$ untuk sebarang sisi e di F. Pertanyaan yang timbul adalah, apakah graf F yang memenuhi kedua persyaratan tersebut tunggal? Bila tidak, bagaimana karakterisasi dari semua graf F tersebut? Pertanyaan tersebut mengantarkan kita kepada konsep graf Ramsey (G, H)-minimal.

Burr dkk. [3] memunculkan pertanyaan tentang karakterisasi semua graf F yang memenuhi kedua syarat di atas. Graf F tersebut dikatakan sebagai *graf Ramsey* (G, H)-*minimal*. Semua graf yang memenuhi syarat tersebut dikelompokkan ke dalam kelas yang dinamakan *kelas Ramsey* (G, H)-*minimal*, dan dinotasikan sebagai $\mathcal{R}(G, H)$.

Dua masalah besar dalam kajian tentang $\mathcal{R}(G, H)$ adalah karakterisasi dan penentuan semua graf F yang berada dalam kelas tersebut. Secara umum pengkarakterisasian semua graf F dalam $\mathcal{R}(G, H)$ adalah hal yang sukar dilakukan, meskipun untuk pasangan graf (G, H) yang sederhana dan berukuran kecil.

Selain dua masalah yang telah disebutkan sebelumnya, penentuan apakah kelas $\mathcal{R}(G, H)$ adalah kelas yang berhingga atau tidak merupakan masalah yang menarik untuk diteliti lebih lanjut. Kelas $\mathcal{R}(G, H)$ dikatakan berhingga jika banyaknya graf yang berada dalam kelas tersebut berhingga. Sebaliknya kelas $\mathcal{R}(G, H)$ dikatakan tidak berhingga jika banyaknya graf yang berada dalam kelas tersebut tidak berhingga. Dalam penelitian ini akan dikaji tentang $\mathcal{R}(G, H)$ berhingga.

Berikut beberapa hasil terkait kelas $\mathcal{R}(G,H)$ berhingga. Dalam [3] Burr dkk. membuktikan bahwa kelas berhingga $\mathcal{R}(2K_2,2K_2) = \{3K_2, C_5\}$, artinya bahwa graf yang akan memuat subgraf $2K_2$ merah atau subgraf $2K_2$ biru hanyalah graf $3K_2$ dan C_5. Selanjutnya Burr dkk. [2] membuktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif m dan sebarang graf H, $\mathcal{R}(mK_2,H)$ merupakan kelas berhingga. Mereka menunjukkan hal tersebut dengan memberikan batas atas untuk banyaknya sisi yang dipunyai setiap graf $F \in \mathcal{R}(mK_2,H)$.

Karakterisasi anggota $\mathcal{R}(2K_2,tK_2)$ untuk $t \geq 4$ diberikan oleh Burr dkk. [4]. Dalam makalah yang sama, mereka juga mengidentifikasi semua anggota kelas tersebut untuk $t \leq 4$. Selanjutnya Mengersen dan Oeckermann [6] memberikan karakterisasi semua graf yang menjadi anggota $\mathcal{R}(2K_2,K_{1,n})$ untuk $n \geq 3$ dan menentukan anggota kelas tersebut untuk $n \leq 3$.

Selanjutnya Muhsi dan Baskoro [7] memberikan syarat perlu untuk graf yang termuat dalam $\mathcal{R}(3K_2,P_3)$ dan menentukan graf yang berada dalam $\mathcal{R}(3K_2,P_3)$. Selanjutnya Baskoro dan Yulianti [1] memberikan karakterisasi graf yang berada dalam $\mathcal{R}(2K_2,P_n)$, serta menentukan semua graf yang berada dalam $\mathcal{R}(2K_2,P_4)$ dan $\mathcal{R}(2K_2,P_5)$. Kemudian Tatanto dan Baskoro [9] memberikan syarat perlu dari $\mathcal{R}(2K_2,2P_n)$ untuk $n \geq 3$, dan menentukan semua graf yang berada dalam $\mathcal{R}(2K_2,2P_3)$, $\mathcal{R}(2K_2,2P_4)$ dan $\mathcal{R}(2K_2,2P_5)$.

Karakterisasi dan penentuan anggota $\mathcal{R}(mK_2,H)$ berhingga untuk $m \geq 3$ dan graf H sebarang sangat sukar untuk dilakukan. Hal ini dikarenakan lebih banyak kemungkinan pewarnaan merah-biru yang tidak memuat mK_2 merah.

Pada Tatanto dan Baskoro [9], $\mathcal{R}(2K_2, 2P_4)$ dikonstruksi dari anggota $\mathcal{R}(2K_2, P_4)$, $\mathcal{R}(2K_2, 2P_5)$ dikonstruksi dari anggota $\mathcal{R}(2K_2, P_5)$, dan [7] $\mathcal{R}(3K_2, P_3)$ dikonstruksi berdasarkan anggota $\mathcal{R}(2K_2, P_3)$.

Oleh karena itu penelitian ini dititikberatkan pada karakterisasi dari semua graf F yang berada dalam $\mathcal{R}(3K_2, 2P_3)$ dan penentuan graf yang berada dalam $\mathcal{R}(3K_2, 2P_3)$.

1.2 Perumusan Masalah

Perumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana menentukan graf Ramsey-minimal yang berada dalam $\mathcal{R}(3K_2, 2P_3)$ berdasarkan anggota $\mathcal{R}(3K_2, P_3)$ dan $\mathcal{R}(2K_2, 2P_3)$.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan graf Ramsey-minimal yang menjadi anggota $\mathcal{R}(3K_2, 2P_3)$.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan sumbangan terhadap perkembangan ilmu pengetahuan tentang graf Ramsey-minimal, khususnya tentang karakterisasi graf Ramsey-minimal yang berada dalam $\mathcal{R}(3K_2, 2P_3)$. Diharapkan penelitian ini juga dapat memperluas wawasan bagi penulis dan pembaca.

1.5 Sistematika Penulisan

Tesis ini terdiri dari empat bab dengan sistematika sebagai berikut. Pada Bab I diuraikan tentang latar belakang masalah, perumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan. Sedangkan pada Bab II diberikan definisi dan teori-teori yang relevan serta hasil-hasil penelitian terdahulu dalam topik yang sama. Selanjutnya, pembahasan serta penyelesaian permasalahan yang berkaitan dengan $\mathcal{R}(3K_2, 2P_3)$ diberikan pada Bab III. Penulisan tesis ini diakhiri oleh Bab IV yang berisi kesimpulan dan masalah terbuka. Hasil utama penelitian diberikan dalam bentuk lema dan teorema yang diberi tanda $\diamondsuit$.